ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 123 2023 № 3-4

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3; 534.2
DOI: 10.54503/0321-1339-2023.123.3-4-52

П. Р. Амбарцумян

Вынужденные колебания двухслойной пластинки при наличии данных о перемещении точек поверхности контакта

(Представлено академиком Л. А. Агаловяном 9/X 2023)

Ключевые слова: *3D динамическая задача, асимптотический метод, двухслойная пластинка, вязкое сопротивление, датчики измерений.*

Введение. В качестве оптимальных конструктивных элементов в современной технике используются упругие тонкие многослойные пакеты, состоящие из балок, пластин или оболочек. Для обеспечения затухания колебаний пакета целесообразно для некоторых его слоев применять материалы с вязким трением, что может привести к рассеянию энергии внутри пакета, которое обычно принимается пропорциональным скорости перемещения точек и является одной из причин затухания колебаний пакета [1]. Чтобы проследить напряженно-деформированное состояние таких пакетов, данные о перемещениях точек поверхности контакта часто считывают с датчиков, установленных на поверхности контакта слоев.

Методы расчета элементов конструкций слоистой структуры и их математические модели, разработанные с помощью гипотез, рассмотрены в фундаментальных исследованиях [2-5].

Для определения и анализа напряженно-деформированных состояний слоистых пакетов широко используется асимптотический метод решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений [6, 7]. Поскольку один из геометрических размеров оболочки намного меньше остальных, при переходе к безразмерным координатам в уравнениях и соотношениях трехмерной задачи появляется малый геометрический параметр и полученные уравнения являются сингулярно возмущенными относительно этого параметра. На основе уравнений пространственной задачи теории упругости получены асимптотические решения неклассических краевых задач о колебаниях ортотропных пакетов при различных условиях контакта между слоями, обзор которых представлен в работе [8]. Динамическая задача для слоистого пакета решена в [9]. В [10] рассмотрена динамическая трехмерная задача двухслойной пластинки при наличии вязкого сопротивления в обоих слоях, в [11] – динамическая задача слоистых оболочек, когда данные измерений сняты с поверхности контакта между различными слоями.

В данной работе решена динамическая задача двухслойной ортотропной пластинки при наличии вязкого сопротивления в верхнем слое. Значения компонент вектора перемещения сняты с поверхности контакта между слоями с помощью установленных датчиков. Верхняя поверхность пластинки свободна, а между слоями заданы условия полного контакта.

1. Постановка задачи. Рассматриваются вынужденные колебания двухслойной ортотропной пластинки (рис. 1), $D = \{(x, y, z): (x, y) \in D_0, 0 \leq z \leq h_1 + h_2, h = h_1 + h_2 \ll l\}$, при наличии вязкого сопротивления в верхнем слое (в нижнем слое вязкое сопротивление отсутствует), где D_0 – поверхность контакта слоев, l– ее характерный тангенциальный размер (наименьший из линейных размеров поверхности D_0).

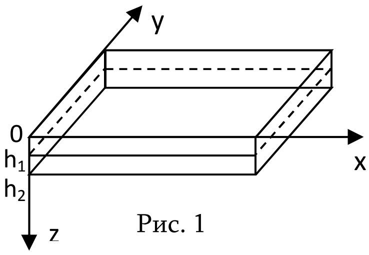

Рис. 1

Требуется найти ненулевые решения динамических уравнений пространственной задачи теории упругости для ортотропных сред при неклассических краевых условиях [7]. Имеем:

уравнения движения

$$\frac{\partial\sigma_{xx}^{\mathrm{I}}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}^{\mathrm{I}}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{xz}^{\mathrm{I}}}{\partial z} - k_1\frac{\partial u^{\mathrm{I}}}{\partial t} = \rho^{\mathrm{I}}\frac{\partial^2 u^{\mathrm{I}}}{\partial t^2},$$
$$\frac{\partial\sigma_{xx}^{\mathrm{II}}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}^{\mathrm{II}}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{xz}^{\mathrm{II}}}{\partial z} = \rho^{\mathrm{II}}\frac{\partial^2 u^{\mathrm{II}}}{\partial t^2}; \tag{1.1}$$
$$(x, y, z;\ u, v, w),$$

