

УДК 517.9

DOI: 10.54503/0321-1339-2025.125.1-15

А. Г. Камалян, Г. А. Киракосян

Об одном классе мозаичных операторов типа свёртки

(Представлено академиком А. Нерсисяном 08/II 2025)

Ключевые слова: решения Йоста, частичная изометрия, оператор t -свёртки, оператор -Винера-Хопфа.

1. Введение. Уравнение Штурма-Лиувилля на вещественной
 оси $\mathbb{R} - y''(x) + v(x)y(x) = \lambda^2 y(x)$, (1.1)

в случае когда $(1 + |x|)v \in L_1(\mathbb{R})$ обладает решениями Йоста, т.е. решениями $e_{\pm}$ со специальным поведением на бесконечности

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-i\lambda x} e_{\pm}(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-i\lambda x} e'_{\pm}(x, \lambda) = i\lambda. \quad (1.2)$$

Нормировка этих решений порождает некоторый оператор (см. [2]) частичной изометрии $U: L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$, который в случае $v = 0$ совпадает с преобразованием Фурье F

$$(Fy)(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\lambda} y(x) dx.$$

Замена в определении оператора свёртки преобразования Фурье на оператор U приводит к операторам, которые по своим свойствам близки к оператору свёртки, а при соответствующем переносе на полуось к оператору Винера-Хопфа (см., например, [2–5, 7, 9]).

Пусть $\xi, q \in \mathbb{R}$. Через $\chi_{\pm\xi}$ будем обозначать характеристические функции множеств $\mathbb{R}_{\pm\xi} := \{x \in \mathbb{R}: \pm(x - \xi) > 0\}$. В случае $\xi = 0$ будем пользоваться стандартными обозначениями $\chi_{\pm}$ и $\mathbb{R}_{\pm}$.

Далее через $e_{+}(x, \lambda)$ и $e_{-}(x, \lambda)$ мы обозначаем непрерывные на $\mathbb{R}$ и зависящие от параметра $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ функции, удовлетворяющие на множествах $\mathbb{R}_{\pm}$ уравнению $-y'' = \lambda^2 y$, граничным условиям (1.2) и

$$\frac{\partial e_{\pm}}{\partial x}(\xi + 0, \lambda) - \frac{\partial e_{\pm}}{\partial x}(\xi - 0, \lambda) = -q e_{\pm}(\xi, \lambda).$$

Заметим, что определённые таким образом функции $e_{\pm}(x, \lambda)$ могут быть приняты в качестве решений Йоста уравнения (1.1) в случае, когда потенциал равен $-q\delta(x - \xi)$, где $\delta(x)$ дельта-распределение Дирака (см. [1]).

2. Частичная изометрия. Пусть функции r и σ_{η} ($\eta \in \mathbb{R}$) определены по формулам

$$r(\lambda) = \frac{-q}{q + 2i\lambda}, \sigma_{\eta} = e^{i\eta\lambda}, \lambda \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Нормируя функции $e_{\pm}(x, \lambda)$ функцией, зависящей от параметра $t(\lambda) = 1 + r(\lambda)$, определим функции $u^{\mp}(x, \lambda) = t(\lambda)e_{\pm}(x, \pm\lambda)$. Несложно убедиться в равенствах

$$u^{-}(x, \lambda) = -\frac{i2\lambda}{q} r(\lambda)e^{i\lambda x} \chi_{+\xi}(x) + (e^{i\lambda x} + \sigma_{2\xi}(\lambda)r(\lambda)e^{-i\lambda x})\chi_{-\xi}(x),$$

$$u^{+}(x, \lambda) = (e^{-i\lambda x} + \sigma_{-2\xi}(\lambda)r(\lambda)e^{i\lambda x})\chi_{+\xi}(x) - \frac{i2\lambda}{q} r(\lambda)e^{-i\lambda x} \chi_{-\xi}(x).$$

Функции $u^{\mp}$ порождают интегралы

$$(U_{\mp}y)(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} u^{\mp}(x, \lambda)y(x)dx, \lambda \in \mathbb{R},$$

которые сходятся по норме $L_2(\mathbb{R})$ и определяют ограниченные операторы $U_{\mp}: L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$. Аналогично [2] определим оператор $U: L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ с помощью равенства

$$U := m(\chi_{+})U_{-} + m(\chi_{-})J U_{+},$$

где $J: L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ оператор отражения: $(Jy)(x) = y(-x)$.

