

## ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3

DOI: 10.54503/0321-1339-2023.123.1-30

**В. Т. Япуджян**

### **О вынужденных колебаниях ортотропной полосы при наличии внутреннего трения и кулонова трения между полосой и жестким основанием**

(Представлено академиком Л. А. Агаловяном 28/ХІІ 2022)

**Ключевые слова:** *плоская деформация, вынужденные колебания, ортотропное тело, жесткое основание, внутреннее трение, кулоново трение.*

**Введение.** Одной из важнейших причин затухания колебаний механических систем является рассеяние энергии внутри самой колебательной системы (внутреннее трение в материале и трение в сочленениях). При решении множества разнообразных задач важное значение имеют достоверные оценки влияния внутреннего трения [1]. В данной работе асимптотическим методом решена смешанная задача о вынужденных колебаниях ортотропного тела, находящегося в условиях плоской деформации, при наличии в теле внутреннего трения и кулонова трения между полосой и жестким основанием. Считается, что трение пропорционально скорости точек. Некоторые подобные динамические задачи эффективно решены асимптотическим методом решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений [2, 3].

**1. Постановка задачи, основные уравнения и соотношения.** Имеем ортотропное тело, которое находится в условиях плоской деформации и занимает область  $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq l, -h \leq y \leq h, h \ll l\}$  (рис. 1). Верхней кромке полосы сообщено нормальное перемещение, которое гармонически изменяется во времени. Полоса лежит на абсолютно жестком основании, и между полосой и основанием имеется кулоново трение. В полосе имеется также внутреннее трение, которое пропорционально скорости точек [1].

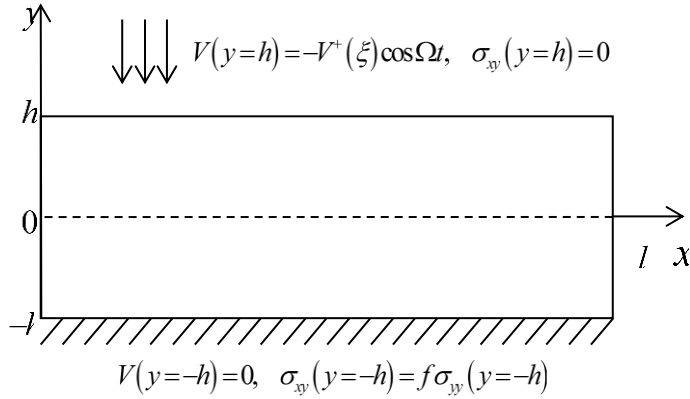


Рис. 1.

Требуется найти в области  $D$  решение уравнений движения с учетом внутреннего трения:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} - K \frac{\partial u}{\partial t} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} - K \frac{\partial v}{\partial t} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (1)$$

при соотношениях упругости [4]

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \beta_{11} \sigma_{xx} + \beta_{12} \sigma_{yy}; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \beta_{12} \sigma_{xx} + \beta_{22} \sigma_{yy}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \beta_{66} \sigma_{xy}, \quad (2)$$

и граничных условиях

$$V(x, h, t) = -V^+(\xi) \cos \Omega t; \quad \sigma_{xy}(x, h, t) = 0; \quad \xi = \frac{x}{l}; \quad (3)$$

$$V(x, -h, t) = 0; \quad \sigma_{xy}(x, -h, t) = f \sigma_{yy}(x, -h, t).$$

**2. Решение сформулированной задачи.** Для решения задачи в уравнениях движения (1) и соотношениях упругости (2) перейдем к безразмерным координатам и перемещениям:

$$\xi = \frac{x}{l}; \quad \zeta = \frac{y}{h}; \quad U = \frac{u}{l}; \quad V = \frac{v}{l}. \quad (4)$$

Согласно (4) уравнения (1) и соотношения (2) примут вид

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial \zeta} - Kl^2 \frac{\partial U}{\partial t} = \rho l^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}; \quad \varepsilon = \frac{h}{l}; \quad (5)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial \zeta} - Kl^2 \frac{\partial V}{\partial t} = \rho l^2 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2};$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial \xi} &= \beta_{11} \sigma_{xx} + \beta_{12} \sigma_{yy}; & \varepsilon^{-1} \frac{\partial V}{\partial \zeta} &= \beta_{12} \sigma_{xx} + \beta_{22} \sigma_{yy}; \\ \varepsilon^{-1} \frac{\partial U}{\partial \zeta} + \frac{\partial V}{\partial \xi} &= \beta_{66} \sigma_{xy}.\end{aligned}\quad (6)$$