уравнения состояния (соотношения упругости) для ортотропного тела

$$\frac{\partial u^{(j)}}{\partial x} = a_{11}^{(j)}\sigma_{xx}^{(j)} + a_{12}^{(j)}\sigma_{yy}^{(j)} + a_{13}^{(j)}\sigma_{zz}^{(j)}, \quad \frac{\partial u^{(j)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(j)}}{\partial x} = a_{66}\sigma_{xy}^{(j)},$$
$$\frac{\partial v^{(j)}}{\partial y} = a_{12}^{(j)}\sigma_{xx}^{(j)} + a_{22}^{(j)}\sigma_{yy}^{(j)} + a_{23}^{(j)}\sigma_{zz}^{(j)}, \quad \frac{\partial w^{(j)}}{\partial x} + \frac{\partial u^{(j)}}{\partial z} = a_{55}\sigma_{xz}^{(j)}, \tag{1.2}$$
$$\frac{\partial w^{(j)}}{\partial z} = a_{13}^{(j)}\sigma_{xx}^{(j)} + a_{23}^{(j)}\sigma_{yy}^{(j)} + a_{33}^{(j)}\sigma_{zz}^{(j)}, \quad \frac{\partial w^{(j)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(j)}}{\partial z} = a_{44}\sigma_{yz}^{(j)},$$

где k_1 – коэффициент вязкого сопротивления первого слоя, $\rho^{(j)}$ – плотности слоев, $a_{ik}^{(j)}$– постоянные упругости ($a_{ik}^{(j)} = a_{ki}^{(j)}$), j – номер слоя.

На лицевой поверхности $z = 0$ заданы условия:

$$\sigma^I_{xz}(x,y,0,t)=0,\quad \sigma^I_{yz}(x,y,0,t)=0,\quad \sigma^I_{zz}(x,y,0,t)=0. \tag{1.3}$$

На поверхности контакта между слоями известны значения перемещений точек поверхности контакта как данные измерительных средств:

$$u^I(x,y,h_1,t)=u^{II}(x,y,h_1,t)=u^+(x,y)\sin\Omega t \qquad (u,v,w), \tag{1.4}$$

где Ω – частота вынужденных внешних воздействий.

На поверхности контакта между слоями выполняются условия полного контакта

$$\begin{gathered}\sigma^I_{xz}(x,y,h_1,t)=\sigma^{II}_{xz}(x,y,h_1,t) \qquad (\sigma_{xz},\sigma_{yz},\sigma_{zz}),\\ u^I(x,y,h_1,t)=u^{II}(x,y,h_1,t) \qquad (u,v,w)\ .\end{gathered} \tag{1.5}$$

В [3] показано, что сформулированная неклассическая краевая задача всегда имеет решение, более того, всегда существует классическая краевая задача, решением которой оно является.

2. Общее асимптотическое решение задачи. В уравнениях (1.1), (1.2) перейдем к безразмерным координатам и перемещениям по формулам

$$\begin{gathered}\xi=x/l,\ \eta=y/l,\ \zeta=z/h,\\ U^I=u^I/l,\ \ V^I=v^I/l,\ \ W^I=w^I/l, \qquad (\mathrm{I,II}).\end{gathered} \tag{2.1}$$

Решение преобразованных уравнений будем искать в виде

$$Q^{(j)}(x,y,z,t)=Q_1^{(j)}(x,y,z)\sin\Omega t+Q_2^{(j)}(x,y,z)\cos\Omega t, \tag{2.2}$$

где $Q^{(j)}$ – любое из напряжений и перемещений. В результате получается сингулярно возмущенная малым параметром $\varepsilon=h/l$ система относительно $Q_i^{(j)}$:

$$\frac{\partial\sigma^{\mathrm{I}}_{xx,1}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma^{\mathrm{I}}_{xy,1}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma^{\mathrm{I}}_{xz,1}}{\partial\zeta}+\varepsilon^{-2}\rho^{\mathrm{I}}(\Omega_*)^2U_1^{\mathrm{I}}+2K_1\varepsilon^{-2}\Omega_*U_2^{\mathrm{I}}=0,\ \ (x,y,z;U,V,W)$$

$$\frac{\partial\sigma^{\mathrm{I}}_{xx,2}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma^{\mathrm{I}}_{xy,2}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma^{\mathrm{I}}_{xz,2}}{\partial\zeta}+\varepsilon^{-2}\rho^{\mathrm{I}}(\Omega_*)^2U_2^{\mathrm{I}}-2K_1\varepsilon^{-2}\Omega_*U_1^{\mathrm{I}}=0,\ \ (x,y,z;U,V,W)$$

$$\frac{\partial\sigma^{\mathrm{II}}_{xx,i}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma^{\mathrm{II}}_{xy,\mathrm{i}}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma^{\mathrm{II}}_{xz,i}}{\partial\zeta}+\varepsilon^{-2}\rho^{\mathrm{II}}(\Omega_*)^2U_i^{\mathrm{II}}=0,\ \ (x,y,z;U,V,W),\ \ i=1,2$$

$$\frac{\partial U_i^{(j)}}{\partial\xi}=a_{11}^{(j)}\sigma_{xx,i}^{(j)}+a_{12}^{(j)}\sigma_{yy,i}^{(j)}+a_{13}^{(j)}\sigma_{zz,i}^{(j)}\,,\qquad \frac{\partial U_i^{(j)}}{\partial\eta}+\frac{\partial V_i^{(j)}}{\partial\xi}=a_{66}^{(j)}\sigma_{xy,i}^{(j)},$$

