ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 123 2023 № 2

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3
DOI:10.54503/0321-1339-2023.123.2-38

Е. Г. Канецян, М. С. Мкртчян,
член-корреспондент НАН РА С. М. Мхитарян

Определяющие уравнения деформирования упругого слоя во взаимодействии с концентраторами напряжений при осесимметричном кручении

(Представлено 25/V 2023)

Ключевые слова: *упругий слой, концентратор напряжений типа трещины, включения тонкого кругового диска, интегральное уравнение.*

Введение. Теория кручения деформируемых тел представляет собой одну из важных областей механики деформируемого твердого тела и лежит в основе проектирования и расчета прочностных характеристик многочисленных машиностроительных и строительных конструкций, летательных аппаратов, стержневых и других инженерных конструкций, применяется в создании новых конструкционных материалов с заранее заданными физико-математическими свойствами. Теория кручения упругих тел основательно разработана в [1-5], где и приведены результаты исследований большого числа прикладных задач. Особый интерес представляют контактные и смешанные граничные задачи кручения упругих тел, взаимодействующих с концентраторами напряжений типа трещин, тонкостенных включений, штампов, тонких упругих круговых дисков. Возникающие при этом вокруг концентраторов напряжений локальные поля высоких напряжений значительно уменьшают запас прочности инженерных конструкций. Поэтому исследование таких полей и разработка способов снижения концентраций напряжений представляют теоретический и практический интерес. По части исследования контактных и смешанных задач упомянутых типов для упругих тел укажем на работы [6-14].

В настоящей статье рассматриваются задачи о напряженно-деформированном состоянии кусочно-однородного упругого слоя при осесимметричном кручении, когда в плоскости стыка разнородных материалов расположена трещина круговой формы или абсолютно жесткое тонкое включение также круговой формы. В частности, рассматривается аналог известной задачи Гриффитса [15, 16], когда упругое однородное изотропное пространство с круговой трещиной скручивается на бесконечности равномерно распределенными касательными силами. Рассматривается также аналог известной модели Мелана для стрингера [17, 18] в случае осесимметричного кручения тонкого упругого слоя. Выводится определяющее дифференциальное уравнение деформирования тонкого слоя.

При помощи интегрального преобразования Ханкеля выводятся определяющие интегральные уравнения (ИУ) и интегродифференциальные уравнения (ИДУ) с тем, чтобы затем приступить к построению и исследованию их решений.

1. Постановка задач и вывод определяющих их уравнений. Пусть кусочно-однородный упругий слой,отнесенный к цилиндрической системе координат r,φ,z состоит из верхнего слоя $\Omega_+ = \{0 \le r < \infty; -\pi < \varphi \le \pi; 0 \le z \le H_+\}$ с модулем сдвига G_+ и нижнего слоя $\Omega_- = \{0 \le r < \infty; -\pi < \varphi \le \pi; -H_- \le z \le 0\}$ с модулем сдвига G_-. Пусть далее в плоскости стыка разнородных материалов $z=0$ расположено абсолютно жесткое тонкое включение круговой формы $\omega = \{z=0;\ 0 \le r \le a;\ -\pi < \varphi \le \pi\}$ радиуса a или расположена круговая трещина ω также радиуса a. Предположим, что в верхней плоскости составного слоя $z = H_+$ действуют скручивающие касательные силы интенсивности $f_+(r)$, а в его нижней плоскости $z=-H_-$ – скручивающие касательные силы интенсивности $f_-(r)$, т.е.

$$\tau_{z\varphi}\big|_{z=H_\pm \mp 0} = f_\pm(r) \quad (0 \le r < \infty),$$

где $\tau_{z\varphi}$ – компонента касательных напряжений в окружном направлении.

Моментное условие равновесия этих сил даст

$$\int_0^\infty r^2 dr \int_{-\pi}^{\pi} f_+(r)\, d\varphi = \int_0^\infty r^2 dr \int_{-\pi}^{\pi} f_-(r)\, d\varphi \Rightarrow \int_0^\infty \left[f_+(r) - f_-(r)\right] r^2 dr = 0 .$$

Приняв во внимание изложенное в [14], для верхнего (+) и нижнего (-) слоев $\Omega_\pm$ придем к следующей граничной задаче:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_\varphi^\pm}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\varphi^\pm}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 u_\varphi^\pm}{\partial z^2} - \dfrac{u_\varphi^\pm}{r^2} = 0 \qquad (0 \le r < \infty; 0 < z < H_+; -H_- < z < 0) \\ \tau_{z\varphi}\big|_{z=\pm 0} = G_\pm \left.\dfrac{\partial u_\varphi^\pm}{\partial z}\right|_{z=\pm 0} = T_\pm(r);\ \tau_{z\varphi}\big|_{z=\pm H_\pm \mp 0} = G_\pm \left.\dfrac{\partial u_\varphi^\pm}{\partial z}\right|_{z=\pm H_\pm \mp 0} = f_\pm(r)\ (0 \le r < \infty); \\ \tau_{z\varphi}^\pm(r,z) \to 0 \qquad \text{при} \qquad r^2 + z^2 \to \infty. \end{cases} \tag{1.1}$$

Здесь $u_\varphi^\pm(r,z)$ – компоненты упругих перемещений точек, соответственно, верхнего и нижнего слоев $\Omega_\pm$ в окружном направлении, а

$$T_{\pm}(r)=\begin{cases}\tau_{\pm}(r) & (0\le r<a);\\ \tau(r) & (r>a),\end{cases} \tag{1.2}$$

где $\tau_{\pm}(r)$ – заданные окружные касательные напряжения на верхнем $(+)$ и нижнем $(-)$ берегах, соответственно, включения или трещины, $\tau(r)$ – те же напряжения вне области ω при $z=0$.

