ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 123 2023 № 2

## ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3
DOI:10.54503/0321-1339-2023.123.2-31

**В. Т. Япуджян**

# Об одной смешанной 3D задаче теории упругости для ортотропной пластинки

(Представлено академиком Л. А. Агаловяном 29/III 2023)

**Ключевые слова:** *ортотропная пластинка, упругость, трехмерная задача, асимптотическое решение.*

**Введение.** Классическая теория пластин и оболочек рассматривает лишь один класс краевых задач теории упругости. Считается, что на лицевых поверхностях пластинки заданы условия первой краевой задачи теории упругости, т.е. заданы значения соответствующих трех компонент тензора напряжений. Гипотезы классической теории пластин и оболочек не применимы, когда на лицевых поверхностях заданы значения компонент вектора перемещения или смешанные условия [1]. Для решения подобных классов задач эффективным оказался асимптотический метод решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений. Найдена принципиально новая асимптотика для компонент тензора напряжений и вектора перемещения, позволившая решать подобные классы задач [1, 2]. Найденная асимптотика позволяет найти решения также динамических задач теории упругости для тонких тел [3].

В данной работе найдено асимптотическое решение трехмерной задачи для ортотропной прямоугольной пластинки, когда на верхней лицевой поверхности пластинки заданы смешанные условия, а нижняя лицевая поверхность жестко закреплена.

**Основные уравнения и постановка задачи.** Имеем прямоугольную пластинку размерами $a, b, 2h$, которая занимает область (рис. 1).

$$D=\left\{(x,y,z):\ 0\le \mathrm{x}\le a,\ 0\le \mathrm{y}\le b,\ -h\le z\le h, h<<l, l=\min(a,b)\right\}$$

Требуется найти решение уравнений равновесия прямоугольной пластинки

$$\frac{\partial\sigma_{jx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{jy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{jz}}{\partial z}+F_j\left(x,y,z\right)=0,\quad j=x,y,z, \tag{1}$$

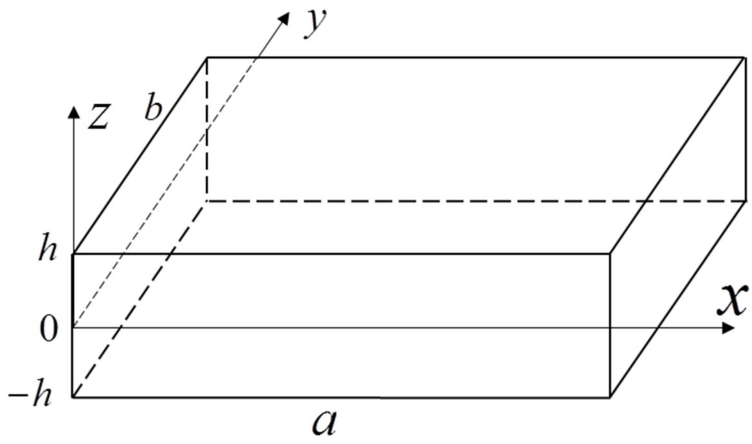


Рис. 1.

при соотношениях упругости

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_{xx}=a_{11}\sigma_{xx}+a_{12}\sigma_{yy}+a_{13}\sigma_{zz};\quad \varepsilon_{yy}=a_{12}\sigma_{xx}+a_{22}\sigma_{yy}+a_{23}\sigma_{zz};\\
&\varepsilon_{zz}=a_{13}\sigma_{xx}+a_{23}\sigma_{yy}+a_{33}\sigma_{zz};\quad \varepsilon_{xy}=a_{66}\sigma_{xy};\quad \varepsilon_{xz}=a_{55}\sigma_{xz};\quad \varepsilon_{yz}=a_{44}\sigma_{yz},
\end{aligned}
\tag{2}
$$

и при следующих граничных условиях:

$$
\begin{aligned}
&w=-w^{+}(x,y);\quad \sigma_{xz}=0;\quad \sigma_{yz}=0, \text{ при } z=h,\\
&u=0;\quad v=0;\quad w=0, \text{ при } z=-h.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Условия на боковых поверхностях пластинки обсудим позже.

