ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր
Том
Volume 123 2023 № 3-4

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9
DOI: 10.54503/0321-1339-2023.123.3-4-15

А. Г. Камалян, Г. А. Киракосян

О фредгольмовости одного класса операторов -Винера – Хопфа

(Представлено академиком А. Б. Нерсесяном 6/X 2023)

Ключевые слова: *оператор $\mathcal{L}$-Винера – Хопфа, набор спектральных данных, фредгольмовость.*

1. Введение. Пусть $\chi_\pm$ – характеристическая функция множества $\mathbb{R}_\pm = \{x \in \mathbb{R} : \pm x > 0\}$, а $F : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ преобразование Фурье

$$(Fy)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} y(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим класс функций $L_2^+(\mathbb{R}) = \{F(\chi_+ f) : f \in L_2(\mathbb{R})\}$. Как известно (см., например, п. 2.5 [1]), $L_2^+(\mathbb{R})$ является подпространством всех функций из $L_2(\mathbb{R})$, являющихся угловыми граничными значениями аналитических функций из класса Харди $H_2^+(\mathbb{C})$, т.е. функций φ, аналитических в $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ и удовлетворяющих условию

$$\sup_{y>0} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x + iy)|^2 dy < \infty .$$

В данной работе изучены свойства фредгольмовости оператора $T : L_2(\mathbb{R}_+) \to L_2(\mathbb{R}_+)$, определенного по формуле

$$(Ty)(x) = y(x) + \int_0^{+\infty} y(t)k(t-x)dt +$$

$$+\frac{2e^{-2x}}{4-e^{-2x}}\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{e^{-2t}}{4-e^{-2t}}\right)y(t)\int_0^{+\infty} k(t-x-\tau)e^{-\tau}\,d\tau\,dt \tag{1}$$

$$+$$

$$+\left(1+\frac{e^{-2x}}{4-e^{-2x}}\right)\int_0^{+\infty}\frac{2e^{-2t}}{4-e^{-2t}}y(t)\int_{-\infty}^{0} k(t-x-\tau)e^{\tau}\,d\tau\,dt$$

при предположении, что функция k принадлежит подпространству $L_1(\mathbb{R}) \cap L_2^+(\mathbb{R})$ и кроме того существует функция d такая, что $d, d' \in L_1(\mathbb{R})$ и $d'' = k$.

Исследование оператора T основано на его реализации в виде оператора $\mathcal{L}$-Винера – Хопфа, определение которого дается в следующем пункте.

2. Оператор -Винера – Хопфа. Пусть $\mathcal{L}$ – максимальный, симметричный оператор, порожденный дифференциальным выражением

$$(\ell y)(x) = -y'' + v(x)y$$

с вещественным потенциалом v, удовлетворяющим условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(1+|x|)|v(x)|\,dx < \infty. \tag{2}$$

Интегральный оператор $\mathcal{L}$-свертки на полуоси

$$\big((I+\mathcal{K}^+)y\big)(x) = y(x) + \int_0^{\infty} K(x,t)\,y(t)\,dt$$

с ядром K, удовлетворяющим уравнению

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}K+v(x)K=-\frac{\partial^2}{\partial t^2}K+v(x)K$$

и некоторым дополнительным ограничениям, был введен в [2]. Более общий класс операторов $\mathcal{L}$-Винера – Хопфа введен в [3].

Пусть $e_{\pm}(x,\lambda)$ $(x,\lambda\in\mathbb{R})$ – решения Йоста уравнения

$$\ell y=\lambda^2 y\,, \tag{3}$$

т.е. решения (3), удовлетворяющие граничным условиям

$$\lim_{x\to\pm\infty}e^{-\lambda x}\,e_{\pm(x,\lambda)}=1,\qquad \lim_{x\to\pm\infty}e^{-\lambda x}\,e'_{\pm(x,\lambda)}=i\lambda\,.$$

При $x\neq 0$ функции $e_-(x,\lambda)$, $e_-(x,-\lambda)$ образуют фундаментальную систему решений (3), и потому $e_+(x,\lambda)=b(x)e_-(x,-\lambda)+b_0(x)e_-(x,\lambda)$. В спектральной теории оператора $\mathcal{L}$ важную роль играют коэффициент прохождения $t(\lambda)=b_0^{-1}(\lambda)$ и коэффициенты отражения $r_-(\lambda)=b(\lambda)t(\lambda)$, $r_+(\lambda)=-b(-\lambda)t(\lambda)$.