Для решения граничных задач (1.1), как в [13, 14], введем в рассмотрение трансформанты Ханкеля

$$\left\{\bar{u}_{\varphi}^{\pm}(\lambda,z);\bar{T}_{\pm}(\lambda);\bar{f}_{\pm}(\lambda)\right\}=\int_0^{\infty}\left\{u_{\varphi}^{\pm}(r,z);T_{\pm}(r);f_{\pm}(r)\right\}rJ_1(\lambda r)\,dr\,,$$

где $J_1(x)$ – бесселева функция первого рода индекса 1, а λ – спектральный параметр Ханкеля. В результате решения этих граничных задач в трансформантах Ханкеля запишутся, соответственно, в виде [14]:

$$\bar{u}_{\varphi}^{\pm}(\lambda,z)=\pm\frac{\bar{f}_{\pm}(\lambda)\operatorname{ch}(\lambda z)-\bar{T}_{\pm}(\lambda)\operatorname{ch}\lambda(z\mp H_{\pm})}{G_{\pm}\lambda\operatorname{sh}(\lambda H_{\pm})}\quad(0\le z\le H_{+};\,-H_{-}\le z\le 0). \tag{1.3}$$

Далее положим

$$u_{\varphi}^{\pm}(r,0)=\varphi_{+}(r,0)\pm\varphi_{-}(r,0);\ \varphi_{\pm}(r,0)=\frac{u_{\varphi}^{+}(r,0)\pm u_{\varphi}^{-}(r,0)}{2};\ (0<r<\infty); \tag{1.4}$$

$$T_{\pm}(r)=\Omega_{+}(r)\pm\Omega_{-}(r);\ \Omega_{\pm}(r)=\frac{T_{+}(r)\pm T_{-}(r)}{2};$$

$$\left\{\bar{\varphi}_{\pm}(\lambda);\bar{\Omega}_{\pm}(\lambda)\right\}=\int_0^{\infty}\left[\varphi_{\pm}(r,0);\Omega_{\pm}(r)\right]rJ_1(\lambda r)\,dr.$$

Тогда из (1.3) - (1.4) относительно $\bar{\varphi}_{+}(\lambda)$ и $\bar{\Omega}_{+}(\lambda)$ получим следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases}\bar{\varphi}_{+}(\lambda)+\dfrac{\bar{\Omega}_{+}(\lambda)}{\lambda G_{+}}\operatorname{cth}(\lambda H_{+})=\dfrac{\bar{f}_{+}(\lambda)}{\lambda G_{+}\operatorname{sh}(\lambda H_{+})}-\dfrac{\bar{\Omega}_{-}(\lambda)}{\lambda G_{+}}\operatorname{cth}(\lambda H_{-})-\bar{\varphi}_{-}(\lambda);\\[2ex] \bar{\varphi}_{+}(\lambda)-\dfrac{\bar{\Omega}_{+}(\lambda)}{\lambda G_{+}}\operatorname{cth}(\lambda H_{-})=-\dfrac{\bar{f}_{+}(\lambda)}{\lambda G_{-}\operatorname{sh}(\lambda H_{-})}-\dfrac{\bar{\Omega}_{-}(\lambda)}{\lambda G_{-}}\operatorname{cth}(\lambda H_{+})+\bar{\varphi}_{+}(\lambda).\end{cases}$$

Решение этой системы представляется формулами

$$\bar{\varphi}_{+}(\lambda)=-\frac{1}{\operatorname{cth}(\lambda H_{+})+k\operatorname{cth}(\lambda H_{-})}\left\{\left[k\operatorname{cth}(\lambda H_{-})-\operatorname{cth}(\lambda H_{+})\right]\bar{\varphi}_{-}(\lambda)+\frac{2\bar{\Omega}_{-}(\lambda)}{\lambda G_{-}}\times\right.$$

$$\left.\times\operatorname{cth}(\lambda H_{+})\operatorname{cth}(\lambda H_{-})-\frac{\bar{f}_{+}(\lambda)\operatorname{cth}(\lambda H_{-})}{\lambda G_{-}\operatorname{sh}(\lambda H_{+})}+\frac{\bar{f}_{-}(\lambda)\operatorname{cth}(\lambda H_{+})}{\lambda G_{-}\operatorname{sh}(\lambda H_{-})}\right\};\quad k=\frac{G_{+}}{G_{-}};\qquad(1.5)$$

$$\bar{\Omega}_{+}(\lambda)=-\frac{1}{\operatorname{cth}(\lambda H_{+})+k\operatorname{cth}(\lambda H_{-})}\left\{2G_{+}\lambda\bar{\varphi}_{-}(\lambda)+\left[\operatorname{cth}(\lambda H_{+})-k\operatorname{cth}(\lambda H_{-})\right]\bar{\Omega}_{-}(\lambda)-\right.$$

$$\left.-\frac{\bar{f}_{+}(\lambda)}{\operatorname{sh}(\lambda H_{+})}-\frac{k\bar{f}_{-}(\lambda)}{\operatorname{sh}(\lambda H_{-})}\right\}.$$