**Асимптотический метод решения задачи.** Используя известные соотношения между деформациями и перемещениями и перейдя в (1) и (2) к безразмерным координатам и перемещениям:

$$
\xi=\frac{x}{l};\quad \eta=\frac{y}{l};\quad \zeta=\frac{z}{h};\quad U=\frac{u}{l};\quad V=\frac{v}{l};\quad W=\frac{w}{l},
\tag{4}
$$

получим:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_{jx}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{jy}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{jz}}{\partial\zeta}+lF_j=0,\quad \varepsilon=\frac{h}{l};\\
&\frac{\partial U}{\partial\xi}=a_{11}\sigma_{xx}+a_{12}\sigma_{yy}+a_{13}\sigma_{zz};\quad \frac{\partial V}{\partial\eta}=a_{12}\sigma_{xx}+a_{22}\sigma_{yy}+a_{23}\sigma_{zz};\\
&\varepsilon^{-1}\frac{\partial W}{\partial\zeta}=a_{13}\sigma_{xx}+a_{23}\sigma_{yy}+a_{33}\sigma_{zz};\quad \frac{\partial U}{\partial\eta}+\frac{\partial V}{\partial\xi}=a_{66}\sigma_{xy};\\
&\frac{\partial W}{\partial\xi}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial U}{\partial\zeta}=a_{55}\sigma_{xz};\quad \frac{\partial W}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial V}{\partial\zeta}=a_{44}\sigma_{yz}.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Решение сингулярно возмущенной системы (5) складывается из решений внешней задачи $\left(I^{out}\right)$ и пограничного слоя $\left(I^{b}\right)$:

$$I = I^{out} + I_b. \tag{6}$$

Решение внешней задачи будем искать в виде [1]

$$I^{out} = \varepsilon^{q_i + s} I^{(s)}, \quad s = \overline{0, N}, \tag{7}$$

где $q_i = -1$ для $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}$, $q_i = 0$ для $U, V, W$, $s = \overline{0, N}$ означает, что в (7) по немому (повторяющемуся) индексу *s* происходит суммирование по целочисленным значениям *s* от нуля до числа приближений *N*. Подставив (7) в систему (5) и приравняв в каждом уравнении соответствующие коэффициенты при ε, получим:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \sigma_{jx}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{jy}^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{jz}^{(s)}}{\partial \zeta} + F_j^{(s)} = 0, \ F_j^{(0)} = \frac{h^2}{l} F_j, \ F_j^{(s)} = 0, s \neq 0; \\
\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} = a_{11}\sigma_{xx}^{(s)} + a_{12}\sigma_{yy}^{(s)} + a_{13}\sigma_{zz}^{(s)}; \quad \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta} = a_{12}\sigma_{xx}^{(s)} + a_{22}\sigma_{yy}^{(s)} + a_{23}\sigma_{zz}^{(s)}; \\
\frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta} = a_{13}\sigma_{xx}^{(s)} + a_{23}\sigma_{yy}^{(s)} + a_{33}\sigma_{zz}^{(s)}; \quad \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi} = a_{66}\sigma_{xy}^{(s)}; \\
\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta} = a_{55}\sigma_{xz}^{(s)}; \quad \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta} = a_{44}\sigma_{yz}^{(s)}.
\end{gathered} \tag{8}$$

Из системы (8) напряжения можно выразить через перемещения $U^{(s)}, V^{(s)}, W^{(s)}$:

$$\begin{gathered}
\sigma_{xy}^{(s)} = \frac{1}{a_{66}}\left(\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi}\right); \quad \sigma_{xx}^{(s)} = \alpha_1 \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} - \alpha_2 \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta} + \alpha_3 \frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta}; \\
\sigma_{xz}^{(s)} = \frac{1}{a_{55}}\left(\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta}\right); \quad \sigma_{yy}^{(s)} = -\alpha_2 \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} + \alpha_4 \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta} - \alpha_5 \frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta}; \\
\sigma_{yz}^{(s)} = \frac{1}{a_{44}}\left(\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta}\right); \quad \sigma_{zz}^{(s)} = \alpha_3 \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} - \alpha_5 \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta} + \alpha_6 \frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta},
\end{gathered} \tag{9}$$