$$\frac{\partial V_i^{(j)}}{\partial\eta}=a_{12}^{(j)}\sigma_{xx,i}^{(j)}+a_{22}^{(j)}\sigma_{yy,i}^{(j)}+a_{23}^{(j)}\sigma_{zz,i}^{(j)}\,,\qquad \frac{\partial W_i^{(j)}}{\partial\xi}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial U_i^{(j)}}{\partial\zeta}=a_{55}^{(j)}\sigma_{xz,i}^{(j)},$$

$$\varepsilon^{-1}\frac{\partial W_i^{(j)}}{\partial\zeta} = a_{13}^{(j)}\sigma_{xx,i}^{(j)} + a_{23}^{(j)}\sigma_{yy,i}^{(j)} + a_{33}^{(j)}\sigma_{zz,i}^{(j)}, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial W_i^{(j)}}{\partial\eta} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial V_i^{(j)}}{\partial\zeta} = a_{44}^{(j)}\sigma_{yz,i}^{(j)},\ \Omega_*^2 = h^2\Omega^2,\ 2K_1 = k_1 h,\ j = I, II;\quad i = 1,2.$$

Решение внешней задачи будем искать в виде асимптотического представления

$$\sigma_{\alpha\beta,i}^{(j)} = \varepsilon^{-1+s}\sigma_{\alpha\beta,i}^{(j,s)},\quad \alpha,\beta = x,y,z;\ \ s = \overline{0,N}, \tag{2.4}$$
$$\left(U_i^{(j)}, V_i^{(j)}, W_i^{(j)}\right) = \varepsilon^s\left(U_i^{(j,s)}, V_i^{(j,s)}, W_i^{(j,s)}\right),\quad j = I, II;\quad i = 1,2.$$

$s = \overline{0,N}$ здесь и далее означает, что по немому (повторяющемуся) индексу *s* происходит суммирование в пределах целочисленных значений 0, *N*.

Из асимптотики (2.4) следует, что в отличие от классической теории для данного класса задач все компоненты тензора напряжений асимптотически равноправны, равноправны также перемещения, и допущения классической теории пластин и оболочек здесь не применимы.

После подстановки (2.4) в преобразованные уравнения и соотношения упругости (2.3) компоненты тензора напряжений $\sigma_{\alpha\beta,i}^{(j,s)}$ можно выразить через $U_i^{(j,s)}, V_i^{(j,s)}, W_i^{(j,s)}$ по формулам:

$$\sigma_{xx,i}^{(j,s)} = -A_{23}^{(j)}\frac{\partial W_i^{(j,s)}}{\partial\zeta} + A_{22}^{(j)}\frac{\partial U_i^{(j,s-1)}}{\partial\xi} - A_{12}^{(j)}\frac{\partial V_i^{(j,s-1)}}{\partial\eta},$$
$$\sigma_{yy,i}^{(j,s)} = -A_{13}^{(j)}\frac{\partial W_i^{(j,s)}}{\partial\zeta} - A_{12}^{(j)}\frac{\partial U_i^{(j,s-1)}}{\partial\xi} + A_{33}^{(j)}\frac{\partial V_i^{(j,s-1)}}{\partial\eta},$$
$$\sigma_{zz,i}^{(j,s)} = A_{11}^{(j)}\frac{\partial W_i^{(j,s)}}{\partial\zeta} - A_{23}^{(j)}\frac{\partial U_i^{(j,s-1)}}{\partial\xi} - A_{13}^{(j)}\frac{\partial V_i^{j,(s-1)}}{\partial\eta}, \tag{2.5}$$
$$\sigma_{xy,i}^{(j,s)} = \frac{1}{a_{66}^{(j)}}\left[\frac{\partial U_i^{(j,s-1)}}{\partial\eta} + \frac{\partial V_i^{(j,s-1)}}{\partial\xi}\right], \sigma_{xz,i}^{(j,s)} = \frac{1}{a_{55}^{(j)}}\left[\frac{\partial U_i^{(j,s)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial W_i^{(j,s-1)}}{\partial\xi}\right],$$
$$\sigma_{yz,i}^{(j,s)} = \frac{1}{a_{44}^{(j)}}\left[\frac{\partial V_i^{(j,s)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial W_i^{(j,s-1)}}{\partial\eta}\right],\quad j = I, II; i = 1,2,$$