Далее к (1.5) применим формулу обратного преобразования Ханкеля. Можем записать

1) $$\int_0^\infty\frac{k\operatorname{cth}(\lambda H_{-})-\operatorname{cth}(\lambda H_{+})}{\operatorname{cth}(\lambda H_{+})+k\operatorname{cth}(\lambda H_{-})}\bar{\varphi}_{-}(\lambda)\lambda J_1(\lambda r)\,d\lambda=\frac{k}{1+k}\int_0^\infty\bar{\varphi}_{-}(\lambda)\lambda J_1(\lambda r)\,d\lambda+$$

$$+\int_0^\infty\left[\frac{k\operatorname{cth}(\lambda H_{-})}{\operatorname{cth}(\lambda H_{+})+k\operatorname{cth}(\lambda H_{-})}-\frac{k}{1+k}\right]\bar{\varphi}_{-}(\lambda)\lambda J_1(\lambda r)\,d\lambda-\frac{1}{1+k}\int_0^\infty\bar{\varphi}_{-}(\lambda)\lambda J_1(\lambda r)\,d\lambda-$$

$$-\int_0^\infty\left[\frac{\operatorname{cth}(\lambda H_{+})}{\operatorname{cth}(\lambda H_{+})+k\operatorname{cth}(\lambda H_{-})}-\frac{1}{1+k}\right]\bar{\varphi}_{-}(\lambda)\lambda J_1(\lambda r)\,d\lambda=\frac{k-1}{k+1}\varphi_{-}(r)+$$

$$+\frac{2k}{1+k}\int_0^\infty\frac{\operatorname{cth}(\lambda H_{-})-\operatorname{cth}(\lambda H_{+})}{\operatorname{cth}(\lambda H_{+})+k\operatorname{cth}(\lambda H_{-})}\bar{\varphi}_{-}(\lambda)\lambda J_1(\lambda r)\,d\lambda=\frac{k-1}{k+1}\varphi_{-}(r)+$$

$$+\frac{2k}{1+k}\int_0^\infty\frac{\left[\operatorname{cth}(\lambda H_{-})-1\right]-\left[\operatorname{cth}(\lambda H_{+})-1\right]}{\operatorname{cth}(\lambda H_{+})+k\operatorname{cth}(\lambda H_{-})}\bar{\varphi}_{-}(\lambda)\lambda J_1(\lambda r)\,d\lambda=\frac{k-1}{k+1}\varphi_{-}(r)-$$

$$-\int_0^a\varphi_{-}(\rho)\rho\,d\rho\left\{\int_0^\infty\frac{\lambda e^{-\lambda H_{+}}J_1(\lambda r)J_1(\lambda\rho)\,d\lambda}{\operatorname{sh}(\lambda H_{+})\left[\operatorname{cth}(\lambda H_{+})+k\operatorname{cth}(\lambda H_{-})\right]}-\int_0^\infty\frac{\lambda e^{-\lambda H_{-}}J_1(\lambda r)J_1(\lambda\rho)\,d\lambda}{\operatorname{sh}(\lambda H_{-})\left[\operatorname{cth}(\lambda H_{+})+k\operatorname{cth}(\lambda H_{-})\right]}\right\};$$

вполне аналогичным образом

2) $$\frac{2}{G_{-}}\int_0^\infty\frac{\operatorname{cth}(\lambda H_{+})\operatorname{cth}(\lambda H_{-})}{\operatorname{cth}(\lambda H_{+})+k\operatorname{cth}(\lambda H_{-})}\bar{\Omega}_{-}(\lambda)J_1(\lambda r)\,d\lambda=\frac{2}{(1+k)G_{-}}\int_0^a\Omega_{-}(\rho)\rho\,d\rho\int_0^\infty J_1(\lambda r)J_1(\lambda\rho)\,d\lambda+$$

$$+\frac{2}{(1+k)G_{-}}\int_0^a\Omega_{-}(\rho)\rho\,d\rho\left\{\int_0^\infty\frac{\operatorname{cth}(\lambda H_{+})e^{-\lambda H_{-}}J_1(\lambda r)J_1(\lambda\rho)\,d\lambda}{\operatorname{sh}(\lambda H_{-})\left[\operatorname{cth}(\lambda H_{+})+k\operatorname{cth}(\lambda H_{-})\right]}+\right.$$

$$\left.+k\int_0^\infty\frac{\operatorname{cth}(\lambda H_{-})e^{-\lambda H_{+}}J_1(\lambda r)J_1(\lambda\rho)\,d\lambda}{\operatorname{sh}(\lambda H_{+})\left[\operatorname{cth}(\lambda H_{+})+k\operatorname{cth}(\lambda H_{-})\right]}\right\};$$

3) $\frac{1}{G_-}\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{cth}(\lambda H_-)\overline{f}_+(\lambda)\lambda J_1(\lambda r)d\lambda}{\lambda \operatorname{sh}(\lambda H_+)\left[\operatorname{cth}(\lambda H_+)+k\operatorname{cth}(\lambda H_-)\right]}=\frac{1}{G_-}\int\limits_0^\infty f_+(\rho)\rho d\rho\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{cth}(\lambda H_-)J_1(\lambda r)J_1(\lambda\rho)d\lambda}{\operatorname{sh}(\lambda H_+)\left[\operatorname{cth}(\lambda H_+)+k\operatorname{cth}(\lambda H_-)\right]};$

$$\frac{1}{G_-}\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{cth}(\lambda H_+)\overline{f}_-(\lambda)J_1(\lambda r)d\lambda}{\operatorname{sh}(\lambda H_-)\left[\operatorname{cth}(\lambda H_+)+k\operatorname{cth}(\lambda H_-)\right]}=\frac{1}{G_-}\int\limits_0^\infty f_-(\rho)\rho d\rho\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{cth}(\lambda H_+)J_1(\lambda r)J_1(\lambda\rho)d\lambda}{\operatorname{sh}(\lambda H_-)\left[\operatorname{cth}(\lambda H_+)+k\operatorname{cth}(\lambda H_-)\right]}.$$

