ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 123 2023 № 3-4

МЕХАНИКА

УДК 612.38
DOI: 10.54503/0321-1339-2023.123.3-4-21

А. А. Гукасян

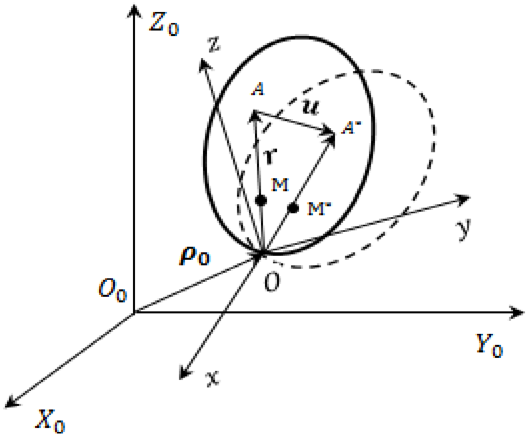
Некоторые вопросы кинематики движения деформированного твердого тела по аналогии с кинематикой абсолютно твердого тела

(Представлено академиком Л. А. Агаловяном 28/VI 2023)

Ключевые слова: *деформированное твердое тело, кинематика движения, абсолютное твердое тело, методы теоретической механики, упругие перемещения, матрица преобразования.*

1. **Введение**. Рассматривается движение свободного деформированного твердого тела, которое в начальном состоянии занимает некоторую область Q^1 в трехмерном евклидовом пространстве (рис. 1). Тело движется относительно основной (неподвижной) системы координат $O_oX_oY_oZ_o$. Введена также подвижная система координат $Oxyz$, неизменно связанная с телом в произвольной точке O. Предполагается, что во время движения тело меняет свои размеры и форму, т.е. деформируется, и при этом каждая точка тела Q^1 перемещается в некоторую точку области Q^2.

Для рассматриваемого тела распространяется гипотеза сплошности. При деформации вектор перемещения точек тела считается непрерывной и дифференцируемой функцией от координат точки и времени. В рамках исследования принимается, что тело (сплошная среда) является также однородным [1, 2]. Отметим, что переход тела из начального состояния Q^1 в новое состояние Q^2 возможен также вследствие перемещения тела как абсолютно твердого, т.е. без изменения расстояния между любыми двумя его точками. Такое перемещение тела называется жестким смещением. В данном случае переход тела в новое состояние характеризуется изменением расстояний между точками тела (изменением геометрических размеров тела) и называется деформированным состоянием тела.



Фиг. 1.

Целью настоящего исследования является изучение кинематики движения деформированного тела по аналогии с исследованием кинематики абсолютно твердого тела методами теоретической механики.

1. Относительное положение точек упругого тела. Обозначим положение произвольной точки A первоначального упругого тела Q^1 относительно точки O_0 неподвижной системы координат $O_0X_0Y_0Z_0$ радиус-вектором $\boldsymbol{\rho}_A$

$$\boldsymbol{\rho}_A = \boldsymbol{\rho}_0 + \mathbf{r}\,; \boldsymbol{\rho}_A = \left(X_A, \quad Y_A, \quad Z_A\right)^T, \ \boldsymbol{\rho}_0 = \left(X_0, \ Y_0, \ Z_0\right)^T, \ \mathbf{r} = \left(x, \quad y, \quad z\right)^T \quad (1.1)$$

где $\boldsymbol{\rho}_0 -$ радиус-вектор точки O (полюса) относительно системы координат $O_0X_0Y_0Z_0$, $\mathbf{r}$ – радиус-вектор произвольной точки $A \in Q^1$ относительно начала системы координат $Oxyz$, символ ^{T} означает транспонирование.

Каждая точка $A(x, y, z) \in Q^1$ тела во время деформации получает вектор перемещения $\mathbf{u}$ и перемещается в некоторую точку A^* области Q^2

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \left(u_1(x, y, z, t), \quad u_2(x, y, z, t), \quad u_3(x, y, z, t)\right)^T. \qquad (1.2)$$

Радиус-вектор произвольной точки после деформации в системе $Oxyz$ определяется радиус-вектором $\mathbf{r}^*$ относительно точки O :

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r} + \mathbf{u}(x, y, z, t). \qquad (1.3)$$

Предполагается, что соотношения (1.3) можно решить относительно x, y, z, которые будут функциями от координат точки $A^*\left(x^*, y^*, z^*\right) \in Q^2$. Тогда вместо (1.3) будем иметь

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^* - \mathbf{u}\left(x^*, y^*, z^*, t\right) \qquad (1.4)$$

или $x = x^* - u_1\left(x^*, y^*, z^*, t\right), y = y^* - u_2\left(x^*, y^*, z^*, t\right), z = z^* - u_3\left(x^*, y^*, z^*, t\right)$.

Способ описания перемещений функциями (1.3) называется лагранжевым. Уравнения (1.3), (1.4) устанавливают взаимно-однозначное соответствие между координатами x, y, z и x^*, y^*, z^*. Параметры x^*, y^*, z^* в дальнейшем можно использовать в качестве криволинейных координат [1, 2]. Предполагается также, что перемещения точек тела малы по сравнению с линейными размерами тела $\left(u_i \sim \varepsilon, \varepsilon \ll 1, i = 1,2,3\right)$. Это означает, что существует возможность линеаризации уравнений, определяющих геометрические свойства деформированного тела.