Решение задачи будем искать в виде

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha\beta}(x, y, t) &= \sigma_{jkl}(\xi, \zeta) \sin \Omega t + \sigma_{jkl}(\xi, \zeta) \cos \Omega t, \\ \alpha, \beta &= x, y, \quad j, k = 1, 2; \\ U(x, y, t) &= U_I(\xi, \zeta) \sin \Omega t + U_{II}(\xi, \zeta) \cos \Omega t, \quad (U, V).\end{aligned}\quad (7)$$

Подставив (7) в (5), (6) и приравняв в каждом уравнении соответствующие коэффициенты, при  $\sin \Omega t, \cos \Omega t$  получим сингулярно возмущенную малым параметром  $\varepsilon = h/l$  систему, решение которой (I) складывается из решений внешней задачи ( $I^{out}$ ) и пограничного слоя ( $I^b$ ).

Решение внешней задачи ищем в виде [5]

$$\begin{aligned}\sigma_{ijk}^{out} &= \varepsilon^{-1+s} \sigma_{ijk}^{(s)}(\xi, \zeta), \quad s = \overline{0, N}, \quad i, j = 1, 2, \quad k = I, II; \\ U_k^{out} &= \varepsilon^s U_k^{(s)}(\xi, \zeta), \quad (U, V).\end{aligned}\quad (8)$$

Подставив (8) в вышеуказанную преобразованную систему, получим новую систему относительно  $\sigma_{ijk}^{(s)}, U_k^{(s)}, V_k^{(s)}$ . Из этой системы все напряжения можно выразить через перемещения по формулам

$$\begin{aligned}\sigma_{12\gamma}^{(s)} &= \frac{1}{\beta_{66}} \left( \frac{\partial U_\gamma^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial V_\gamma^{(s-1)}}{\partial \xi} \right), \quad \gamma = I, II; \\ \sigma_{11\gamma}^{(s)} &= \frac{1}{\Delta} \left( -\beta_{12} \frac{\partial V_\gamma^{(s)}}{\partial \zeta} + \beta_{22} \frac{\partial U_\gamma^{(s-1)}}{\partial \xi} \right); \quad \Delta = \beta_{11} \beta_{22} - \beta_{12}^2; \\ \sigma_{22\gamma}^{(s)} &= \frac{1}{\Delta} \left( \beta_{11} \frac{\partial V_\gamma^{(s)}}{\partial \zeta} - \beta_{12} \frac{\partial U_\gamma^{(s-1)}}{\partial \xi} \right).\end{aligned}\quad (9)$$

$U_I^{(s)}$  определяется уравнением

$$\frac{\partial^4 U_I^{(s)}}{\partial \zeta^4} + 2\rho_1^2 \Omega^2 \beta_{66} \frac{\partial^2 U_I^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \beta_{66}^2 \Omega^2 (\rho_1^4 \Omega^2 + 4H^2) U_I^{(s)} = \beta_{66}^2 \Psi_{IU}^{(s-1)}, \quad (10)$$

где

$$\Psi_{IU}^{(s-1)} = l_1 R_{ul}^{(s-1)} - l_2 R_{ull}^{(s-1)}; \quad R_{ul}^{(s-1)} = -\frac{\partial \sigma_{11U}^{(s-1)}}{\partial \xi} - \frac{1}{\beta_{66}} \frac{\partial^2 V_I^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta}; \quad 2H = Kh^2, \rho_1^2 = \rho h^2; \quad (11)$$

$$R_{ull}^{(s-1)} = -\frac{\partial \sigma_{11Ul}^{(s-1)}}{\partial \xi} - \frac{1}{\beta_{66}} \frac{\partial^2 V_{II}^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta}; \quad l_1 = \frac{1}{\beta_{66}} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \rho_1^2 \Omega^2; \quad l_2 = 2H\Omega.$$