Рассмотрим интегралы

$$(U_{\mp}y)(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u_{\mp}(x,\lambda)y(x)dx,\qquad \lambda\in\mathbb{R},$$

где $u_{\mp(x,\lambda)}=t(\lambda)\,e_{\pm}(x,\pm\lambda)$, которые сходятся по норме $L_2(\mathbb{R})$ и определяют ограниченные операторы $U_{\mp}:\ L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})$.

Под спектральным преобразованием оператора $\mathcal{L}$ мы понимаем оператор

$$U\coloneqq m(\chi_+)U_-+m(\chi_-)\,J\,U_+\colon L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R}),$$

где $(Jy)(x)=y(-x), m(a)\colon L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})$ – оператор умножения на функцию $a\colon (m(a)y\coloneqq ay)$.

Оператор U обобщает понятие преобразования Фурье F, а при $v=0$ совпадает с ней, поскольку на всюду плотном в $L_2(\mathbb{R})$ множестве имеет место равенство $U\mathcal{L}U^*=m(\lambda^2)$. Кроме того $UU^*=I$, $U^*U=I-P$, где P – проектор на подпространство собственных функций оператора $\mathcal{L}$.

Заметим, что $\mathcal{L}$ имеет лишь конечное число простых собственных значений, имеющих вид $i\mu_k$ $(k=1,\dots,N)$, $\mu_k>0$.

Пусть функция $a\in L_\infty(\mathbb{R})$, а операторы $\pi_+^0\colon L_2(\mathbb{R}_+)\to L_2(\mathbb{R})$, $\pi_+\colon L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R}_+)$ определены по формуле

$$(\pi_+ y)(x) = y(x), \quad x \in \mathbb{R}_+ \quad (\pi_+^0 y)(x) = \begin{cases} y(x), & x \in \mathbb{R}_+ \\ 0, & x \in \mathbb{R}_- \end{cases}$$

Под оператором $\mathcal{L}$-Винера – Хопфа, следуя [3], мы будем понимать оператор

$$W_{\mathcal{L}}(a) = \pi_+ \, U^* \, m(a) \, U \, \pi_+^0.$$

Функцию a называют символом оператора $W_{\mathcal{L}}(a)$.

В [3] в случае кусочно-непрерывного символа получены критерий фредгольмовости оператора $W_{\mathcal{L}}(a)$ и формула для индекса в терминах функций a, $r_\pm, t$. Операторы $U_\pm$ и соответственно оператор $W_{\mathcal{L}}(a)$ могут быть записаны в явном виде лишь в тех случаях, когда явно записываются решения Йоста уравнения (3). Таковым является, например, случай безотражательного потенциала, т.е. когда $r_\pm = 0$ (подробнее см. в [4-6]).

Заметим также, что решения Йоста уравнения (3) существуют и единственны при выполнении условия (2) (см. [7]). При выполнении этого условия обратная задача теории рассеяния разрешима, т.е. потенциал v однозначно может быть восстановлен по правым данным рассеяния $\{r_+(\lambda), i\mu_k, m_k, k = 1, \dots, N\}$, где $i\mu_k$ – собственные значения, а m_k – нормирующие множители соответствующих собственных функций (см. [8]). Безотражательные потенциалы порождаются данными рассеяния $\{0, i\mu_k, m_k \mid k = 1, \dots, N\}$. При данных рассеяния $\left\{-\frac{1}{\lambda^2+1}, 0, 0\right\}$ решения Йоста также явно выписывается.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *потенциал v оператора $\mathcal{L}$ определяется правым набором данных рассеяния* $\left\{-\frac{1}{\lambda^2+1}, 0, 0\right\}$;
2) $k \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2^+(\mathbb{R})$;
3) *существует функция* $d \in L_1(\mathbb{R})$, *такая что* $d' \in L_1(\mathbb{R})$ *и* $d'' = k$;
4) *функция* a *определяется равенством*

$$a(\lambda) = 1 + \frac{(F^{-1}k)(\lambda)}{\lambda^2(\lambda^2 + 2)} \, (\lambda^2 + 1)^2$$

тогда имеет место равенство $T = W_{\mathcal{L}}(a)$.