Из (1.1) - (1.3) следует, что радиус-вектор абсолютного положения точек упругого тела относительно системы координат $O_0X_0Y_0Z_0$ определяется радиус-вектором $\boldsymbol{\rho}_{A^*} = \boldsymbol{\rho}_\mathbf{0} + \mathbf{r} + \mathbf{u}$.

Представим $\boldsymbol{\rho}_{A^*}$ в координатном виде

$$\begin{aligned} X_{A^*}\mathbf{i}_0 + Y_{A^*}\mathbf{j}_0 + Z_{A^*}\mathbf{k}_0 &= X_0\mathbf{i}_0 + Y_0\mathbf{j}_0 + Z_0\mathbf{k}_0 + \left(x + u_1\left(x, y, z, t\right)\right)\mathbf{i} + \\ &+ \left(y + u_2\left(x, y, z, t\right)\right)\mathbf{j} + \left(z + u_3\left(x, y, z, t\right)\right)\mathbf{k}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Здесь $\left(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\right)$ – единичные векторы осей подвижной системы координат $Oxyz$, а $\left(\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0\right)$ – единичные векторы системы координат $O_0X_0Y_0Z_0$.

Умножая скалярно (1.5) последовательно на единичные векторы $\left(\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0\right)$ и учитывая свойства единичных векторов ортогональных пространственных систем, получим радиус-вектор точки $A^* \in Q^2$ относительно неподвижной системы координат $O_0X_0Y_0Z_0$ [3]

$$\boldsymbol{\rho}_{A^*} = \boldsymbol{\rho}_0 + \boldsymbol{\Gamma}\left(\mathbf{r} + \mathbf{u}\right), \quad \boldsymbol{\Gamma} = \left\{\alpha_{ij}\right\}_{i,j=1}^{3,3}. \tag{1.6}$$

Элементы $\left\{\alpha_{ij}\right\}_{i,j=1}^{3,3}$ матрицы $\boldsymbol{\Gamma}$ являются направляющими косинусами осей систем координат $Oxyz$ и $O_0X_0Y_0Z_0$ и зависят от времени. В случае абсолютно твердого тела $\left(u_i\left(x, y, z, t\right) \equiv 0, i = 1,2,3\right)$ имеем $\boldsymbol{\rho}_A = \boldsymbol{\rho}_0 + \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{r}$.

Аналогично, умножая (1.5) последовательно на единичные векторы $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, получим проекции точки $A^* \in Q^2$ в системе $Oxyz$ $\mathbf{r} = \boldsymbol{\Gamma}^T\left(\boldsymbol{\rho}_{A^*} - \boldsymbol{\rho}_0\right) - \mathbf{u}\left(x, y, z, t\right)$.

Поскольку компоненты вектора упругих перемещений являются малыми величинами $\left(u_i \sim \varepsilon, \varepsilon \ll 1, i = 1,2,3\right)$, то из (1.6) следует, что изменения координат точек тела относительно подвижной и неподвижной систем координат при деформации имеют порядок $\varepsilon\left(\alpha_{ij} \sim 1, i, j = 1,2,3\right)$.

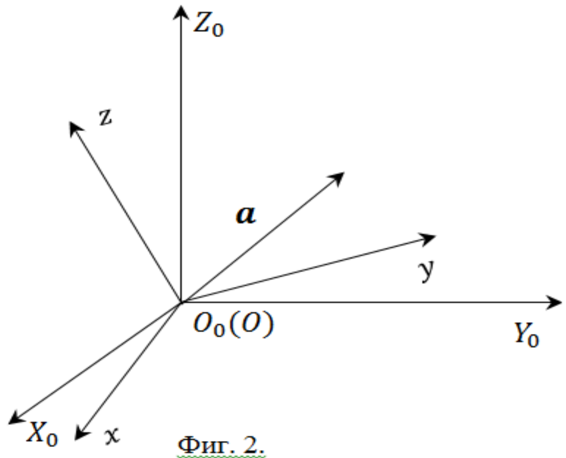
1.1. Свойства направляющих косинусов и матрицы преобразования. Следуя работам [4-7], определим некоторые свойства матрицы Γ. Обозначим проекции вектора **a** в системе координат $O_0X_0Y_0Z_0$ через $\left(a_{X_0}, a_{Y_0}, a_{Z_0}\right)$, а в системе $Oxyz$ – через $\left(a_x, a_y, a_z\right)$ (рис. 2). Таким образом, для вектора **a** справедливо выражение

$$\mathbf{a} = a_{X_0}\mathbf{i}_0 + a_{Y_0}\mathbf{j}_0 + a_{Z_0}\mathbf{k}_0, \mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}\,. \tag{1.7}$$

Умножая (1.7) последовательно на единичные векторы, получим

$$\begin{array}{lcl} a_{X_0} = a_x\alpha_{11} + a_y\alpha_{12} + a_z\alpha_{13}, & & a_x = a_{X_0}\alpha_{11} + a_{Y_0}\alpha_{21} + a_{Z_0}\alpha_{31}. \\ a_{Y_0} = a_x\alpha_{21} + a_y\alpha_{22} + a_z\alpha_{23}, & \text{и} & a_y = a_{X_0}\alpha_{12} + a_{Y_0}\alpha_{22} + a_{Z_0}\alpha_{32}. \\ a_{Z_0} = a_x\alpha_{31} + a_y\alpha_{32} + a_z\alpha_{33}, & & a_z = a_{X_0}\alpha_{13} + a_{Y_0}\alpha_{23} + a_{Z_0}\alpha_{33}. \end{array} \tag{1.8}$$

Соотношения (1.7) и (1.8) справедливы также для единичных векторов.