В результате

$$\begin{aligned}\varphi_+(r)=&-\frac{k-1}{k+1}\varphi_-(r)+\int\limits_0^a\left[K_+(r,\rho)-K_-(r,\rho)\right]\varphi_-(\rho)\rho d\rho-\\&-\frac{2}{(1+k)G_-}\int\limits_0^a\left[K(r,\rho)+L_+(r,\rho)+kL_-(r,\rho)\right]\Omega_-(\rho)\rho d\rho+\\&+\frac{1}{G_-}\int\limits_0^\infty M_+(r,\rho)f_+(\rho)\rho d\rho-\frac{1}{G_-}\int\limits_0^\infty M_-(r,\rho)f_-(\rho)\rho d\rho;\ (0<r<\infty)\end{aligned}\tag{1.6}$$

$$K(r,\rho)=\int\limits_0^\infty J_1(\lambda r)J_1(\lambda\rho)d\lambda;\ K_\pm(r,\rho)=\int\limits_0^\infty\frac{\lambda e^{-\lambda H_\pm}J_1(\lambda r)J_1(\lambda\rho)d\lambda}{\operatorname{sh}(\lambda H_\pm)\left[\operatorname{cth}(\lambda H_+)+k\operatorname{cth}(\lambda H_-)\right]};$$

$$L_\pm(r,\rho)=\int\limits_0^\infty\frac{\operatorname{cth}(\lambda H_\pm)e^{-\lambda H_\mp}J_1(\lambda r)J_1(\lambda\rho)d\lambda}{\operatorname{sh}(\lambda H_\mp)\left[\operatorname{cth}(\lambda H_+)+k\operatorname{cth}(\lambda H_-)\right]};\ M_\pm(r,\rho)=\int\limits_0^\infty\frac{\operatorname{cth}(\lambda H_\mp)J_1(\lambda r)J_1(\lambda\rho)d\lambda}{\operatorname{sh}(\lambda H_\pm)\left[\operatorname{cth}(\lambda H_+)+k\operatorname{cth}(\lambda H_-)\right]}.$$

Теперь формулу обратного преобразования Ханкеля применим ко второму равенству (1.5). Можем записать

$$\begin{aligned}\int\limits_0^\infty\frac{\lambda^2\overline{\varphi}_-(\lambda)J_1(\lambda r)d\lambda}{\operatorname{cth}(\lambda H_+)+k\operatorname{cth}(\lambda H_-)}=&\frac{1}{1+k}\int\limits_0^\infty\lambda^2\overline{\varphi}_-(\lambda)J_1(\lambda r)d\lambda+\\\int\limits_0^\infty&\left[\frac{1}{\operatorname{cth}(\lambda H_+)+k\operatorname{cth}(\lambda H_-)}-\frac{1}{1+k}\right]\lambda^2\overline{\varphi}_-(\lambda)J_1(\lambda r)d\lambda.\end{aligned}$$

Первый интеграл можно преобразовать следующим образом:

$$\int\limits_0^\infty\overline{\varphi}_-(\lambda)\lambda^2J_1(\lambda r)d\lambda=-\frac{d}{dr}\int\limits_0^\infty J_0(\lambda r)\lambda\overline{\varphi}_-(\lambda)d\lambda=-\frac{d}{dr}\int\limits_0^\infty J_0(\lambda r)\lambda d\lambda\int\limits_0^a\varphi_-(\rho)\rho J_1(\lambda\rho)d\rho=$$

$$=\frac{d}{dr}\int\limits_0^a\varphi_-(\rho)\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\int\limits_0^\infty J_0(\lambda r)J_0(\lambda\rho)d\lambda.$$

Отсюда после интегрирования по частям будем иметь

$$\int\limits_0^\infty\overline{\varphi}_-(\lambda)\lambda^2d\lambda=-\frac{d}{dr}\int\limits_0^a\left[\varphi_-(\rho)\rho\right]'d\rho\int\limits_0^\infty J_0(\lambda r)J_0(\lambda\rho)d\lambda.$$

Далее второй интеграл и соответствующие интегралы от остасльных слагаемых во второром равенстве (1.5) можно преобразовать способом, совершенным аналогично примененному выше. В результате, окончательно получим

$$\frac{\Omega_+(r)}{G_+}=\frac{2}{1+k}\int_0^a R_0(r,\rho)\psi'(\rho)d\rho-\frac{2}{1+k}\int_0^a\left[R_+(r,\rho)+kR_-(r,\rho)\right]\psi(\rho)d\rho-$$

$$-\frac{1-k}{1+k}\frac{\Omega_-(r)}{G_{+|}}-\frac{2k}{(1+k)G_+}\int_0^a\left[K_+(r,\rho)-K_-(r,\rho)\right]\Omega_-(\rho)\rho d\rho+$$

$$+\frac{1}{G_+}\int_0^\infty N_+(r,\rho)f_+(\rho)\rho d\rho+\frac{k}{G_+}\int_0^\infty N_-(r,\rho)f_-(\rho)\rho d\rho;$$

$$R_0(r,\rho)=\int_0^\infty J_0(\lambda r)J_0(\lambda\rho)d\lambda;\ R_\pm(r,\rho)=\int_0^\infty\frac{\lambda^2e^{-\lambda H_\pm}J_1(\lambda r)J_1(\lambda\rho)d\lambda}{\operatorname{sh}(\lambda H_\pm)\left[\operatorname{cth}(\lambda H_+)+k\operatorname{cth}(\lambda H_-)\right]};$$

$$N_\pm(x,s)=\int_0^\infty\frac{\lambda J_1(\lambda x)J_1(\lambda s)d\lambda}{\operatorname{sh}(\lambda H_\pm)\left[\operatorname{cth}(\lambda H_+)+k\operatorname{cth}(\lambda H_-)\right]};\tag{1.7}$$

выражения остальных ядер приведены выше.