где

$$\alpha_1=\frac{\left(a_{22}a_{33}-a_{23}^2\right)}{\Delta};\quad \alpha_2=\frac{\left(a_{12}a_{33}-a_{13}a_{23}\right)}{\Delta};\quad \alpha_3=\frac{\left(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}\right)}{\Delta};$$
$$\alpha_4=\frac{\left(a_{11}a_{33}-a_{13}^2\right)}{\Delta};\quad \alpha_5=\frac{\left(a_{11}a_{23}-a_{12}a_{13}\right)}{\Delta};\quad \alpha_6=\frac{\left(a_{11}a_{22}-a_{12}^2\right)}{\Delta}. \tag{10}$$

Подставив значения напряжений $\sigma_{jz}^{(s)}$ в уравнения (8), для определения $U^{(s)}, V^{(s)}, W^{(s)}$ получим уравнения:

$$\frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial\zeta^2}=R_U^{(s)},\quad R_U^{(s)}=-a_{55}F_x^{(s)}-a_{55}\frac{\partial\sigma_{xx}^{(s-1)}}{\partial\xi}-a_{55}\frac{\partial\sigma_{xy}^{(s-1)}}{\partial\eta}-\frac{\partial^2 W^{(s-1)}}{\partial\xi\partial\zeta};$$
$$\frac{\partial^2 V^{(s)}}{\partial\zeta^2}=R_V^{(s)},\quad R_V^{(s)}=-a_{44}F_y^{(s)}-a_{44}\frac{\partial\sigma_{xy}^{(s-1)}}{\partial\xi}-a_{44}\frac{\partial\sigma_{yy}^{(s-1)}}{\partial\eta}-\frac{\partial^2 W^{(s-1)}}{\partial\eta\partial\zeta}; \tag{11}$$
$$\frac{\partial^2 W^{(s)}}{\partial\zeta^2}=R_w^{(s)},\ R_w^{(s)}=-\frac{1}{\alpha_6}F_z^{(s)}-\frac{1}{\alpha_6}\frac{\partial\sigma_{xz}^{(s-1)}}{\partial\xi}-\frac{1}{\alpha_6}\frac{\partial\sigma_{yz}^{(s-1)}}{\partial\eta}-\frac{\alpha_3}{\alpha_6}\frac{\partial^2 U^{(s-1)}}{\partial\xi\partial\zeta}+$$
$$+\frac{\alpha_5}{\alpha_6}\frac{\partial^2 V^{(s-1)}}{\partial\eta\partial\zeta}.$$

Решив уравнения (11), получим

$$U^{(s)}=\int_0^\zeta d\zeta\int_0^\zeta R_U^{(s)}\,d\zeta+\zeta A_1^{(s)}(\xi,\eta)+A_2^{(s)}(\xi,\eta);$$
$$V^{(s)}=\int_0^\zeta d\zeta\int_0^\zeta R_V^{(s)}\,d\zeta+\zeta B_1^{(s)}(\xi,\eta)+B_2^{(s)}(\xi,\eta); \tag{12}$$
$$W^{(s)}=\int_0^\zeta d\zeta\int_0^\zeta R_w^{(s)}\,d\zeta+\zeta C_1^{(s)}(\xi,\eta)+C_2^{(s)}(\xi,\eta).$$

Решение (12) содержит пока неизвестные функции $A_1^{(s)}, A_2^{(s)}, B_1^{(s)}, B_2^{(s)}$, $C_1^{(s)}, C_2^{(s)}$ однозначно определяющиеся из граничных условий (3), которые согласно (4) и (7) принимают вид:

$$\zeta=1:\quad W^{(s)}=-w^{+(s)},\ w^{+(0)}=w^{+}/l,\quad w^{+(s)}=0, s\neq 0;\quad \sigma_{xz}^{(s)}=0;\quad \sigma_{yz}^{(s)}=0;$$
$$\zeta=-1:\quad U^{(s)}=0;\quad V^{(s)}=0;\quad W^{(s)}=0. \tag{13}$$