Теорема 2.1. Оператор U является частичной изометрией. Справедливы тождества

$$UU^{*} = I, U^{*}U = I - P,$$

где $P: L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ одномерный проектор, определённый равенством

$$P y(x) = \frac{|q|}{2} e^{-\frac{|q|}{2}|x-\xi|} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|q|}{2}|t-\xi|} y(t)dt.$$

3. Оператор m-свёртки. Для линейного пространства (алгебры) X через X^n ($X^{n \times n}$) будем обозначать множество всех вектор столбцов порядка n (матриц порядка $n \times n$) с элементами из X . Для линейного оператора $A: X \rightarrow Y$ (X, Y линейные пространства), оператор $\text{diag}(A, \dots, A): X^n \rightarrow Y^n$ также будем обозначать через A . Оператор умножения на матрицу функцию $a \in L_{\infty}^{n \times n}(\mathbb{R})$ будем обозначать через $m(a): L_2^n(\mathbb{R}) \rightarrow L_2^n(\mathbb{R})$, $m(a)y = ay$. Наряду с определённой на $\mathbb{R}$ матрицей-функцией b мы будем пользоваться обозначениями

$$b_0(x) = \frac{1}{2}(b(x) - b(-x)), \quad b_e = \frac{1}{2}(b(x) + b(-x)).$$

Пусть $a \in L_\infty^{n \times n}(\mathbb{R})$. Определим также матрицы-функции

$$A(x) = 2r_e(x)a_0(x). \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} A_+^+ &:= A \chi_+, A_-^- := A \chi_-, A_+^\pm(x) := r(-x)a(x), A_-^\pm(x) := r(x)a(x). \\ B_+^+(x) &= \sigma_{-2\xi}(x)r(x)(a(-x)\chi_+(x) + a(x)\chi_-(x)), \\ B_-^-(x) &= \sigma_{-2\xi}(x)r(-x)(a(x)\chi_+(x) + a(-x)\chi_-(x)), \\ B_+^\pm(x) &= 2\sigma_{-2\xi}(x)r_0(-x)a_0(-x)\chi_-(x), \\ B_-^\pm(x) &= 2\sigma_{-2\xi}(x)r_0(-x)a_0(x)\chi_+(x). \end{aligned}$$

Теорема 3.1. *Имеет место равенство*

$$\begin{aligned} U^*m(a)U &:= W_m^0(a, 0) \\ &= W^0(a) + m(\chi_{+\xi}) (W^0(A_+^+) + J W^0(B_+^+)) m(\chi_{+\xi}) \\ &\quad + m(\chi_{+\xi}) (W^0(A_-^+) + J W^0(B_-^+)) m(\chi_{-\xi}) \\ &\quad + m(\chi_{-\xi}) (W^0(A_+^-) + J W^0(B_+^-)) m(\chi_{+\xi}) \\ &\quad + m(\chi_{-\xi}) (W^0(A_-^-) + J W^0(B_-^-)) m(\chi_{-\xi}). \end{aligned}$$

Пусть $d \in \mathbb{C}$ и операторы $\pi_+: L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R}_+)$, $\pi_+^0: L_2(\mathbb{R}_+) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ определены по формулам

$$(\pi_+ y)(x) = y(x) \text{ и } (\pi_+^0 y)(x) = \begin{cases} y(x), & \text{если } x \in \mathbb{R}_+, \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R}_-. \end{cases}$$

Оператор $W_m^0(a, d) := (W_m^0(a, 0) + dP): L_2^n(\mathbb{R}) \rightarrow L_2^n(\mathbb{R})$ будем называть оператором m -свёртки, а оператор $W_m(a, d) = \pi_+ W_m^0(a, d) \pi_+^0: L_2^n(\mathbb{R}_+) \rightarrow L_2^n(\mathbb{R}_+)$ оператором m -Винера-Хопфа.