Фиг. 2.

Коэффициенты разложения в (1.8) для единичных векторов $\left(\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0\right)$ имеют следующие значения:

$$\begin{array}{l} \mathbf{i}_0 : a_{X_0} = 1, a_{Y_0} = 0, a_{Z_0} = 0; a_x = \alpha_{11}, a_y = \alpha_{12}, a_z = \alpha_{13}, \\ \mathbf{j}_0 : a_{X_0} = 0, a_{Y_0} = 1, a_{Z_0} = 0; a_x = \alpha_{21}, a_y = \alpha_{22}, a_z = \alpha_{23}, \\ \mathbf{k}_0 : a_{X_0} = 0, a_{Y_0} = 0, a_{Z_0} = 1; a_x = \alpha_{31}, a_y = \alpha_{32}, a_z = \alpha_{33}. \end{array} \tag{1.9}$$

Следовательно, имеем

$$\begin{array}{lcl} \alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2 = 1, & & \alpha_{11}\alpha_{21} + \alpha_{12}\alpha_{22} + \alpha_{13}\alpha_{23} = 0, \\ \alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{23}^2 = 1, & \text{и} & \alpha_{11}\alpha_{31} + \alpha_{12}\alpha_{32} + \alpha_{13}\alpha_{33} = 0, \\ \alpha_{31}^2 + \alpha_{32}^2 + \alpha_{33}^2 = 1, & & \alpha_{21}\alpha_{31} + \alpha_{22}\alpha_{32} + \alpha_{23}\alpha_{33} = 0. \end{array} \tag{1.10}$$

Аналогичным образом получим для системы $Oxyz$.

Соотношения (1.7) - (1.9) позволяют также определить зависимость каждого из косинусов $\{\alpha_{ij}\}_{i,j=1}^{3,3}$ от остальных. Примем во внимание, что

$$\mathbf{i}_0=\mathbf{j}_0\times\mathbf{k}_0,\mathbf{j}_0=\mathbf{k}_0\times\mathbf{i}_0,\mathbf{k}_0=\mathbf{i}_0\times\mathbf{j}_0\ . \tag{1.11}$$

Из (1.9) и (1.11), имеем

$$\mathbf{i}_0=\mathbf{j}_0\times\mathbf{k}_0:\ \alpha_{11}\mathbf{i}+\alpha_{12}\mathbf{j}+\alpha_{13}\mathbf{k}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{vmatrix}, \tag{1.12}$$

$$\alpha_{11}=\alpha_{22}\alpha_{33}-\alpha_{32}\alpha_{32},\alpha_{12}=\alpha_{23}\alpha_{31}-\alpha_{33}\alpha_{21},\alpha_{13}=\alpha_{21}\alpha_{32}-\alpha_{31}\alpha_{22}\,. \tag{1.13}$$

Аналогичные выражения можно получить для коэффициентов единичных векторов $\mathbf{j}_0,\mathbf{k}_0$ и для коэффициентов разложения $(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$. Следовательно,

$$\det\mathbf{\Gamma}=\det\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{pmatrix}=\alpha_{11}\begin{vmatrix}\alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{vmatrix}+\alpha_{12}\begin{vmatrix}\alpha_{23} & \alpha_{21}\\ \alpha_{33} & \alpha_{31}\end{vmatrix}+\alpha_{13}\begin{vmatrix}\alpha_{21} & \alpha_{22}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32}\end{vmatrix}=\alpha_{11}^2+\alpha_{12}^2+\alpha_{13}^2=1$$

Итак, $\mathbf{\Gamma}^T=\mathbf{\Gamma}^{-1};\mathbf{\Gamma}\times\mathbf{\Gamma}^T=\mathbf{\Gamma}^T\times\mathbf{\Gamma}=\mathbf{E}.$

Для абсолютно твердого тела выражения (1.10) показывают, что независимых параметров свободного твердого тела имеется всего шесть. В качестве шести величин обычно рассматриваются три координаты полюса и три угла, носящие название углов Эйлера [4-6]. Определим производную от матрицы преобразования $\mathbf{\Gamma}$. Известно, что если вектор $\mathbf{a}(t)$ в произвольной системе координат меняется как по модулю, так и по направлению (рис. 2), то полная или абсолютная производная такого вектора определяется по формуле [4-6]

$$\frac{d}{dt}\mathbf{a}(t)=\frac{\tilde{d}}{dt}\mathbf{a}(t)+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{a}(t)\cdot \tag{1.14}$$

Здесь $\frac{d}{dt}\mathbf{a}(t)$ характеризует изменения вектора $\mathbf{a}(t)$ в неподвижной системе координат и называется абсолютной производной. Слагаемое $\frac{\tilde{d}}{dt}\mathbf{a}(t)$ представляет изменения вектора $\mathbf{a}(t)$ в подвижной системе и называется относительным или локальным, $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{a}(t)$ определяет движение подвижной системы по отношению к неподвижной с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ и является переносным составляющим.