где

$$A_{11}^{(j)} = \frac{a_{11}^{(j)}a_{22}^{(j)} - a_{12}^{(j)2}}{\Delta^{(j)}},\quad A_{22}^{(j)} = \frac{a_{22}^{(j)}a_{33}^{(j)} - a_{23}^{(j)2}}{\Delta^{(j)}},\ A_{33}^{(j)} = \frac{a_{11}^{(j)}a_{33}^{(j)} - a_{13}^{(j)2}}{\Delta^{(j)}},$$
$$A_{12}^{(j)} = \frac{a_{23}^{(j)}a_{13}^{(j)} - a_{12}^{(j)}a_{33}^{(j)}}{\Delta^{(j)}},\ A_{13}^{(j)} = \frac{a_{11}^{(j)}a_{23}^{(j)} - a_{12}^{(j)}a_{13}^{(j)}}{\Delta^{(j)}},\ A_{23}^{(j)} = \frac{a_{22}^{(j)}a_{13}^{(j)} - a_{12}^{(j)}a_{23}^{(j)}}{\Delta^{(j)}},$$
$$\Delta^{(j)} = a_{11}^{(j)}a_{22}^{(j)}a_{33}^{(j)} + 2a_{12}^{(j)}a_{13}^{(j)}a_{23}^{(j)} - a_{22}^{(j)}a_{13}^{(j)\,2} - a_{11}^{(j)}a_{23}^{(j)\,2} - a_{33}^{(j)}a_{12}^{(j)\,2}.$$

Для определения функций $U_i^{(j,s)}, V_i^{(j,s)}, W_i^{(j,s)}, (j = I, II;\ i = 1,2)$ получаются уравнения:

$$\frac{\partial^2 U_1^{(I,s)}}{\partial\zeta^2} + a_{55}^{\mathrm{I}}\left(\rho^{\mathrm{I}}(\Omega_*)^2 U_1^{(I,s)} + 2K_1\Omega_* U_2^{(I,s)}\right) = R_{U1}^{(I,s)},$$

$$\frac{\partial^2 U_2^{(I,s)}}{\partial\zeta^2} + a_{55}^{\mathrm{I}}\left(\rho^{\mathrm{I}}(\Omega_*)^2 U_2^{(I,s)} - 2K_1\Omega_* U_1^{(I,s)}\right) = R_{U2}^{(I,s)},$$

$$\frac{\partial^2 U_i^{(II,s)}}{\partial\zeta^2} + a_{55}^{\mathrm{II}}\rho^{\mathrm{II}}(\Omega_*)^2 U_i^{(II,s)} = R_{Ui}^{(I,s)},\ \ (U,V,W;a_{55},a_{44},1/A_{11}),\ i=1,2. \qquad (2.6)$$

где

$$R_{Ui}^{(j,s)} = -\frac{\partial^2 W_i^{(j,s-1)}}{\partial\xi\partial\zeta} - a_{55}^{(j)}\left[\frac{\partial\sigma_{xx,i}^{(j,s-1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{xy,i}^{(j,s-1)}}{\partial\eta}\right], \qquad i=1,2$$

$$R_{Vi}^{(j,s)} = -\frac{\partial^2 W_j^{(s-1)}}{\partial\eta\partial\zeta} - a_{44}^{(j)}\left[\frac{\partial\sigma_{xy,i}^{(j,s-1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{yy,i}^{(j,s-1)}}{\partial\eta}\right], \qquad (2.7)$$

$$R_{Wj}^{(s)} = \frac{1}{A_{11}^{(j)}}\left(A_{23}^{(j)}\frac{\partial^2 U_i^{(j,s-1)}}{\partial\xi\partial\zeta} + A_{13}^{(j)}\frac{\partial^2 V_i^{(j,s-1)}}{\partial\eta\partial\zeta} - \frac{\partial\sigma_{xz,i}^{(j,s-1)}}{\partial\xi} - \frac{\partial\sigma_{yz,i}^{(j,s-1)}}{\partial\eta}\right).$$

Очевидно, что $R_{Ui}^{(j,0)} = R_{Vi}^{(j,0)} = R_{Wi}^{(j,0)} = 0$; $(j = I, II; i = 1,2)$.

Из (2.6) следует

$$U_2^{(I,s)} = -\frac{1}{2K_1\Omega_* a_{55}^{\mathrm{I}}}\left(\frac{\partial^2 U_1^{(I,s)}}{\partial\zeta^2} + a_{55}^{\mathrm{I}}\rho^{\mathrm{I}}(\Omega_*)^2 U_1^{(I,s)} - R_{U1}^{(I,s)}\right),$$

$$(U,V;\ a_{55}^{\mathrm{I}}, a_{44}^{\mathrm{I}})$$

$$W_2^{(I,s)} = -\frac{1}{2K_1\Omega_*}\left(A_{11}^{\mathrm{I}}\frac{\partial^2 W_1^{(I,s)}}{\partial\zeta^2} + \rho^{\mathrm{I}}(\Omega_*)^2 W_1^{(I,s)} - R_{W1}^{(I,s)}\right), \qquad (2.8)$$