Обращатимся к задаче о включении и рассмотрим ключевое уравнение (1.6). Приняв во внимание, что перемещения в плоскости стыка, в том числе на включении, непрерывны, обнаружим, что

$$\varphi_-(r)\equiv0,\ \varphi_+(r)=\omega_0r\quad(0\le r\le a),$$

где ω_0– угол поворота включения, подлежащий определению. Для определения половины скачка неизвестных касательных напряжений $\Omega_-(r)=\left(\tau_+(r)-\tau_-(r)\right)/2$ получим следующее ИУ Фредгольма первого рода:

$$\frac{2}{(1+k)G_-}\int_0^a\left[K(r,\rho)+L_+(r,\rho)+kL_-(r,\rho)\right]\Omega_-(\rho)\rho d\rho=f(r)\quad(0<r<a),\tag{1.8}$$

$$f(r)=\frac{1}{G_-}\int_0^\infty M_+(r,\rho)f_+(\rho)\rho d\rho-\frac{1}{G_-}\int_0^\infty M_-(r,\rho)f_-(\rho)\rho d\rho-\omega_0r.$$

Запишем также условие равновесия включения:

$$\int_0^a\Omega_-(\rho)\rho d\rho=0,\tag{1.9}$$

откуда определяется параметр ω_0.

В (1.8) и (1.9) введем безразмерные величины, полагая

$$x=r/a,\ s=\rho/a,\ \chi_-(x)=\Omega_-(ax)/G_-,\ \ g_\pm(x)=f_\pm(ax)/G_-,\ f_0(x)=\frac{1+k}{2}f(ax).$$

В результате определяющее интегральное уравнение (1.8) примет вид

$$\int_0^1 \left[K_0(x,s) + L_+^{(0)}(x,s) + kL_-^{(0)}(x,s) \right] \chi_-(s) s ds = f_0(x) \quad (0 < x < 1), \quad (1.10)$$

а условие (1.9) – вид

$$\int_0^1 \chi_-(s) s ds = 0. \quad (1.11)$$

Таким образом, задача о включении описывается определяющим интегральным уравнением (1.10) при условии (1.11), где

$$K_0(x,s) = aK(ax,as);\ L_\pm^{(0)}(x,s) = aL_\pm(ax,as);\ M_\pm^{(0)}(x,s) = aM_\pm(ax,as);$$

$$f_0(x) = \frac{1+k}{2} f(ax) = \int_0^\infty M_+^{(0)}(x,s) g_+(s) s ds - \int_0^\infty M_-^{(0)}(x,s) g_-(s) s ds.$$

Рассматривая же ключевое уравнение (1.7) на круговой трещине, для определения неизвестной функции $\psi(r)$ получим следующее ИДУ:

$$\int_0^a R_0(r,\rho)\psi'(\rho) d\rho - \int_0^a \left[R_+(r,\rho) + kR_-(r,\rho) \right] \psi(\rho) d\rho = g(r) \quad (0 < r < a)$$

$$g(r) = \frac{1+k}{2G_{+|}} \Omega_+(r) - \frac{1-k}{2G_{+|}} \Omega_-(r) + \frac{k}{G_+} \int_0^a \left[K_+(r,\rho) - K_-(r,\rho) \right] \Omega_-(\rho) \rho d\rho - \quad (1.12)$$

$$- \frac{1+k}{2G_{+|}} \int_0^\infty N_+(r,\rho) f_+(\rho) \rho d\rho - \frac{k(1+k)}{2G_+} \int_0^\infty N_-(r,\rho) f_-(\rho) \rho d\rho.$$

ИДУ (1.12) должно рассматриваться при условии

$$\psi(r)\big|_{r=a} = 0, \quad (1.13)$$

вытекающем из условия непрерывности перемещений на граничной окружности трещины.

В (1.12) – (1.13) также введем безразмерные величины

$$x = r/a,\ s = \rho/a;\ h_\pm = H_\pm/a;\ g_\pm(x) = f_\pm(ax)/2G_+;$$

$$\Omega_\pm^{(0)}(x) = \Omega_\pm(ax)/G_+ = \left[\tau_+(ax) \pm \tau_-(ax) \right]/2G_+;\ \psi_0(x) = \psi(ax)/a^2;$$

$$R_0^{(0)}(x,s) = \int_0^\infty J_0(\alpha r) J_0(\alpha\rho) d\alpha;\ R_\pm^{(0)}(x,s) = \int_0^\infty \frac{\alpha^2 e^{-\lambda H_\pm} J_1(\alpha r) J_1(\alpha\rho) d\alpha}{\operatorname{sh}(\alpha h_\pm)\left[\operatorname{cth}(\alpha h_+) + k \operatorname{cth}(\alpha h_-) \right]};$$

$$K_\pm^{(0)}(x,s) = a^2 K_\pm(ax,as) = \int_0^\infty \frac{\alpha e^{-\alpha h_\pm} J_1(\alpha x) J_1(\alpha s) d\alpha}{\operatorname{sh}(\alpha h_\pm)\left[\operatorname{cth}(\alpha h_+) + k \operatorname{cth}(\alpha h_-) \right]};\ (\alpha = a\lambda)$$

$$N_\pm^{(0)}(x,s) = a^2 N_\pm(ax,as) = \int_0^\infty \frac{\alpha J_1(\alpha x) J_1(\alpha s) d\alpha}{\operatorname{sh}(\alpha h_\pm)\left[\operatorname{cth}(\alpha h_+) + k \operatorname{cth}(\alpha h_-) \right]}.$$