Если вектор $\mathbf{a}(t)$ в системе $Oxyz$ имеет вид $\mathbf{a}(t)=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}$, то

$$\frac{\tilde{d}}{dt}\mathbf{a}(t)=\left(\frac{d}{dt}a_x\cdot\mathbf{i}+\frac{d}{dt}a_y\cdot\mathbf{j}+\frac{d}{dt}a_z\cdot\mathbf{k}\right)$$

$$\left(a_x\cdot\frac{d}{dt}\mathbf{i}+a_y\cdot\frac{d}{dt}\mathbf{j}+a_z\cdot\frac{d}{dt}\mathbf{k}\right)=\left(a_x\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{i})+a_y\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{j})+a_z\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{k})\right)=(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{a})\cdot \quad (1.15)$$

Абсолютная производная вектора $\mathbf{a}(t)$ в координатном виде

$$(\dot{\mathbf{a}})_{X_0}=\dot{a}_x+a_z\omega_y-a_y\omega_z,(\dot{\mathbf{a}})_{Y_0}=\dot{a}_y+a_x\omega_z-a_z\omega_x,$$
$$(\dot{\mathbf{a}})_{Z_0}=\dot{a}_z+a_y\omega_x-a_x\omega_y. \quad (1.16)$$

Применим (1.14) - (1.16) последовательно для единичных векторов $(\mathbf{i}_0,\mathbf{j}_0,\mathbf{k}_0)$. Абсолютные производные единичных векторов равны нулю:

$$(\dot{\mathbf{i}}_0)_{X_0}=(\dot{\mathbf{i}}_0)_{Y_0}=(\dot{\mathbf{i}}_0)_{Z_0}=0;(\dot{\mathbf{j}}_0)_{X_0}=(\dot{\mathbf{j}}_0)_{Y_0}=(\dot{\mathbf{k}}_0)_{Z_0}=0;(\dot{\mathbf{k}}_0)_{X_0}=(\dot{\mathbf{k}}_0)_{Y_0}=(\dot{\mathbf{k}}_0)_{Z_0}=0, \quad (1.17)$$

$$0=\tilde{\dot{\mathbf{i}}}_0+(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{i}_0);0=\tilde{\dot{\mathbf{j}}}_0+(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{j}_0);0=\tilde{\dot{\mathbf{k}}}_0+(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{k}_0).$$

Из (1.16) и (1.17) имеем

$$\frac{d\alpha_{11}}{dt}\cdot\mathbf{i}+\frac{d\alpha_{12}}{dt}\cdot\mathbf{j}+\frac{d\alpha_{13}}{dt}\cdot\mathbf{k}=-\left(\boldsymbol{\omega}\times(\alpha_{11}\mathbf{i}+\alpha_{12}\mathbf{j}+\alpha_{13}\mathbf{k})\right)=-\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\\omega_x&\omega_y&\omega_z\\\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}\end{vmatrix},$$

$$\frac{d\alpha_{21}}{dt}\cdot\mathbf{i}+\frac{d\alpha_{22}}{dt}\cdot\mathbf{j}+\frac{d\alpha_{23}}{dt}\cdot\mathbf{k}=-\left(\boldsymbol{\omega}\times(\alpha_{21}\mathbf{i}+\alpha_{22}\mathbf{j}+\alpha_{23}\mathbf{k})\right)=-\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\\omega_x&\omega_y&\omega_z\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}\end{vmatrix}, \quad 1.18)$$

$$\frac{d\alpha_{31}}{dt}\cdot\mathbf{i}+\frac{d\alpha_{32}}{dt}\cdot\mathbf{j}+\frac{d\alpha_{33}}{dt}\cdot\mathbf{k}=-\left(\boldsymbol{\omega}\times(\alpha_{31}\mathbf{i}+\alpha_{32}\mathbf{j}+\alpha_{33}\mathbf{k})\right)=-\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\\omega_x&\omega_y&\omega_z\\\alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}\end{vmatrix}.$$

Представляя (1.18) относительно координат, можно определить $\frac{d\mathbf{\Gamma}}{dt}\cdot\mathbf{r}$:

$$\frac{d\mathbf{\Gamma}}{dt}\cdot\mathbf{r}=\begin{pmatrix}x(\omega_z\alpha_{12}-\omega_y\alpha_{13})+y(\omega_x\alpha_{13}-\omega_z\alpha_{11})+z(\omega_y\alpha_{11}-\omega_x\alpha_{12})\\x(\omega_z\alpha_{22}-\omega_y\alpha_{23})+y(\omega_x\alpha_{23}-\omega_z\alpha_{21})+z(\omega_y\alpha_{21}-\omega_x\alpha_{22})\\x(\omega_z\alpha_{32}-\omega_y\alpha_{33})+y(\omega_x\alpha_{33}-\omega_z\alpha_{31})+z(\omega_y\alpha_{31}-\omega_x\alpha_{32})\end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