Заметим, что наиболее простой вид операторы $W_m^0(a, d)$ и $W_m(a, d)$ имеют в случае, когда a чётная матрица-функция. Действительно в этом случае

$$A_+^+ = A_-^- = B_+^+ = B_-^- = 0,$$

$$B_+^+(x) = \sigma_{-2\xi}(x)r(x)a(-x), \quad B_-^-(x) = \sigma_{-2\xi}(x)r(-x)a(x).$$

4. Разрешимость уравнения на оси. Обозначим через φ функцию, определённую по формуле

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{|q|}{2}} \exp\left(-\frac{|q|}{2}(x - \xi)\right),$$

а через $\Lambda_\varphi: L_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ функционал, действующий по формуле

$$\Lambda_\varphi y = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)y(x)dx.$$

Результаты теоремы 2.1 позволяют провести полное исследование задачи разрешимости уравнения

$$W_m^0(a, d) = f, \quad f \in L_2^n(\mathbb{R}). \quad (4.1)$$

Теорема 4.1. Пусть $a \in L_\infty^{n \times n}(\mathbb{R})$. Для разрешимости уравнения

$$W_m^0(a, 0)y = f \quad (4.2)$$

в пространстве $L_2^n(\mathbb{R})$ необходимо выполнение условия

$$\Lambda_\varphi(f) = 0. \quad (4.3)$$

При выполнении этого условия, уравнение (4.2) разрешимо тогда и только тогда, когда в $L_2^n(\mathbb{R})$ разрешимо уравнение

$$m(a)z = Uf. \quad (4.4)$$

В случае $d \neq 0$ уравнение (4.1) разрешимо в $L_2^n(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда в $L_2^n(\mathbb{R})$ разрешимо уравнение (4.4).

Следующая теорема даёт необходимые и достаточные условия фредгольмовости и обратимости оператора $W_m^0(a, d)$.

Теорема 4.2. Пусть оператор $a \in L_\infty^{n \times n}(\mathbb{R})$, $d \in \mathbb{C}$. Оператор $W_m^0(a, d)$ фредгольмов тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\operatorname{ess\,inf}_{x \in \mathbb{R}} |\det a(x)| > 0.$$

При выполнении этого условия

$$\operatorname{Ind} W_m^0(a, d) = 0.$$

При $d \neq 0$ оператор $W_m^0(a, d)$ обратим. При $d = 0$ имеет место равенство

$$\ker W_m^0(a, 0) = \operatorname{coker} W_m^0(a, 0) = \operatorname{span}\{\varphi\}.$$

5. Фредгольмовость оператора на полуоси.

Определённые на полуоси $\mathbb{R}_+$ операторы $W_m(a, d)$ имеют гораздо более сложную структуру чем $W_m^0(a, d)$. Исследование этих операторов сводится к исследованию сингулярных и интегральных операторов с отражением (более подробно см. [8]). Это обстоятельство позволяет исследовать фредгольмовые свойства этих операторов.

Пусть $\dot{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ одноточечная компактификация $\mathbb{R}$. Через $PC := PC(\dot{\mathbb{R}})$ будем обозначать алгебру кусочно-непрерывных функций на $\dot{\mathbb{R}}$, т.е. функций a , для которых в каждой точке $x_0 \in \dot{\mathbb{R}}$ существуют в пределы

$$a(x_0 - 0) = \lim_{\alpha \rightarrow x_0 - 0} a(\alpha), \quad a(x_0 + 0) = \lim_{\alpha \rightarrow x_0 + 0} a(\alpha),$$