Используя формулы (9), (12) и удовлетворив условиям (13), получим:

$$A_1^{(s)} = -\left(\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \xi}\right)_{\zeta=1} - \int_0^1 R_U^{(s)}\, d\zeta;\; A_2^{(s)} = -\int_0^{-1} d\zeta \int_0^{\zeta} R_U^{(s)}\, d\zeta - \left(\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \xi}\right)_{\zeta=1} -$$

$$-\int_0^1 R_U^{(s)}\, d\zeta; \quad B_1^{(s)} = -\left(\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \eta}\right)_{\zeta=1} - \int_0^1 R_V^{(s)}\, d\zeta;\; B_2^{(s)} = -\int_0^{-1} d\zeta \int_0^{\zeta} R_V^{(s)} d\zeta - \tag{14}$$

$$-\left(\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \eta}\right)_{\zeta=1} - \int_0^1 R_V^{(s)}\, d\zeta; \quad C_1^{(s)} = -\frac{1}{2}\left(w^{+(s)} + \int_0^1 d\zeta \int_0^{\zeta} R_w^{(s)}\, d\zeta - \int_0^{-1} d\zeta \int_0^{\zeta} R_w^{(s)}\, d\zeta\right);$$

$$C_2^{(s)} = -\frac{1}{2}\left(w^{+(s)} + \int_0^1 d\zeta \int_0^{\zeta} R_w^{(s)}\, d\zeta + \int_0^{-1} d\zeta \int_0^{\zeta} R_w^{(s)}\, d\zeta\right).$$

Имея значения функций $A_i^{(s)}, B_i^{(s)}, C_i^{(s)}$, по формулам (9) и (12) определяем все компоненты тензора напряжений и вектора перемещения.

**Математически точное решение.** Если функция $w^{+}(x,y)$ является алгебраическим многочленом, итерационный процесс обрывается на определенном приближении, зависящем от степени многочлена. В результате получим математически точное решение внешней задачи. Для иллюстрации сказанного пусть

$$w^{+} = l\left(a_0 + a_1\xi + a_2\eta\right); \quad F_x = 0; \quad F_y = 0; \quad F_z = -\rho g, \tag{15}$$

где последним слагаемым $F_z = -\rho g$ учитывается вес пластинки.

Согласно (8), (9), (11), (12), (14), (15) будем иметь:

при $s = 0$

$$W^{(0)} = \frac{1}{2}\left(\frac{h^2 \rho g}{\alpha_6 l}\left(\zeta^2 - 1\right) - \left(a_0 + a_1\xi + a_2\eta\right)\left(\zeta + 1\right)\right); \quad U^{(0)} = V^{(0)} =$$

$$= \sigma_{xz}^{(0)} = \sigma_{yz}^{(0)} = \sigma_{xy}^{(0)} = 0; \quad \sigma_{xx}^{(0)} = \alpha_3\left(\frac{h^2 \rho g}{\alpha_6 l}\zeta - \frac{1}{2}\left(a_0 + a_1\xi + a_2\eta\right)\right);$$

$$\sigma_{yy}^{(0)} = -\alpha_5\left(\frac{h^2 \rho g}{\alpha_6 l}\zeta - \frac{1}{2}\left(a_0 + a_1\xi + a_2\eta\right)\right); \tag{16}$$

$$\sigma_{zz}^{(0)} = \alpha_6\left(\frac{h^2 \rho g}{\alpha_6 l}\zeta - \frac{1}{2}\left(a_0 + a_1\xi + a_2\eta\right)\right),$$

при $s = 1$

$$U^{(1)}=a_1\left(\zeta+1+\frac{1}{4}\left(a_{55}\alpha_3+1\right)\left(\zeta^2-2\zeta-3\right)\right);$$

$$V^{(1)}=a_2\left(\zeta+1-\frac{1}{4}\left(a_{44}\alpha_5-1\right)\left(\zeta^2-2\zeta-3\right)\right);\quad W^{(1)}=\sigma_{xy}^{(1)}=\sigma_{xx}^{(1)}= \tag{17}$$

$$=\sigma_{yy}^{(1)}=\sigma_{zz}^{(1)}=0;\quad \sigma_{xz}^{(1)}=\frac{a_1\alpha_3}{2}(\zeta-1);\quad \sigma_{yz}^{(1)}=-\frac{a_2\alpha_5}{2}(\zeta-1).$$