Определим также выражение. $\mathbf{\Gamma}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$. Получим еще одно очень важное свойство матрицы $\mathbf{\Gamma}$ [8]:

$$\frac{d\mathbf{\Gamma}}{dt}\cdot\mathbf{r}=\mathbf{\Gamma}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})\cdot \quad (1.20)$$

2. Скорость движения точек деформированного твердого тела. Для определения абсолютной скорости движения точки $A^*\in Q^2$ относительно $O_0X_0Y_0Z_0$ продифференцируем по времени радиус-вектор $\boldsymbol{\rho}_{A^*}=\boldsymbol{\rho}_0+\mathbf{r}+\mathbf{u}$ с учетом (1.5) и представим скорость точки A^* в виде

$$\frac{d\boldsymbol{\rho}_{A^*}}{dt} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2\left(x, y, z, \mathbf{u}, t\right). \tag{2.1}$$

Здесь $\mathbf{V}_0$ и $\mathbf{V}_1$ – составляющие скорости, известные из теории движения абсолютно твердого тела [4-6]. Составляющая $\mathbf{V}_2\left(x, y, z, \mathbf{u}, t\right)$ обусловлена упругостью тела. Заметим, что свойство упругости тела приводит к колебательным движениям всей системы.

Из (1.5) и (2.1) имеем

$$\begin{gathered}
\mathbf{V}_0 = \frac{d\boldsymbol{\rho}_0}{dt} = V_{X_0}\mathbf{i}_0 + V_{Y_0}\mathbf{j}_0 + V_{Z_0}\mathbf{k}_0, \mathbf{V}_1 = x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt}, \\
\mathbf{V}_2 = \left(\frac{du_1\left(x, y, x, t\right)}{dt}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{du_2\left(x, y, x, t\right)}{dt}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{du_3\left(x, y, x, t\right)}{dt}\right)\mathbf{k} + \qquad 2.2) \\
+u_1\left(x, y, z, t\right)\frac{d\mathbf{i}}{dt} + u_2\left(x, y, z, t\right)\frac{d\mathbf{j}}{dt} + u_3\left(x, y, z, t\right)\frac{d\mathbf{k}}{dt}.
\end{gathered}$$

Определим вектор скорости $\mathbf{V}_1$ относительно подвижной системы координат $Oxyz$:

$$V_{1x}\mathbf{i} + V_{1y}\mathbf{j} + V_{1z}\mathbf{k} = x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt}. \tag{2.3}$$

Умножая (2.3) последовательно на векторы $\left(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\right)$, получим

$$\begin{gathered}
V_{1x} = x\frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{i} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt}\cdot\mathbf{i} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt}\cdot\mathbf{i}, V_{1y} = x\frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{j} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt}\cdot\mathbf{j} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt}\cdot\mathbf{j}, \\
V_{1z} = x\frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{k} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt}\cdot\mathbf{k} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt}\cdot\mathbf{k}.
\end{gathered} \tag{2.4}$$

Для преобразования выражения (2.4) воспользуемся свойством скалярного произведения и дифференцирования единичных векторов

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = 1, \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = 1, \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1, \mathbf{j}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = 0$$

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{i} = 0, \frac{d\mathbf{j}}{dt}\cdot\mathbf{j} = 0, \frac{d\mathbf{k}}{dt}\cdot\mathbf{k} = 0, \frac{d\mathbf{j}}{dt}\cdot\mathbf{i} = -\mathbf{j}\frac{d\mathbf{i}}{dt}, \frac{d\mathbf{j}}{dt}\cdot\mathbf{k} = -\mathbf{j}\frac{d\mathbf{k}}{dt}, \frac{d\mathbf{k}}{dt}\cdot\mathbf{i} = -\mathbf{k}\frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot \tag{2.5}$$

Преобразовав выражения (2.4) с учетом (2.5), получим

$$\begin{aligned}
V_{1x} &= z\omega_y - y\omega_z \\
V_{1y} &= x\omega_z - z\omega_x \text{, или } \mathbf{V}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}\right), \\
V_{1z} &= y\omega_x - x\omega_y
\end{aligned} \tag{2.6}$$

где $\frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{j} = \omega_z, \frac{d\mathbf{k}}{dt}\cdot\mathbf{i} = \omega_y, \frac{d\mathbf{j}}{dt}\cdot\mathbf{k} = \omega_x$. $\mathbf{V}_1 = \left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}\right)$ – формула Эйлера, определяющая скорость движения абсолютно твердого тела около неподвижной точки O [4-6], $\boldsymbol{\omega}$ – мгновенная угловая скорость тела, $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ на оси системы координат $Oxyz$.

Умножая $\mathbf{V}_2$ последовательно на единичные векторы $(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$, получим $\mathbf{V}_2$ относительно подвижной системы координат, по аналогии с (2.6)

$$
\begin{aligned}
V_{2x} &= \frac{d}{dt}u_1(x,y,z,t)+\left[u_3(x,y,z,t)\omega_y - u_2(x,y,z,t)\omega_z\right],\\
V_{2y} &= \frac{d}{dt}u_2(x,y,z,t)+\left[u_1(x,y,z,t)\omega_z - u_3(x,y,z,t)\omega_x\right],\\
V_{2z} &= \frac{d}{dt}u_3(x,y,z,t)+\left[u_2(x,y,z,t)\omega_x - u_1(x,y,z,t)\omega_y\right]
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

или в векторном виде

$$\mathbf{V}_2 = \frac{d}{dt}\mathbf{u}(x,y,z,t)+\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u}(x,y,z.t)\right). \tag{2.8}$$

Заметим, что вектор упругих перемещений $\mathbf{u}(x,y,z,t)$ во время движения изменяется как по модулю, так и по направлению. Следовательно, (2.8) можно представить в виде двух слагаемых

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_{21}+\mathbf{V}_{22}, \tag{2.9}$$

$\mathbf{V}_{21} = \dfrac{d}{dt}\mathbf{u}(x,y,z,t)$ – относительная или локальная скорость движения, а $\mathbf{V}_{22} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u}(x,y,z,t)$ – переносная скорость движения.