причём

$$a(+\infty) := a(\infty - 0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a(x), \quad a(-\infty) = a(\infty + 0) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a(x).$$

Пусть функции r и σ_η определены по формулам (2.1), $a \in L_\infty^{n \times n}(\mathbb{R})$, а матрица-функция A определена по формуле (3.1). Пусть определённая на $\mathbb{R}_+$ матрица-функция c задана формулой

$$c(x) = \begin{pmatrix} a(x) + A(x) - r(x)r(-x)a(-x) & \sigma_{-2\xi} r(-x)E_n \\ \sigma_{-2\xi} r(x)E_n & a^{-1}(-x) \end{pmatrix}.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.1. Пусть $\xi \leq 0$, $a \in PC^{n \times n}$. Тогда, чтобы оператор $W_m^0(a, d)$ был фредгольмовым необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

- а) $\operatorname{ess\,inf}_{x \in \mathbb{R}_-} |\det a(x)| > 0$; (5.1)
б) $\det c(x \pm 0) \neq 0$ для $x \in \mathbb{R}_+$, и

$$\frac{1}{2\pi} \arg \lambda_j(x) + \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$$

для всех $x \in \mathbb{R}_+$ и всех собственных значений $\lambda_j(x)$ матрицы $c^{-1}(x-0)c(x+0)$;

с) Уравнение

$$\det(\lambda^2 E_n - a(+\infty)(a(-\infty)^{-1})) = 0$$

не имеет решений, лежащих на луче $\{r e^{i\pi/4}; r \in (0, \infty)\}$.

Заметим, что при некоторых дополнительных условиях можно написать явную формулу для индекса оператора $W_m(a, d)$ (см. [8]).

Весовую функцию ρ определим равенством $\rho(x) = |x|^{-1/4}$ и обозначим через $L_2(\mathbb{R}, \rho)$ лебегово пространство с весом ρ и с нормой

$$\|f\|_{2, \rho} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \rho^2(t) dt \right)^{1/2}.$$

Как известно (более подробно см. [2]), сингулярный интегральный оператор

$$(Sy)(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(\tau)}{\tau - x} d\tau,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения, ограничен в пространстве $L_2(\mathbb{R}, \rho)$, а оператор $P_+ = \frac{1}{2}(I + S)$ является проектором. Рассмотрим весовое пространство Харди $H_2(\mathbb{R}, \rho) := P_+ L_2(\mathbb{R}, \rho)$. Определим также операторы $\mathcal{P}: L_2(\mathbb{R}, \rho) \rightarrow H_2(\mathbb{R}, \rho)$ и $\mathcal{P}^0: H_2(\mathbb{R}, \rho) \rightarrow L_2(\mathbb{R}, \rho)$ по формулам $\mathcal{P}y = P_+ y$, $\mathcal{P}^0 y = y$.

Пусть $a \in L_2^{n \times n}(\mathbb{R})$ и $\tilde{a} := Ja$. Матрицу-функцию $g(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$ определим по формуле

$$g(x) = \left(\begin{array}{cc|cc} a & a r \sigma_{\xi} & | & r \sigma_{2\xi} E_n & a r \sigma_{\xi} \\ \sigma_{-\xi} E_n & E_n & | & 0 & 0 \\ \hline 0 & r \sigma_{-\xi} E_n & | & (1+r)(\tilde{a})^{-1} & r \sigma_{-\xi} E_n \\ 0 & r E_n & | & \sigma_{\xi}(1+r)(\tilde{a})^{-1} & (1+r)E_n \end{array} \right).$$

Очевидно, что при выполнении условия (5.1), $g \in L_{\infty}^{4n \times 4n}(\mathbb{R}_+)$. Определим на $\mathbb{R}$ матрицу-функцию порядка $8n$ по формуле

$$G(x) = \begin{pmatrix} -g(\sqrt{x}) & 1/2(E_{2n} - E'_{2n}) \\ 0 & E_{2n} \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}_+ \text{ и}$$

$$G(x) = \begin{pmatrix} E_{2n} & -1/2(E_{2n} - E'_{2n}) \\ -2E_{2n} & E'_{2n} \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}_-, \quad \text{где } E'_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим также теплицев оператор

$$T(G) = \mathcal{P} m(G) \mathcal{P}^0: H_2^{8n}(\mathbb{R}, \rho) \rightarrow H_2^{8n}(\mathbb{R}, \rho).$$