а также

$$\frac{\partial^4 U_1^{(I,s)}}{\partial\zeta^4} + 2a_{55}^{\mathrm{I}}\rho^{\mathrm{I}}(\Omega_*)^2\frac{\partial^2 U_1^{(I,s)}}{\partial\zeta^2} + {a_{55}^{\mathrm{I}}}^2\left({\rho^{(\mathrm{I})}}^2(\Omega_*)^2 + 4K_1^2\right)(\Omega_*)^2 U_1^{(I,s)}$$
$$= \frac{\partial^2 R_{\mathrm{U}1}^{(I,s)}}{\partial\zeta^2} + a_{55}^{\mathrm{I}}\rho^{\mathrm{I}}(\Omega_*)^2 R_{\mathrm{U}1}^{(I,s)}$$
$$- 2K_1 a_{55}^{\mathrm{I}}\Omega_* R_{\mathrm{U}2}^{(I,s)}, \quad (U,V;\ a_{55}^{\mathrm{I}}, a_{44}^{\mathrm{I}})$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial^4 W_1^{(I,s)}}{\partial\zeta^4} + \frac{2\rho^{\mathrm{I}}(\Omega_*)^2}{A_{11}^{I}}\frac{\partial^2 W_1^{(I,s)}}{\partial\zeta^2} + \frac{1}{{A_{11}^{(I)}}^2}\left({\rho^{(\mathrm{I})}}^2(\Omega_*)^2 + 4K_1^2\right)(\Omega_*)^2 W_1^{(I,s)} =}$$
$$\boldsymbol{\frac{1}{A_{11}^{I}}\frac{\partial^2 R_{W1}^{(I,s)}}{\partial\zeta^2} + \frac{\rho^{\mathrm{I}}(\Omega_*)^2}{{A_{11}^{(I)}}^2}R_{W1}^{(I,s)} - \frac{2K_1\Omega_*}{{A_{11}^{(I)}}^2}R_{W2}^{(I,s)}}. \qquad (2.9)$$

Решениями уравнений (2.9) являются:

$$U_1^{(j,s)} = U_{1\mathrm{o}}^{(j,s)}(\xi,\eta,\zeta) + U_{1\text{ч}}^{(j,s)}(\xi,\eta,\zeta) \quad (U,V,W), \qquad (2.10)$$

где величины с индексом “о” – решения однородных, а с индексом “ч” – частных неоднородных уравнений (2.9).

Решениями однородных уравнений являются:

$$U_{1\mathrm{o}}^{(I,s)}(\xi,\eta,\zeta) = C_{U1}^{(I,s)}(\xi,\eta)\varphi_{1U}^{(I)} + C_{U2}^{(I,s)}(\xi,\eta)\varphi_{2U}^{(I)} + C_{U3}^{(I,s)}(\xi,\eta)\varphi_{3U}^{(I)}$$

$$+C_{U4}^{(I,s)}(\xi,\eta)\varphi_{4U}^{(I)}, \qquad (U,V,W),$$

$$U_{1o}^{(II,s)}(\xi,\eta,\zeta) = C_{U11}^{(II,s)}\sin\Omega_*\sqrt{a_{55}^{\mathrm{II}}\rho^{\mathrm{II}}}\zeta + C_{U21}^{(II,s)}\cos\Omega_*\sqrt{a_{55}^{\mathrm{II}}\rho^{\mathrm{II}}}\zeta, \qquad (2.11)$$

где

$$\varphi_{1U}^{(I)} = ch\,\gamma_U^I\zeta\cos\delta_U^I\zeta\,, \varphi_{2U}^{(I)} = sh\gamma_U^I\zeta\sin\delta_U^I\zeta$$

$$\varphi_{3U}^{(I)} = ch\,\gamma_U^I\zeta\ \sin\delta_U^I\zeta\,, \qquad \varphi_{4U}^{(I)} = sh\,\gamma_U^I\zeta\cos\delta_U^I\zeta$$

$$\gamma_U^I = \sqrt{\frac{a_{55}^I\Omega_*}{2}\left(\sqrt{\rho^{\mathrm{I}\,2}(\Omega_*)^2 + 4K_1^2} - \rho^{\mathrm{I}}\Omega_*\right)},$$

$$\delta_U^j = \sqrt{\frac{a_{55}^{\mathrm{I}}\Omega_*}{2}\left(\sqrt{\rho^{\mathrm{I}\,2}(\Omega_*)^2 + 4K_1^2} + \rho^{\mathrm{I}}\Omega_*\right)}$$

$$(U,V,W;a_{55},a_{44},1/A_{11}).$$

Одновременно имеем

$$U_2^{(j,s)} = U_{2o}^{(j,s)}(\xi,\eta,\zeta) + U_{2ч}^{(j,s)}(\xi,\eta,\zeta) \qquad (U,V,W),$$