Компоненты скорости $\mathbf{V}_{21}$ и $\mathbf{V}_{22}$ имеют порядок $\varepsilon(\varepsilon \ll 1)$, поскольку время, в течение которого происходит движение, имеет порядок единицы $(t\sim 1)$, а $u_i(x,y,z,t)\sim\varepsilon$.

Для полного определения скорости (2.1) относительно подвижной системы координат $Oxyz$ определим также скорость поступательного движения $\mathbf{V}_0$. Вектор скорости $\mathbf{V}_0$ в неподвижной и подвижной системах координат имеет вид

$$
\begin{gathered}
\mathbf{V}_0 = V_{X_0}\mathbf{i}_0 + V_{Y_0}\mathbf{j}_0 + V_{Z_0}\mathbf{k}_0;\, \mathbf{V}_0 = V_x\mathbf{i} + V_y\mathbf{j} + V_z\mathbf{k},\\
V_{X_0}\mathbf{i}_0 + V_{Y_0}\mathbf{j}_0 + V_{Z_0}\mathbf{k}_0 = V_x\mathbf{i} + V_y\mathbf{j} + V_z\mathbf{k}.
\end{gathered}
\tag{2.10}
$$

Учитывая разложения векторов $(\mathbf{i}_0,\mathbf{j}_0,\mathbf{k}_0)$ в подвижной системе координат $Oxyz$, $\mathbf{V}_0$ определим с помощью матрицы преобразования $\boldsymbol{\Gamma}$

$$
\begin{aligned}
V_x &= \alpha_{11}V_{X_0}+\alpha_{21}V_{Y_0}+\alpha_{31}V_{Z_0}\\
V_y &= \alpha_{12}V_{X_0}+\alpha_{22}V_{Y_0}+\alpha_{32}V_{Z_0}\\
V_z &= \alpha_{13}V_{X_0}+\alpha_{23}V_{Y_0}+\alpha_{33}V_{Z_0}
\end{aligned}
\quad \text{или } \mathbf{V}_{Oxyz} = \boldsymbol{\Gamma}^T\mathbf{V}_{O_0}. \tag{2.11}
$$

Итак, скорость движения произвольной точки упругого тела относительно подвижной системы координат имеет вид

$$V_{A^*} = \boldsymbol{\Gamma}^T\mathbf{V}_{0_0}+(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})+\frac{d}{dt}\mathbf{u}(x,y,z,t)+\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u}(,y,z,t)\right). \tag{2.12}$$

Определим скорость движения (2.1) относительно неподвижной системы координат $O_0X_0Y_0Z_0$.

Первый способ. Представим (2.1) с учетом (2.2) - (2.7) в виде

$$\begin{aligned}
&V_{A^*X_0}\mathbf{i}_0 + V_{A^*Y_0}\mathbf{j}_0 + V_{A^*Z_0}\mathbf{k}_0 = V_{X_0}\mathbf{i}_0 + V_{Y_0}\mathbf{j}_0 + V_{Z_0}\mathbf{k}_0 + \\
&+\left(z\omega_y - y\omega_z\right)\mathbf{i} + \left(x\omega_z - z\omega_x\right)\mathbf{j} + \left(y\omega_x - x\omega_y\right)\mathbf{k} + \\
&+\left(\frac{d}{dt}u_1(x,y,z,t) + \left[u_3(x,y,z,t)\omega_y - u_2(x,y,z,t)\omega_z\right]\right)\mathbf{i} + \\
&+\left(\frac{d}{dt}u_2(x,y,z,t) + \left[u_1(x,y,z,t)\omega_z - u_3(x,y,z,t)\omega_x\right]\right)\mathbf{j} + \\
&+\left(\frac{d}{dt}u_3(x,y,z,t) + \left[u_2(x,y,z,t)\omega_x - u_1(x,y,z,t)\omega_y\right]\right)\mathbf{k}.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Умножая (2.13) последовательно на единичные векторы $\left(\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0\right)$ и проведя ряд вычислений, получим вектор скорости точек упругого тела относительно неподвижной системы координат

$$\mathbf{V}_{A^*} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{\Gamma}\cdot\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}\right) + \mathbf{\Gamma}\cdot\frac{d}{dt}\mathbf{u}\left(x,y,z,t\right) + \mathbf{\Gamma}\cdot\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u}\left(x,y,z,t\right)\right). \tag{2.14}$$

Второй способ. Умножая (2.12) на матрицу преобразования $\mathbf{\Gamma}$ с учетом $\mathbf{\Gamma}^T = \mathbf{\Gamma}^{-1}; \mathbf{\Gamma}\times\mathbf{\Gamma}^T = \mathbf{\Gamma}^T\times\mathbf{\Gamma} = \mathbf{E}$, получим (2.14).