Теорема 5.2. Пусть $\xi > 0$, $d \in \mathbb{C}$, $a \in L_{\infty}^{n \times n}(\mathbb{R})$ и выполнено условие (5.1). Тогда оператор $W_m(a, d)$ фредгольмов тогда и только тогда, когда фредгольмов оператор $T(G)$. В случае фредгольмовости этих операторов имеет место формула

$$\text{Ind } W_m(a, d) = \text{Ind } T(G) - n.$$

Институт математики НАН РА

E-mails: kamalyan_armen@yahoo.com

grigor.kirakosyan.99@gmail.com

А.Г. Камалян, Г.А. Киракосян

Об одном классе мозаичных операторов типа свёртки

По решениям Йоста уравнения Штурма-Лиувилля с потенциалом, равным дельта-распределению Дирака, строится частичная изометрия. Замена в определении оператора свёртки преобразования Фурье этим оператором приводит к операторам, называемым оператором m -свёртки. Определяется также соответствующий оператор на полуоси, называемый оператором m -Винера-Хопфа. Изучены свойства обратимости и фредгольмовости этих операторов.

Ա.Հ. Քամալյան, Գ.Ա. Կիրակոսյան

Փաթեթի տիպի մոզաիկ օպերատորների մի դասի մասին

Դիրակի դելտա-բաշխմամբ պոտենցիալով Շտուրմ-Լիուվիլի հավասարման Յոստի լուծումներով կառուցվում է մասնակի իզոմետրիա: Փաթույթի օպերատորի սահմանման մեջ, Ֆուրիեի ձևափոխության փոխարեն վերցնելով այդ օպերատորը սահմանվում է այսպես կոչված m -փաթեթի օպերատորը: Սահմանվում է նաև կիսաառանցքի վրա գործող

մ-Վիներ-Հոպֆի օպերատորը: Հետազոտվում են այդ օպերատորների հակադարձելիության և ֆրեդհոլմության հատկությունները:

A.G. Kamalyan, G.A. Kirakosyan

On a Class of Mosaic Operators of Convolution Type

By Yost solutions on the Sturm-Liouville equation with potential equal to the Dirac delta distribution a partial isometry is constructed. Replacing the Fourier transform in the definition of the convolution operator with this operator leads to operators called m -convolution operators. The corresponding operator on the semi-axis, called the m -Wiener-Hopf operator, is also defined. The invertibility and Fredholm properties of these operators are studied.

Литература

1. *Додд Р., Эйлбек Д., Гиббон Д., Моррис Х.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988, 694 с.
2. *Камалян А.Г., Спитковский И.С.* Матем. заметки: 2018. Т. 104, №3, с. 407–421.
3. *Камалян А.Г., Киракосян Г.А.* Изв. НАН Армении, 2022. Т. 53, №2, с. 112–121.
4. *Камалян А.Г., Киракосян Г.А.* Доклады НАН РА, 2023. Т. 123, №3–4, с. 15–20.
5. *Киракосян Г.А.* Изв. НАН Армении: 2025. Т. 60, №1, с. 25–44.
6. *Марченко В.А.* Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка. 1977. с. 329.
7. *Hasanyan D., Kamalyan A., Karakhanyan M. and Spitkovsky I.M.* Springer Proceedings in Mathematics & Statistics 291, 2019, pp. 175–197.
8. *Kamalyan A.G.* Advanced in Operator Theory, 2025, 10:26, pp. 1–36.
9. *Kirakosyan G.* Armenian Journal of Mathematics, 2022, 14, 6, pp. 1–10.