В результате определяющее ИДУ (1.12) примет вид

$$\frac{d}{dx}\int_0^1 R_0^{(0)}(x,s)\psi_0'(s)ds-\int_0^1\left[R_+^{(0)}(x,s)+kR_-^{(0)}(x,s)\right]\psi(s)ds=g_0(x)\quad (0<x<1)\tag{1.14}$$

$$g_0(x)=(1+k)\Omega_+^{(0)}(x)+(1-k)\Omega_-^{(0)}(x)+2k\int_0^1\left[K_+^{(0)}(x,s)-K_-^{(0)}(x,s)\right]\Omega_-^{(0)}(s)sds-$$

$$-(1+k)\int_0^\infty N_+^{(0)}(x,s)f_+^{(0)}(s)sds-k(1+k)\int_0^\infty N_-^{(0)}(x,s)f_-^{(0)}(s)sds,$$

а условие (1.13) – вид

$$\psi_0(1)=0\,.\tag{1.15}$$

Таким образом, задача о круговой трещине при осесимметричном кручении составного упругого слоя описывается ИДУ (1.14) - (1.15).

Отметим, что после того, как построено решение определяющего интегрального уравнения (1.8) -(1.9) или (1.10) - (1.11), полусумма касательных контактных напряжений на берегах включения, а также касательные напряжения вне трещины вплоскости $z=0$ можно определить из ключевого уравнения (1.7), где следует положить $\varphi_-(r)\equiv 0$. Таким же образом после решения уравнения (1.12)-(1.13) или (1.14)-(1.15) из того же уравнения (1.7) можно найти касательные напряжения вне трещины в плоскости $z=0$.

Перейдем к модели деформирования тонкого упругого слоя при осесимметричном кручении, представляющей аналог известной модели Мелана для стрингера [17, 18]. С этой целью для упругого слоя $\Omega=\{0\le r<\infty;-\pi<\varphi\le\pi;0\le z\le h\}$ с модулем сдвига G рассмотрим следующую граничную задачу:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial r}+\dfrac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2}-\dfrac{u_\varphi}{r^2}=0 & (0<r<\infty;0<z<h)\\ \tau_{z\varphi}\big|_{z=0}=G\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial z}\bigg|_{z=0}=\tau(r); \qquad \tau_{z\varphi}\big|_{z=h}=G\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial z}\bigg|_{z=h}=\chi(r) & (0<r<\infty);\\ \tau_{r\varphi}^2+\tau_{z\varphi}^2\to 0 \quad \text{при} \quad r^2+z^2\to\infty. & \end{cases}\tag{1.16}$$

К этой граничной задаче применим преобразование Ханкеля, полагая

$$\left\{\overline{u}_\varphi(\lambda,z);\overline{\tau}(\lambda);\overline{\chi}(\lambda)\right\}=\int_0^\infty\left[u_\varphi(r,z);\tau(r);\chi(r)\right]J_1(\lambda r)rdr.$$

Тогда в трансформантах Ханкеля задача (1.16) запишется в виде

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\overline{u}_\varphi}{dz^2} - \lambda^2 \overline{u}_\varphi = 0 & (0 < z < h) \\ \left.\dfrac{d\overline{u}_\varphi}{dz}\right|_{z=0} = \dfrac{\overline{\tau}(\lambda)}{G}; \ \left.\dfrac{d\overline{u}_\varphi}{dz}\right|_{z=h} = \dfrac{\overline{\chi}(\lambda)}{G}. \end{cases}$$

Решение этой граничной задачи представляется формулой

$$\overline{u}_\varphi(\lambda, z) = \frac{1}{\lambda G \operatorname{sh}(\lambda h)}\left[\operatorname{ch}(\lambda z)\overline{\mathrm{X}}(\lambda) - \operatorname{ch}\lambda(z-h)\overline{\tau}(\lambda)\right] \quad (0 \le z \le h). \tag{1.17}$$

Далее это равенство запишем в виде

$$\lambda G \operatorname{sh}(\lambda h)\overline{u}_\varphi(\lambda, z) = \operatorname{ch}(\lambda z)\overline{\mathrm{X}}(\lambda) - \operatorname{ch}\lambda(z-h)\overline{\tau}(\lambda) \tag{1.17a}$$

и воспользуемся известными разложениями

$$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots, \quad \operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots.$$

Ограничиваясь в (1.17) такими разложениями порядка λ^2, получим

$$Gh\lambda^2 \overline{u}_\varphi(\lambda, z) = \overline{\mathrm{X}}(\lambda) - \overline{\tau}(\lambda) + \frac{\lambda^2 z^2}{2}\overline{\mathrm{X}}(\lambda) - \frac{\lambda^2}{2}(z-h)^2\overline{\tau}(\lambda). \tag{1.18}$$

Рассмотрим два случая:

1) $z = 0$. Тогда из (1.18) будем иметь

$$Gh\lambda^2 \overline{u}_\varphi(\lambda, 0) = \overline{\mathrm{X}}(\lambda) - \overline{\tau}(\lambda) - \frac{\lambda^2 h^2}{2}\overline{\tau}(\lambda) \quad (0 < \lambda < \infty).$$

Отсюда по формуле обратного преобразования Ханкеля с использованием известной формулы из [7] (с. 79, ф-ла (2.32)) получим

$$Gh\left(\frac{d^2u_\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du_\varphi}{dr} - \frac{u_\varphi}{r^2}\right) = \tau(r) - \chi(r) - \frac{h^2}{2}\left(\frac{d^2\tau}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\tau}{dr} - \frac{\tau}{r^2}\right) \quad (z = 0;\ 0 < r < \infty). \tag{1.19}$$

Таким образом, механическое поведение упругого тонкого материального волокна-слоя $z = 0$ в рамках принятой точности описывается дифференциальным уравнением (1.19).