Решением уравнения (10) является

$$U_I^{(s)} = A_1^{(s)}(\xi)\varphi_1 + A_2^{(s)}(\xi)\varphi_2 + A_3^{(s)}(\xi)\varphi_3 + A_4^{(s)}(\xi)\varphi_4 + U_{I_4}^{(s-1)}, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \cos \sqrt{\Omega \beta_{66}} \alpha_2 \zeta ch \sqrt{\Omega \beta_{66}} \alpha_1 \zeta; & \varphi_2 &= \sin \sqrt{\Omega \beta_{66}} \alpha_2 \zeta sh \sqrt{\Omega \beta_{66}} \alpha_1 \zeta; \\ \varphi_3 &= \cos \sqrt{\Omega \beta_{66}} \alpha_2 \zeta sh \sqrt{\Omega \beta_{66}} \alpha_1 \zeta; & \varphi_4 &= \sin \sqrt{\Omega \beta_{66}} \alpha_2 \zeta ch \sqrt{\Omega \beta_{66}} \alpha_1 \zeta; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{2H}}{\sqrt{\rho_1^2 \Omega + \sqrt{\rho_1^4 \Omega^2 + 4H^2}}}; \quad \alpha_2 = \sqrt{\frac{\rho_1^2 \Omega + \sqrt{\rho_1^4 \Omega^2 + 4H^2}}{2}}.$$

Неизвестная функция  $U_{II}^{(s)}$  выражается через  $U_I^{(s)}$  по формуле

$$\begin{aligned} U_{II}^{(s)} &= \frac{1}{l_2} \left( R_{ul}^{(s-1)} - l_1 U_I^{(s)} \right) = A_1^{(s)} \varphi_2 - A_2^{(s)} \varphi_1 + A_3^{(s)} \varphi_4 - A_4^{(s)} \varphi_3 + \\ &+ \frac{1}{2H\Omega} \left( R_{ull}^{(s-1)} - \frac{1}{\beta_{66}} \frac{\partial^2 U_{I_4}^{(s-1)}}{\partial \zeta^2} - \rho_1^2 \Omega^2 U_{I_4}^{(s-1)} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

$V_I^{(s)}$  определяется уравнением

$$\frac{\partial^4 V_I^{(s)}}{\partial \zeta^4} + \frac{2\Delta \rho_1^2 \Omega^2}{\beta_{11}} \frac{\partial^2 V_I^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \frac{\Delta^2 \Omega^2 (\rho_1^4 \Omega^2 + 4H^2)}{\beta_{11}^2} V_I^{(s)} = \frac{\Delta^2}{\beta_{11}^2} \Psi_{IV}^{(s-1)}, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_{IV}^{(s-1)} &= l_3 R_{vI}^{(s-1)} - l_2 R_{vII}^{(s-1)}; \quad R_{vI}^{(s-1)} = \frac{\beta_{12}}{\Delta} \frac{\partial^2 U_I^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} - \frac{\partial \sigma_{12I}^{(s-1)}}{\partial \xi}; \\ R_{vII}^{(s-1)} &= \frac{\beta_{12}}{\Delta} \frac{\partial^2 U_{II}^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} - \frac{\partial \sigma_{12II}^{(s-1)}}{\partial \xi}; \quad l_3 = \frac{\beta_{11}}{\Delta} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \rho_1^2 \Omega^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Решением уравнения (15) является:

$$\begin{aligned}
V_I^{(s)} &= B_1^{(s)}\psi_1 + B_2^{(s)}\psi_2 + B_3^{(s)}\psi_3 + B_4^{(s)}\psi_4 + V_{I_4}^{(s-1)}; \\
\psi_1 &= \cos \sqrt{\frac{\Delta\Omega}{\beta_{11}}}\alpha_2\zeta ch \sqrt{\frac{\Delta\Omega}{\beta_{11}}}\alpha_1\zeta; \quad \psi_2 = \sin \sqrt{\frac{\Delta\Omega}{\beta_{11}}}\alpha_2\zeta sh \sqrt{\frac{\Delta\Omega}{\beta_{11}}}\alpha_1\zeta; \\
\psi_3 &= \cos \sqrt{\frac{\Delta\Omega}{\beta_{11}}}\alpha_2\zeta sh \sqrt{\frac{\Delta\Omega}{\beta_{11}}}\alpha_1\zeta; \quad \psi_4 = \sin \sqrt{\frac{\Delta\Omega}{\beta_{11}}}\alpha_2\zeta ch \sqrt{\frac{\Delta\Omega}{\beta_{11}}}\alpha_1\zeta.
\end{aligned} \tag{17}$$