Все величины при $s\geq 2$ тождественно равны нулю, т.е. итерация обрывается на приближении $s=1$, следовательно, имеем математически точное решение:

$$u=ha_1\left(\zeta+1+\frac{1}{4}\left(a_{55}\alpha_3+1\right)\left(\zeta^2-2\zeta-3\right)\right);$$

$$v=ha_2\left(\zeta+1-\frac{1}{4}\left(a_{44}\alpha_5-1\right)\left(\zeta^2-2\zeta-3\right)\right);$$

$$w=\frac{1}{2}\left(\frac{h^2\rho g}{\alpha_6}\left(\zeta^2-1\right)-l\left(a_0+a_1\xi+a_2\eta\right)\left(\zeta+1\right)\right);$$

$$\sigma_{xy}=0;\quad \sigma_{xz}=\frac{a_1\alpha_3}{2}(\zeta-1);\quad \sigma_{yz}=-\frac{a_2\alpha_5}{2}(\zeta-1); \tag{18}$$

$$\sigma_{xx}=\alpha_3\left(\frac{h\rho g}{\alpha_6}\zeta-\frac{l}{2h}\left(a_0+a_1\xi+a_2\eta\right)\right);$$

$$\sigma_{yy}=-\alpha_5\left(\frac{h\rho g}{\alpha_6}\zeta-\frac{l}{2h}\left(a_0+a_1\xi+a_2\eta\right)\right);$$

$$\sigma_{zz}=\alpha_6\left(\frac{h\rho g}{\alpha_6}\zeta-\frac{l}{2h}\left(a_0+a_1\xi+a_2\eta\right)\right).$$

В частности, если учесть лишь влияние веса, имеем

$$u=v=\sigma_{xy}=\sigma_{xz}=\sigma_{yz}=0;\quad w=\frac{1}{2}\frac{h^2\rho g}{\alpha_6}\left(\zeta^2-1\right); \tag{19}$$

$$\sigma_{xx}=\alpha_3\frac{h\rho g}{\alpha_6}\zeta;\quad \sigma_{yy}=-\alpha_5\frac{h\rho g}{\alpha_6}\zeta;\quad \sigma_{zz}=h\rho g\zeta.$$

Найденное решение внешней задачи, как правило, не будет удовлетворять граничным условиям на боковых поверхностях пластинки. Возникающая неувязка устраняется решением для пограничного слоя $(I_b)$. Это решение можно построить автономно и сращивать его с решением внешней задачи описанным в [1] способом. Этот вопрос требует отдельного рассмотрения.

Институт механики НАН РА
e-mail: varujan.yapujyan@mail.ru

**В. Т. Япуджян**

## Об одной смешанной 3D задаче теории упругости для ортотропной пластинки

Рассмотрена смешанная трехмерная задача для ортотропной прямоугольной пластинки. Верхней кромке пластинки сообщено нормальное перемещение, а тангенциальные компоненты напряжений равны нулю. Асимптотическим методом решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений найдено решение внешней задачи. Выявлены случаи, когда это решение становится математически точным. Приведен иллюстрационный пример, учитывающий также вес пластинки.

**Վ. Տ. Յափուջյան**

## Օրթոտրոպ սալի համար առաձգականության տեսության մի խառը 3D խնդրի մասին

Օրթոտրոպ ուղղանկյուն սալի համար դիտարկված է խառը եռաչափ խնդիր: Սալի վերին նիստին հաղորդված է նորմալ տեղափոխություն, իսկ լարումների տանգենցիալ բաղադրիչները հավասար են զրոյի: Սինգուլյար գրգռված դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման ասիմպտոտիկ մեթոդով որոշված է արտաքին խնդրի լուծումը: Ի հայտ են բերված դեպքեր, երբ այդ լուծումը դառնում է մաթեմատիկորեն ճշգրիտ: Առկա է իլյուստրացիոն օրինակ, որը հաշվի է առնում նաև սալի կշիռը:

**V. T. Yapujyan**

## On a Mixed 3D Problem of Elasticity Theory for an Orthotropic Plate

A mixed 3D problem is considered for the orthotropic rectangular plate. Normal displacement is transmitted to the upper edge of the plate, and tangent components of tensions are equal to zero. The solution of the outer problem is found by the asymptotic method of solving singularly perturbated differential equations. Cases, when that solution becomes mathematically precise are revealed. An illustrative example, which takes into account also the weight of the plate is given.

## Литература

1. *Агаловян Л. А.* Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М. Наука. 1997. 414 с.
2. *Агаловян Л. А.* – Межвуз. сб. Механика. Изд-во ЕГУ. 1982. Вып. 2. С. 7-12.
3. *Aghalovyan L. A.* Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells. Singapore, London. 2015.World Scientific. 376 p.