$$U_{2o}^{(I,s)}(\xi,\eta,\zeta) = -C_{U1}^{(I,s)}(\xi,\eta)\varphi_{2U}^{(I)} + C_{U2}^{(I,s)}(\xi,\eta)\varphi_{1U}^{(I)} + C_{U3}^{(I,s)}(\xi,\eta)\varphi_{4U}^{(I)} - C_{U4}^{(I,s)}(\xi,\eta)\varphi_{3U}^{(I)},$$

$$U_{2o}^{(II,s)}(\xi,\eta,\zeta) = C_{U12}^{(II,s)}\sin\Omega_*\sqrt{a_{55}^{\mathrm{II}}\rho^{\mathrm{II}}}\zeta + C_{U22}^{(II,s)}\cos\Omega_*\sqrt{a_{55}^{\mathrm{II}}\rho^{\mathrm{II}}}\zeta, \qquad (2.12)$$

$$\sigma_{xz,1}^{(I,s)} = \frac{1}{a_{55}^{\mathrm{I}}}[C_{U1}^{(I,s)}\left(\gamma_U^I\varphi_{4U}^{(I)} - \delta_U^I\varphi_{3U}^{(I)}\right) + C_{U2}^{(I,s)}\left(\gamma_U^I\varphi_{3U}^{(I)} + \delta_U^I\varphi_{4U}^{(I)}\right) +$$

$$+C_{U3}^{(I,s)}\left(\gamma_U^I\varphi_{2U}^{(I)} + \delta_U^I\varphi_{1U}^{(I)}\right) + C_{U4}^{(I,s)}\left(\gamma_U^I\varphi_{1U}^{(I)} - \delta_U^I\varphi_{2U}^{(I)}\right)] + \sigma_{xz,1ч}^{(I,s)}(\xi,\eta,\zeta)$$

$$\sigma_{xz,2}^{(I,s)} = \frac{1}{a_{55}^{\mathrm{I}}}[-C_{U1}^{(I,s)}\left(\gamma_U^I\varphi_{3U}^{(I)} + \delta_U^I\varphi_{4U}^{(I)}\right) + C_{U2}^{(I,s)}\left(\gamma_U^I\varphi_{4U}^{(I)} - \delta_U^I\varphi_{3U}^{(I)}\right) +$$

$$C_{U3}^{(I,s)}\left(\gamma_U^I\varphi_{1U}^{(I)} - \delta_U^I\varphi_{2U}^{(I)}\right) - C_{U4}^{(I,s)}\left(\gamma_U^I\varphi_{2U}^{(I)} + \delta_U^I\varphi_{1U}^{(I)}\right)] + \sigma_{xz,2\,ч}^{(I,s)}(\xi,\eta,\zeta),$$

$$\sigma_{xz,1}^{(II,s)} = \sqrt{\frac{\rho^{\mathrm{II}}}{a_{55}^{\mathrm{II}}}}\Omega_* C_{U11}^{(II,s)}\cos\Omega_*\sqrt{a_{55}^{\mathrm{II}}\rho^{\mathrm{II}}}\zeta - \sqrt{\frac{\rho^{\mathrm{II}}}{a_{55}^{\mathrm{II}}}}\Omega_* C_{U21}^{(II,s)}\sin\Omega_*\sqrt{a_{55}^{\mathrm{II}}\rho^{\mathrm{II}}}\zeta$$

$$+\sigma_{xz,1ч}^{(II,s)}(\xi,\eta,\zeta), \quad (xz,1 \to xz,2; \mathrm{U11} \to \mathrm{U12}; \mathrm{U21} \to \mathrm{U22}; xz,1ч \to xz,2ч)$$

$$\sigma_{xz,iч}^{(j,s)} = \frac{1}{a_{55}^{(j)}}\left[\frac{\partial U_{iч}^{(j,s)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial W_i^{(j,s-1)}}{\partial\xi}\right],$$

$$U_{2ч}^{(I,s)}(\xi,\eta,\zeta) = -\frac{1}{2K_1\Omega_* a_{55}^{\mathrm{I}}}\left(\frac{\partial^2 U_{1ч}^{(I,s)}}{\partial\zeta^2} + a_{55}^{\mathrm{I}}\rho^{\mathrm{I}}(\Omega_*)^2 U_{1ч}^{(I,s)} - R_{U1}^{(I,s)}\right),$$

$$(x,y;U,V;a_{55},a_{44})$$

$$W_{2ч}^{(I,s)}(\xi,\eta,\zeta) = -\frac{1}{2K_j\Omega_*}\left(A_{11}^{(I)}\frac{\partial^2 W_{1ч}^{(I,s)}}{\partial\zeta^2} + \rho^{(I)}(\Omega_*)^2 W_{1ч}^{(I,s)} - R_{W1}^{(I,s)}\right),$$

$$\sigma_{zz,iч}^{(I,s)} = -A_{11}^{(I)}\frac{\partial W_{iч}^{(I,s)}}{\partial\zeta} - A_{23}^{(I)}\frac{\partial U_i^{(I,s-1)}}{\partial\xi} - A_{13}^{(I)}\frac{\partial V_i^{(I,s-1)}}{\partial\eta}; \quad i = 1,2.$$