Теперь в (1.19) перейдем к пределам $G \to \infty, h \to 0$ таким образом, чтобы Gh – жесткость материального тонкого слоя оставалась постоянной: Gh=const. В результате по аналогии с известными результатами из [17, 18] придем к модели Мелана при кручении тонкого упругого слоя:

$$Gh\left(\frac{d^2u_\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du_\varphi}{dr} - \frac{u_\varphi}{r^2}\right) = \tau(r) - \chi(r) \quad (0 < r < \infty). \tag{1.20}$$

Если же, в частности, положить $\chi(r) = \tau(r)$, то из (1.19) получим известную модель Винклера

$$u_\varphi = -\frac{h}{2G}\tau \quad (0 < r < \infty)$$

с коэффициентом постели $h/2G$.

2) $z = h$. Тогда из (1.17a) будем иметь

$$Gh\lambda^2 \overline{u}_\varphi(\lambda, h) = \overline{\chi}(\lambda) - \overline{\tau}(\lambda) + \frac{\lambda^2 h^2}{2}\overline{\chi}(\lambda) \qquad (0 < \lambda < \infty),$$

откуда при помощи формулы обратного преобразования Ханкеля находим

$$Gh\left(\frac{d^2 u_\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du_\varphi}{dr} - \frac{u_\varphi}{r^2}\right) = \tau(r) - \chi(r) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{d^2\chi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\chi}{dr} - \frac{\chi}{r^2}\right) \quad (z = h;\ 0 < r < \infty). \quad (1.21)$$

Дифференциальным уравнением (1.21) описывается, в рамках принятой точности, деформированное состояние упругого тонкого волокна-слоя $z = h$. Из (1.21), как выше, снова опять получить модель (1.20) и модель Винклера $u_\varphi = \chi h/2G$ с коэффициентом постели $h/2G$.

2. Аналог задачи Гриффитса. При осесимметричном кручении рассмотрим также аналог известной задачи Гриффитса [15,16]. Пусть упругое пространство $\Omega = \{0 \le r < \infty; -\pi < \varphi \le \pi; -\infty < z < \infty\}$ с модулем сдвига G на бесконечности скручивается равномерно распределёнными касательными силами интенсивности $\tau = \mathrm{const}$. В плоскости $z = 0$ расположена трещина круговой формы радиуса a. Как обычно, действующие на бесконечности силы перенесем на берега трещины, полагая

$$\tau^+_{z\varphi}\Big|_{z=+0} = -T(r) = \begin{cases} -\tau & (0 \le r < a); \\ -\chi(r) & (r > a). \end{cases} \quad (2.1)$$

Чтобы на берегах трещины отсутствовали касательные силы, к решению граничной задачи для верхнего упругого полупространства при условии (2.1) следует добавить τ:

$$\tau_{z\varphi}\Big|_{z=+0} = \tau^+_{z\varphi}\Big|_{z=+0} + \tau.$$

А эта граничная задача запишется в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u^+_\varphi}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u^+_\varphi}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 u^+_\varphi}{\partial z^2} - \dfrac{u^+_\varphi}{r^2} = 0 & (0 \le r < \infty; 0 < z < \infty) \\ \tau^+_{z\varphi}\Big|_{z=+0} = -T(r) & (0 \le r < \infty); \\ \tau^2_{z\varphi} + \tau^2_{zr} \to 0 \quad \textit{при} & r^2 + z^2 \to \infty. \end{cases} \quad (2.2)$$

В трансформантах Ханкеля граничная задача (2.2) приобретает форму

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 \overline{u}^+_\varphi}{dz^2} - \lambda^2 \overline{u}^+_\varphi = 0 & (0 < z < \infty) \\ G\dfrac{d\overline{u}^+_\varphi}{dz}\Big|_{z=+0} = -\overline{T}(\lambda) \end{cases}$$

и обладает исчезающим на бесконечности решением

$$\overline{u}_\varphi^+(\lambda, z) = \overline{T}(\lambda) e^{-\lambda z} / \lambda G \quad (0 \le z < \infty; 0 < \lambda < \infty).$$

Отсюда

$$T(\lambda) = G\lambda \overline{u}_\varphi^+(\lambda, +0) \quad (0 < \lambda < \infty)$$

и по формуле обратного преобразования Ханкеля, приняв во внимание сделанное выше, находим

$$T(r) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dr}\int_0^a R_0(r,\rho)\left[\varphi_-(\rho)\rho\right]' d\rho; \qquad \varphi_-(r) = 2u_\varphi^+(r,+0).$$

Так как $T(r) = -\tau$ при $0 < r < a$, то придем к следующему определяющему ИДУ:

$$\frac{d}{dr}\int_0^a R_0(r,\rho)\left[\varphi_-(\rho)\rho\right]' d\rho = 2\tau \quad (0 < r < a); \;\; \varphi_-(a) = 0$$

или, после интегрирования по r, к следующему ИДУ:

$$\int_0^a R_0(r,\rho)\left[\varphi_-(\rho)\rho\right]' d\rho = 2\tau r + C \quad (0 < r < a); \;\; \varphi_-(a) = 0. \qquad (2.3)$$

Здесь, как выше, можно ввести безразмерные величины. ИДУ (2.3) можно получить также предельными переходами $H_\pm \to \infty$ из ИДУ (1.12).