Третий способ. Вычислим производную по времени t от радиус-вектора $\boldsymbol{\rho}_{A^*} = \boldsymbol{\rho}_0 + \mathbf{\Gamma}\mathbf{r} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{u}$ и, принимая во внимание (1.20), получим (2.14).

Следовательно, во всех трех случаях получены аналогичные выражения.

Применение того или другого подхода зависит от конкретной задачи.

3. Ускорения движений точек деформированного твердого тела. Для получения формул вектора ускорения $\mathbf{W}$ нужно продифференцировать по времени выражение (2.1). Здесь также определим ускорения точек как относительно подвижной, так и неподвижной систем координат и выделим те компоненты, которые обусловлены упругостью тела.

3.1. Ускорение относительно подвижной системы координат $Oxyz$. Производную от (2.1) представим в виде

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_0 + \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2, \tag{3.1}$$

где $\mathbf{W}_0 = \dfrac{d\mathbf{V}_0}{dt}$ – ускорение движения полюса

$$\mathbf{W}_1 = \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}\right) = \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\mathbf{r}\right) + \left(\boldsymbol{\omega}\times\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = \left(\boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{r}\right) + \left(\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}\right)\right), \tag{3.2}$$

$$\mathbf{W}_2=\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\mathbf{u}(x,y,z,t)+(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u}(x,y,z.t))\right)=$$

$$=\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{u}(x,y,z,t)+(\boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{u}(x,y,z,t))+2\left(\boldsymbol{\omega}\times\frac{d}{dt}\mathbf{u}(x,y,z,t)\right)+ \qquad (3.3)$$

$$+(\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u}(x,y,z,t))).$$

Здесь $(\boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{r})=\mathbf{W}_{TT}^{вр}$ – вращательное, $(\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}))=\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r})-{-}\mathbf{r}\omega^2=\mathbf{W}_{TT}^{ос}$ – осестремительное, $\boldsymbol{\varepsilon}-$ угловое ускорения тела [3-6],

$$\mathbf{W}_1=\mathbf{W}_{TT}^{вр}+\mathbf{W}_{TT}^{ос}. \qquad (3.4)$$

Условимся по аналогии с (3.2) $(\boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{u}(x,y,z,t))$ называть вращательным, а $(\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u}(x,y,z,t)))$ – осестремительным ускорениями точек упругого тела в момент времени t:

$$(\boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{u}(x,y,z,t))=\mathbf{W}_{УТ}^{вр},(\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u}(x,y,z,t)))=\mathbf{W}_{УТ}^{ос}. \qquad (3.5)$$

В отличие от (3.2) в (3.3) входят еще два слагаемых, которые являются результатом того, что вектор $\mathbf{u}(x,y,z,t)$ в течение времени изменяется как по модулю, так и по направлению. По аналогии со сложным движением абсолютно твердого тела имеем

$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{u}(x,y,z,t)=\mathbf{W}_{УТ}^{от}$ ($\mathbf{W}_{УТ}^{от}$ – относительное ускорение),

$2\left(\boldsymbol{\omega}\times\frac{d}{dt}\mathbf{u}(x,y,z,t)\right)$ называется добавочным или поворотным ускорением или ускорением Кориолиса $\mathbf{W}_{УТ}^{ук}$.

Следовательно, ускорением движения точек тела, обусловленным упругостью, является

$$\mathbf{W}_2=\mathbf{W}_{УТ}^{от}+\mathbf{W}_{УТ}^{вр}+\mathbf{W}_{УТ}^{ос}+\mathbf{W}_{УТ}^{ук}. \qquad (3.6)$$

Окончательное выражение ускорения движения деформированного твердого тела относительно подвижной системы координат $Oxyz$ запишем в виде

$$\mathbf{W}_{A^*}=\mathbf{W}_0+\mathbf{W}_{TT}^{вр}+\mathbf{W}_{TT}^{ос}+\mathbf{W}_{УТ}^{от}+\mathbf{W}_{УТ}^{вр}+\mathbf{W}_{УТ}^{ос}+\mathbf{W}_{УТ}^{ук}. \qquad (3.7)$$

(индекс ТТ означает твердое тело, а УТ–- упругое тело).

3.2. Ускорение относительно неподвижной системы координат. Продифференцируем по времени выражение (2.14) и определим ускорения движений деформированного твердого тела относительно $O_0X_0Y_0Z_0$ в виде

$$\mathbf{W}_{A^*}=\mathbf{W}_0+\mathbf{W}_1+\mathbf{W}_2, \qquad (3.8)$$

где обозначены

$$\mathbf{W}_1 = \frac{d\mathbf{\Gamma}}{dt}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) + \mathbf{\Gamma}\cdot\left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\mathbf{r}\right) = \mathbf{\Gamma}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})) + \mathbf{\Gamma}\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{r}),$$

$$\mathbf{W}_2 = \mathbf{\Gamma}\cdot\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{u}(x,y,z,t) + \mathbf{\Gamma}\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{u}(x,y,z,t)) + 2\mathbf{\Gamma}\cdot\left(\boldsymbol{\omega}\times\frac{d}{dt}\mathbf{u}(x,y,z,t)\right) +$$
$$+\mathbf{\Gamma}\cdot\left(\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{u}(x,y,z,t)) - \mathbf{u}(x,y,z,t)\cdot\omega^2\right).$$