3. Фредгольмовость. Пусть X – банахово пространство, $A: X \to X$ – линейный ограниченный оператор. Оператор A называется фредгольмовым, если его образ $\operatorname{Im} A \coloneqq \{Ax \mid x \in X\}$ замкнут, а размерности ядра

$\ker A := \{x \in X \mid Ax = 0\}$ и коядра ${}^{X}/_{\operatorname{Im} A}$ конечны. Число $\operatorname{ind} A = \dim \ker A - \dim\left({}^{X}/_{\operatorname{Im} A}\right)$ называют индексом оператора A.

Из результатов работы [3] и теоремы 1 следует

Теорема 2. *При условиях* 2) *и* 3) *теоремы* 1 *оператор* T, *определенный формулой* (1), *фредгольмов тогда и только тогда, когда*

$$a(\lambda) = 1 + \frac{(F^{-1}k)(\lambda)}{\lambda^2(\lambda^2+2)}\,(\lambda^2+1)^2 \neq \frac{1}{\lambda^2(\lambda^2+2)} \quad \text{при } \lambda > 0\,. \tag{4}$$

При выполнении этого условия индекс оператора T может быть вычислен по формуле

$$\operatorname{ind} T = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty d\,\operatorname{Arg}\left[\frac{(\sqrt{\lambda}+\sqrt{2}\,i)(\lambda(\lambda+2)a(\sqrt{\lambda})+1)}{(\sqrt{\lambda}+i)^4(\sqrt{\lambda}-\sqrt{2}\,i)}\right].$$

Институт математики НАН РА
e-mails: kamalyan_armen@yahoo.com,
grigor.kirakosyan.99@gmail.com

А. Г. Камалян, Г. А. Киракосян

О фредгольмовости одного класса операторов
$\mathcal{L}$-Винера–Хопфа

Исследован один класс интегральных операторов на полуоси, являющихся комбинацией операторов умножения на функцию и операторов Винера – Хопфа. Класс этих операторов при соответствующем выборе спектральных данных дифференциального оператора и символа реализуется как операторы $\mathcal{L}$-Винера–Хопфа. Получены критерий фредгольмовости и формула для вычисления индекса.

Ա. Հ. Քամալյան, Գ. Ա. Կիրակոսյան

$\mathcal{L}$-Վիներ–Հոպֆի օպերատորների մի դասի ֆրեդհոլմության մասին

Հետազոտված է կիսաառանցքի վրա ինտեգրալ օպերատորների մի դաս, որոնք հանդիսանում են ֆունկցիայով բազմապատկման օպերատորների և Վիներ–Հոպֆի օպերատորների կոմբինացիա: Այդ օպերատորների դասը դիֆերենցիալ օպերատորի սպեկտրալ տվյալների և սիմվոլի համապատասխան ընտրության դեպքում իրացվում են որպես $\mathcal{L}$-Վիներ–Հոպֆի օպերատորներ: Ստացվել են ֆրեդհոլմության հայտանիշը և ինդեքսը հաշվելու բանաձևը:

A. G. Kamalyan, G. A. Kirakosyan

On the Fredholm Property of One Class of $\mathcal{L}$-Wiener–Hopf Operators

The article is devoted to the study of one class of integral operators on the half-line, which are a combination of operators of multiplication by a function and Wiener–Hopf operators. The class of these operators, with an appropriate choice of spectral data of the differential operator and symbol, are realized as $\mathcal{L}$-Wiener–Hopf operators. A Fredholm criterion and a formula for calculating the index are obtained.

Литература

1. *Böttcher A., Karlovich Y. I., Spitkovsky I. M.* Convolution Operators and Factorization of Almost Periodic Matrix Functions. Basel. Birkhäuser. 2002.
2. *Камалян А. Г.*, *Хачатрян И. Г.*, *Нерсесян А. Б.* – Изв. НАН Армении, Математика. 1994. Т. 29. №. 6. С. 31-81.
3. *Камалян А. Г.*, *Спитковский И. М.* – Матем. заметки. 2018. Т. 104. №. 3. С. 407–421.
4. *Hasanyan D., Kamalyan A., Karakhanyan M. et al.* – Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 2019. V. 291. P. 175-197.
5. *Камалян А. Г., Киракосян Г. А.* – Изв. НАН Армении. Математика. 2022. Т. 57. № 2. С. 112-121.
6. *Kirakosyan G.* – Armenian Journ. of Mathematics. 2022. T. 14. № 6. P. 1-10.
7. *Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж. и др.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М. Мир. 1988. 694 с.
8. *Марченко В. А.* Операторы Штурма – Лиувиля и их приложения. Киев. Наукова думка. 1977. 329 с.