Удовлетворив граничным условиям (1.3) - (1.5), получим алгебраические системы относительно неизвестных функций

$$C_{U1}^{(j,s)}, C_{U2}^{(j,s)}, C_{U3}^{(j,s)}, C_{U4}^{(j,s)} \ (U,V,W;\ j = I,II).$$

Системы будут иметь конечные решения, если определители этих систем

$$\Delta_U = \cos(2\delta_U^I\zeta_1) + ch(2\,\gamma_U^I\zeta_1), \tag{2.13}$$
$$\zeta_1 = \frac{\mathrm{h}_1}{\mathrm{h}}, (U,V,W)$$

отличны от нуля: $\Delta_U \neq 0, (U,V,W)$. Учитывая структуру уравнений (2.13), заметим, что они не имеют действительных решений.

После решения этих систем получим значения функций $C_{U1}^{(I,s)}(\xi,\eta)$, $C_{U2}^{(I,s)}(\xi,\eta)$, $C_{U3}^{(I,s)}(\xi,\eta), C_{U4}^{(I,s)}(\xi,\eta)$, (U,V,W) для компонент вектора перемещения первого слоя:

$$C_{U1}^{(I,s)}(\xi,\eta) = \frac{B_{11}^{(I)}\varphi_{1U}^{(I)}(\zeta_1) - B_{12}^{(I)}\varphi_{2U}^{(I)}(\zeta_1)}{\Delta_U},$$
$$C_{U2}^{(I,s)}(\xi,\eta) = \frac{B_{12}^{(I)}\varphi_{1U}^{(I)}(\zeta_1) + B_{11}^{(I)}\varphi_{2U}^{(I)}(\zeta_1)}{\Delta_U}$$
$$C_{U3}^{(I,s)}(\xi,\eta) = -\frac{\gamma_U^I\sigma_{xz,1ч}^{(I,s)}(0) + \delta_U^I\sigma_{xz,2ч}^{(I,s)}(0)}{\Omega_*\sqrt{\rho^{\mathrm{I}\,2}(\Omega_*)^2 + 4K_1^2}},$$
$$C_{U4}^{(I,s)}(\xi,\eta) = \frac{\delta_U^I\sigma_{xz,1ч}^{(I,s)}(0) - \gamma_U^I\sigma_{xz,2ч}^{(I,s)}(0)}{\Omega_*\sqrt{\rho^{\mathrm{I}\,2}(\Omega_*)^2 + 4K_1^2}}$$
$$B_{11}^{(I)} = U^{+(s)} - U_{1ч}^{(I,s)}(\zeta_1) - C_{U3}^{(I,s)}(\xi,\eta)\varphi_{3U}^{(I)}(\zeta_1) - C_{U4}^{(I,s)}(\xi,\eta)\varphi_{4U}^{(I)}(\zeta_1) \tag{2.14}$$
$$B_{12}^{(I)} = -U_{2ч}^{(I,s)}(\zeta_1) + C_{U4}^{(I,s)}(\xi,\eta)\varphi_{3U}^{(I)}(\zeta_1) - C_{U3}^{(I,s)}(\xi,\eta)\varphi_{4U}^{(I)}(\zeta_1)$$
$$U^{+(0)} = U^+, \qquad U^{+(s)} = 0, \text{если } s \neq 0, \ \ (U,V,W)$$

и значения компонент вектора перемещения для второго слоя:

$$U_i^{(II,s)}(\xi,\eta,\zeta) = \left(\sigma_{xz,i}^{(I,s)}(\zeta_1) - \sigma_{xz,iч}^{(II,s)}(\zeta_1)\right)\sin\Omega_*\sqrt{a_{55}^{\mathrm{II}}\rho^{\mathrm{II}}}(\zeta - \zeta_1) +$$
$$\left(U^{+(s)} - U_{iч}^{(II,s)}(\zeta_1)\right)\cos\Omega_*\sqrt{a_{55}^{\mathrm{II}}\rho^{\mathrm{II}}}(\zeta - \zeta_1) + U_{iч}^{(II,s)}(\zeta), \tag{2.15}$$
$$(x,y,z;\ a_{55}, a_{44}, 1/A_{11};U,V,W), \ \ i = 1,2$$

3. Заключение. Условиями возникновения резонанса рассматриваемого пакета являются уравнения $\Delta_U = 0\ (U, V, W)$. Проанализировав эти уравнения, приходим к выводу, что при наличии вязкого сопротивления в верхнем слое двухслойного ортотропного пакета данные уравнения не имеют действительных корней, вследствие чего амплитуды колебаний пакета остаются конечными.