Принимая за основу обозначения для формулы (3.1) - (3.3), имеем

$$\mathbf{W}_{A^*} = \mathbf{\Gamma}\mathbf{W}_0 + \mathbf{\Gamma}\mathbf{W}_{TT}^{вр} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{W}_{TT}^{ос} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{W}_{УТ}^{от} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{W}_{УТ}^{вр} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{W}_{УТ}^{ос} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{W}_{УТ}^{ук}. \qquad (3.9)$$

((3.9) можно получить также из формул (3.1) умножением на $\mathbf{\Gamma}$).

Компоненты вектора ускорений $\mathbf{W}_{УТ}^{от}, \mathbf{W}_{УТ}^{вр}, \mathbf{W}_{УТ}^{ос}, \mathbf{W}_{УТ}^{ук}$ в (3.7) и (3.9), обусловленные упругостью тела относительно подвижной и неподвижной систем координат, имеют порядок $\varepsilon(\varepsilon \ll 1, t \sim 1)$.

Заключение. Результаты исследования показывают эффективность изучения кинематики движения деформированного упругого тела по аналогии с кинематикой движения абсолютно твердого тела. Кинематика упругого тела представлена в рамках движения абсолютно твердого тела путем введения дополнительных величин, обусловленных упругостью. Дополнительные слагаемые относительно величин, характеризующих кинематику абсолютно твердого тела, являются малыми величинами, имеющими порядок вектора упругих перемещений точек. Методы исследования и полученные результаты можно учитывать при моделировании движений механических систем, содержащих упругие элементы большой жесткости.

Институт механики НАН РА
e-mail: ghukasyan10@yandex.com

А. А. Гукасян

Некоторые вопросы кинематики движения деформированного твердого тела по аналогии с кинематикой абсолютно твердого тела

Исследуется кинематика движения деформированного упругого тела по аналогии с кинематикой движения абсолютно твердого тела. Кинематика деформированного упругого тела представляется в рамках кинематики абсолютно твердого тела путем введения дополнительных величин, обусловленных упругостью тела. Дополнительные слагаемые являются малыми величинами, имеющими порядок вектора упругих перемещений точек. Примененные методы теоретической механики являются эффективными. Полученные результаты можно учитывать при моделировании движений механических систем, содержащих упругие элементы большой жесткости.

Ա. Ա. Ղուկասյան

Դեֆորմացվող պինդ մարմնի շարժման կինեմատիկայի որոշ հարցեր՝ բացարձակ պինդ մարմնի կինեմատիկայի անալոգիայով

Հետազոտվում է դեֆորմացվող պինդ մարմնի շարժման կինեմատիկան բացարձակ պինդ մարմնի կինեմատիկայի անալոգիայով: Դեֆորմացվող պինդ մարմնի կինեմատիկան ներկայացվում է բացարձակ պինդ մարմնի կինեմատիկայի շրջանակներում՝ ավելացնելով լրացուցիչ անդամներ՝ պայմանավորված մարմնի առաձգականությամբ: Լրացուցիչ գումարելիները փոքր մեծություններ են, որոնց կարգը համընկնում է կետերի առաձգական տեղափոխության վեկտորի մեծության հետ: Տեսական մեխանիկայի մեթոդների կիրառումն արդյունավետ է, և ստացված արդյունքները կարելի է հաշվի առնել մեծ կոշտությամբ առաձգական էլեմենտներ պարունակող մեխանիկական համակարգերի շարժումների մոդելավորման դեպքում:

A. A. Ghukasyan

Some Questions of the Kinematics of Motion of a Deformed Rigid Body by Analogy with the Kinematics of an Absolutely Rigid Body

The kinematics of the motion of a deformed elastic body is studied by analogy with the kinematics of the motion of an absolutely rigid body. The kinematics of a deformed elastic body is represented within the framework of the kinematics of an absolute rigid body by introducing additional quantities due to the elasticity of the body. Additional terms are small quantities having the order of the vector of elastic displacements of points. The application of the methods of theoretical mechanics is effective and the results obtained can be taken into account when modeling the movements of mechanical systems containing elastic elements of high rigidity.

Литература

1. *Новожилов В. В.* Теория упругости. Л. Судпромгиз. 1958. 370 с.
2. *Лейбензон Л. С.* Курс теории упругости. М.-Л. Гос. изд-во техн.-теорет. лит. 1947. 465 с.
3. *Гукасян А. А.* – Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т. 67. № 4. С. 53-64.
4. *Суслов Г. К.* Теоретическая механика. М.-Л. Гостехиздат. 1946. 655 с.
5. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М. Физматлит. М. 1961. 824 с.
6. *Бухгольц Н. Н.* Основной курс теоретической механики. М. Наука.1967. 467 с.
7. *Моденов П. С.* Аналитическая геометрия. Изд-о Моск. ун-та. 1969. 699 с.
8. *Вильке В. Г.* Теоретическая механика. СПб. Лань. 2003, 301 с.