После определения  $V_I^{(s)}$  неизвестная функция  $V_{II}^{(s)}$  выражается через  $V_I^{(s)}$  по формуле

$$\begin{aligned}
V_{II}^{(s)} &= B_1^{(s)}\psi_2 - B_2^{(s)}\psi_1 + B_3^{(s)}\psi_4 - B_4^{(s)}\psi_3 + \\
&+ \frac{1}{2H\Omega} \left( R_{VI}^{(s-1)} - \frac{\beta_{11}}{\Delta} \frac{\partial^2 V_{I_4}^{(s-1)}}{\partial \zeta^2} - \rho_1^2 \Omega^2 V_{I_4}^{(s-1)} \right).
\end{aligned} \tag{18}$$

**3. Определение неизвестных функций решения.** Решения  $U_\gamma^{(s)}, V_\gamma^{(s)}$  содержат пока неизвестные функции  $A_i^{(s)}(\xi), B_i^{(s)}(\xi)$ , которые однозначно определяются из граничных условий (3), согласно (7) принимающих вид

$$\begin{aligned}
\sigma_{12I}^{(s)}(\xi, 1) &= 0; \quad \sigma_{12II}^{(s)}(\xi, 1) = 0; \\
\sigma_{12I}^{(s)}(\xi, -1) &= f \sigma_{22I}^{(s)}(\xi, -1); \quad \sigma_{12II}^{(s)}(\xi, -1) = f \sigma_{22II}^{(s)}(\xi, -1); \\
V_I^{(s)}(\xi, 1) &= 0; \quad V_{II}^{(s)}(\xi, 1) = -V^{+(s)}, \quad V^{+(0)} = \frac{V^+}{l}, \quad V^{+(s)} = 0, \quad s \neq 0; \\
V_I^{(s)}(\xi, -1) &= 0; \quad V_{II}^{(s)}(\xi, -1) = 0.
\end{aligned} \tag{19}$$

Удовлетворив условиям (19) относительно перемещений  $V_\gamma^{(s)}$ , получим алгебраическую систему

$$\begin{aligned}
B_1^{(s)}b_4 + B_2^{(s)}b_3 + B_3^{(s)}b_2 + B_4^{(s)}b_1 &= Q_1^{(s)}; \\
B_1^{(s)}b_4 + B_2^{(s)}b_3 - B_3^{(s)}b_2 - B_4^{(s)}b_1 &= Q_2^{(s)}; \\
B_1^{(s)}b_3 - B_2^{(s)}b_4 + B_3^{(s)}b_1 - B_4^{(s)}b_2 &= Q_3^{(s)}; \\
B_1^{(s)}b_3 - B_2^{(s)}b_4 - B_3^{(s)}b_1 + B_4^{(s)}b_2 &= Q_4^{(s)},
\end{aligned} \tag{20}$$

где

$$b_i = \psi_{5-i}(\zeta = 1), \quad i = 1, 2, 3, 4;$$

$$\begin{aligned}
Q_1^{(s)} &= -\left(V_{I_u}^{(s-1)}\right)_{\zeta=1}; \quad Q_2^{(s)} = -\left(V_{I_u}^{(s-1)}\right)_{\zeta=-1}; \\
Q_3^{(s)} &= -V^{(s)} - \frac{1}{2H\Omega} \left( R_{VI}^{(s-1)} - \frac{\beta_{11}}{\Delta} \frac{\partial^2 V_{I_u}^{(s-1)}}{\partial \zeta^2} - \rho_1^2 \Omega^2 V_{I_u}^{(s-1)} \right)_{\zeta=1}; \\
Q_4^{(s)} &= -\frac{1}{2H\Omega} \left( R_{VI}^{(s-1)} - \frac{\beta_{11}}{\Delta} \frac{\partial^2 V_{I_u}^{(s-1)}}{\partial \zeta^2} - \rho_1^2 \Omega^2 V_{I_u}^{(s-1)} \right)_{\zeta=-1}.
\end{aligned} \tag{21}$$