Заключение. В статье получены новые типы ИУ и ИДУ. На основании изложенных здесь результатов в дальнейшем будут построены и исследованы решения определяющих уравнений рассматриваемых задач. Численным анализом будут выявлены закономерности изменения характеристик этих задач.

Институт механики НАН РА
e-mail: smkhitaryan39@rambler.ru

Е. Г. Канецян, М. С. Мкртчян,
член-корреспондент НАН РА С. М. Мхитарян

Определяющие уравнения деформирования упругого слоя во взаимодействии с концентраторами напряжений при осесимметричном кручении

При помощи интегрального преобразования Ханкеля выводятся определяющие интегральные и другие уравнения задач о напряженно-деформированном состоянии кусочно-однородного упругого слоя с концентраторами напряжений типа тонкостенного включения или трещины круговой формы при осесимметричном кручении. При этом, в частности, рассматривается аналог известной задачи Гриффитса, когда упругое однородное изотропное пространство с круговой трещиной на бесконечности скручивается равномерно распределенными касательными силами. Рассматривается также аналог известной модели Мелана для стрингера в случае осесимметричного кручения тонкого упругого слоя/

Հ. Գ. Կանեցյան, Մ.Ս. Մկրտչյան,
ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ս. Մ. Մխիթարյան

Առանցքահամաչափ ոլորման ժամանակ լարումների կենտրոնացուցիչների առկայությամբ կտոր առ կտոր համասեռ շերտի դեֆորմացման որոշիչ հավասարումները

Հանկելի ինտեգրալ ձևափոխության օգնությամբ արտածվում են շրջանաձև բարակապատ ներդրակի կամ շրջանաձև ճաքի տիպի լարումների կենտրոնացուցիչներ պարունակող կտոր առ կտոր համասեռ առաձգական շերտի դեֆորմացիայի որոշիչ ինտեգրալ և մյուս հավասարումները՝ առանցքահամաչափ ոլորման ժամանակ: Մասնավորապես, դիտարկվում է Գրիֆիտսի հայտնի խնդրի անալոգը, երբ շրջանային ճաքով գծային համասեռ իզոտրոպ առաձգական տարածությունը անվերջում ոլորվում է հավասարաչափ բաշխված շոշափող ուժերով: Դիտարկվում է նաև ստրինգերի համար Մելանի հայտնի մոդելի անալոգը՝ բարակապատ առաձգական շերտի առանցքահամաչափ ոլորման դեպքում: Արտածվում է, այդ մոդելի շրջանակներում, առաձգական բարակապատ շերտի դեֆորմացիայի որոշիչ դիֆերենցիալ հավասարումները:

E. G. Kanetsyan, M. S. Mkrtchyan,
corresponding member of NAS RA S. M. Mkhitaryan

Governing Equations of Deformation of an Elastic Layer Interacting with Stress Concentrators under Axisymmetric Torsion

Using Hankel’s Integral transformation, the governing integral and other equations of the problems of the stress-strain state of a piecewise homogeneous elastic layer with stress concentrators such as a thin-walled inclusion or a circular crack under axisymmetric torsion are derived. In particular, an analog of the well-known Griffith problem is considered when an elastic homogeneous isotropic space with a circular crack is twisted at infinity by uniformly distributed tangential forces. In addition, an analog of the well-known Melan model for a stringer is considered for a thin elastic layer under axisymmetric torsion.

Литература

1. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л.* Кручение упругих тел. М. Физматгиз. 1963. 688 с.
2. *Лурье А. И.* Теория упругости. М. Наука. 1970. 940 с.
3. *Ляв А. Е.* Математическая теория упругости. М. ОНТИ. 1935. 674 с.

4. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М. Наука. 1966. 708 с.
5. *Новацкий В.* Теория упругости. М. Мир. 1975. 872 с.
6. Развитие теории контактных задач в СССР. Под ред. Л. А. Галина. М. Наука. 1976. 493 с.
7. *Снеддон М.* Преобразование Фурье. М. ИЛ. 1955. 668 с.
8. Reissner E., Sagoci H. – J. Appl. Phys. 1944. V. 15. Iss. 9. P. 652-654.
9. *Florence A. L.* Quart. J. – Mech. Appl. Math. 1961. V. 14. Iss. 4. P. 453-459.
10. *Кир Л. М.* Прикладная механика. Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Серия E. 1964. № 3
11. *Rahman M.* – Int. J. Solids Struct. 2000. V. 37. № 8. P. 1119-1132. DOI: 10.1016/s0020-7683(98)00277-7.
12. *Su J., Ke L. L., Wang Y. S.* – Int. J. Solids Struct. 2016. V. 90. P. 45-59. DOI: 10.1016/j.ijsolstr. 2016.04.011.
13. *Гаспарян А. В., Мхитарян С. М., Саакян А. В.* – Изв. НАН РА. Механика. 2022. Т. 75. № 3. С. 20-41.
14. *Канецян Е. Г., Мкртчян М. С., Мхитарян С. М.* – Доклады НАН РА. 2022. Т. 122. № 4. С. 265-276.
15. *Griffith A. A.* – Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. V. 221.1920. P. 163-198.
16. *Griffith A. A.* – Proc. First Internat. Congress Appl. Mech. Delft. 1924. P. 55-63.
17. *Melan E.* – Ingr.-Arch. 1932. Bd. 3. № 2. S. 123-129.
18. *Buffer H.* – Österr. Ing.-Arch. 1964. Bd. 18. № 3–4. S. 284-292.