Заметим, что в условия резонанса входят параметры только первого слоя, а на напряженно-деформированное состояние пакета влияют параметры всех слоев.

Таким образом, наличие вязкого сопротивления в верхнем слое рассматриваемых слоистых пакетов из ортотропных пластин приводит к тому, что внешнее воздействие может привести лишь к резонансу с конечными амплитудами колебаний.

Проводя мониторинг по данным измерительных приборов и следя за изменением напряженно-деформированного состояния пакета во времени, можно определить моменты, когда будет нарушена прочность контактной поверхности между некоторыми слоями пластинки, в результате чего произойдет разрыв и контакт будет неполный.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № 22AA-2C008.

Армянский государственный педагогический
университет им. Х. Абовяна
e-mail: hambardzumyanparandzem@mail.ru

П. Р. Амбарцумян

Вынужденные колебания двухслойной пластинки при наличии данных о перемещении точек поверхности контакта

Рассмотрены вынужденные колебания двухслойной ортотропной пластинки при наличии вязкого сопротивления в верхнем слое оболочки. Верхняя лицевая поверхность пластинки свободна, а значения компонент вектора перемещения сняты с поверхности контакта между слоями как данные измерительных приборов. Определены амплитуды колебаний и выведены условия возникновения резонанса. Асимптотическим методом получено решение соответствующих динамических уравнений и соотношений трехмерной задачи теории упругости.

Փ. Ռ. Համբարձումյան

Երկշերտ սալի ստիպողական տատանումները կոնտակտի մակերևույթի կետերի տեղափոխությունների տվյալների առկայության դեպքում

Դիտարկված են երկշերտ օրթոտրոպ սալի ստիպողական տատանումները վերին շերտում մածուցիկ դիմադրության առկայության դեպքում: Սալի վերին դիմային մակերևույթն ազատ է, իսկ տեղափոխության վեկտորի բաղադրիչների արժեքները

վերցված են շերտերի կոնտակտի մակերևույթից՝ որպես չափիչ սարքերից ստացված տվյալներ: Դուրս են բերված ռեզոնանսի առաջացման պայմանները, և արտածված են տատանման ամպլիտուդները: Ասիմպտոտիկ մեթոդի կիրառմամբ ստացված են առաձգականության տեսության եռաչափ խնդրի համապատասխան դինամիկ հավասարումների և առնչությունների լուծումները:

P. R. Hambardzumyan

Forced Vibrations of a Double-Layer Plate in the Presence of Data about the Movement of Contact Surface Points

Forced vibrations of a two-layered orthotropic plate in the presence of viscous resistance in the upper shell layer are considered. The upper front surface of the plate is free, and the values of the displacement vector components are taken from the contact surface between the layers, as data from measuring instruments. The amplitudes of vibrations are determined and the conditions for the occurrence of resonance are derived. Using the asymptotic method, a solution to the corresponding dynamic equations and relations of the three-dimensional problem of elasticity theory is obtained.

Литература

1. *Пановко Я. Г.* Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М. Физматгиз. 1960. 196 с.
2. *Григолюк Э. И., Коган Е. А.* В кн.: Механика оболочек и пластин в XXI веке. Межвуз. науч. сб. Саратовский гос. техн. ун-т.1999. С. 3-30.
3. *Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Панкратова Н. Д.* Задачи теории упругости неоднородных тел. Киев. Наукова думка. 1991. 216 с.
4. *Болотин В. В., Новичков Ю. Н.* Механика многослойных конструкций. М. Машиностроение. 1980. 375 с.
5. *Reddy J. N.* Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis. CRC Press. Boca Raton, FL, Second Edition. 2004. P. 831.
6. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М. Наука. 1976. 512 с.
7. *Aghalovyan L. A.* Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells. Singapore, London. World Scientific. 2015. 376 p.
8. *Агаловян Л. А.* – Механика композитных материалов. 2011. Т. 47. № 1. С. 85–102.
9. *Агаловян Л. А., Тагворян В. В.* Об одной задаче сейсмологии для слоистых пластин. Проблемы механики деформируемого твёрдого тела. Ереван. Гитутюн. 2017. С. 24-35.
10. *Гулгазарян Л. Г., Амбарцумян П. Р.* – Доклады НАН РА. 2020. Т. 120. № 3. С. 181-190.
11. *Aghalovyan L. A., Ghulghazaryan L. G., Kaplunov J. D. et al.* – J. Math. Sciences. 2023. V. 273. P. 999-1015. https://doi.org/10.1007/s10958-023-06560-5