Решением алгебраической системы (20) является:

$$\begin{aligned}
B_1^{(s)} &= \frac{1}{2(b_3^2 + b_4^2)} \left( b_4(Q_1^{(s)} + Q_2^{(s)}) + b_3(Q_3^{(s)} + Q_4^{(s)}) \right); \\
B_2^{(s)} &= \frac{1}{2(b_3^2 + b_4^2)} \left( b_3(Q_1^{(s)} + Q_2^{(s)}) - b_4(Q_3^{(s)} + Q_4^{(s)}) \right); \\
B_3^{(s)} &= \frac{1}{2(b_1^2 + b_2^2)} \left( b_2(Q_1^{(s)} - Q_2^{(s)}) + b_1(Q_3^{(s)} - Q_4^{(s)}) \right); \\
B_4^{(s)} &= \frac{1}{2(b_1^2 + b_2^2)} \left( b_1(Q_1^{(s)} - Q_2^{(s)}) - b_2(Q_3^{(s)} - Q_4^{(s)}) \right).
\end{aligned} \tag{22}$$

Удовлетворив условиям (19) относительно напряжений  $\sigma_{12\gamma}^{(s)}, \sigma_{22\gamma}^{(s)}$ , получим систему

$$\begin{aligned}
A_1^{(s)}M_1 + A_2^{(s)}M_2 + A_3^{(s)}M_3 + A_4^{(s)}M_4 &= P_1^{(s)}; \\
-A_1^{(s)}M_1 - A_2^{(s)}M_2 + A_3^{(s)}M_3 + A_4^{(s)}M_4 &= P_2^{(s)} + \gamma_1^{(s)}; \\
A_1^{(s)}M_2 - A_2^{(s)}M_1 + A_3^{(s)}M_4 - A_4^{(s)}M_3 &= P_3^{(s)}; \\
-A_1^{(s)}M_2 + A_2^{(s)}M_1 + A_3^{(s)}M_4 - A_4^{(s)}M_3 &= P_4^{(s)} + \gamma_2^{(s)},
\end{aligned} \tag{23}$$

где

$$\begin{aligned}
M_1 &= \alpha_1 a_2 - \alpha_2 a_1; \quad M_2 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2; \quad M_3 = \alpha_1 a_4 - \alpha_2 a_3; \\
M_4 &= \alpha_1 a_3 + \alpha_2 a_4; \quad a_i = \varphi_{5-i}(\zeta=1), \quad i=1,2,3,4;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_1^{(s)} &= -\frac{1}{\sqrt{\Omega\beta_{66}}} \left( \frac{\partial U_{I_u}^{(s-1)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial V_I^{(s-1)}}{\partial \xi} \right)_{\zeta=1}; \\
P_2^{(s)} &= \frac{f\sqrt{\beta_{66}}}{\Delta\sqrt{\Omega}} \left( \beta_{11} \frac{\partial V_{I_u}^{(s-1)}}{\partial \zeta} - \beta_{12} \frac{\partial U_I^{(s-1)}}{\partial \xi} \right)_{\zeta=-1} - \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{\Omega\beta_{66}}} \left( \frac{\partial U_{I_u}^{(s-1)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial V_I^{(s-1)}}{\partial \xi} \right)_{\zeta=-1}; \\
P_3^{(s)} &= -\frac{1}{\sqrt{\Omega\beta_{66}}} \left( \frac{1}{2H\Omega} \left( \frac{\partial R_{ul}^{(s-1)}}{\partial \zeta} - \frac{1}{\beta_{66}} \frac{\partial^3 U_{I_u}^{(s-1)}}{\partial \zeta^3} - \rho_1^2 \Omega^2 \frac{\partial U_{I_u}^{(s-1)}}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=1} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{\partial V_{II}^{(s-1)}}{\partial \xi} \right)_{\xi=-1} \Bigg); \\
P_4^{(s)} &= \frac{f\beta_{11}\beta_{66}}{2H\Omega\Delta\sqrt{\Omega\beta_{66}}} \left( \frac{\partial R_{VI}^{(s-1)}}{\partial \xi} - \frac{\beta_{11}}{\Delta} \frac{\partial^3 V_{Iq}^{(s-1)}}{\partial \xi^3} - \rho_1^2 \Omega^2 \frac{\partial V_{Iq}^{(s-1)}}{\partial \xi} \right)_{\xi=-1} - \quad (24) \\
& - \frac{f\beta_{12}\beta_{66}}{\Delta\sqrt{\Omega\beta_{66}}} \left( \frac{\partial U_{II}^{(s-1)}}{\partial \xi} \right)_{\xi=-1} - \frac{1}{\sqrt{\Omega\beta_{66}}} \left( \frac{\partial V_{II}^{(s-1)}}{\partial \xi} \right)_{\xi=-1} - \\
& - \frac{1}{2H\Omega\sqrt{\Omega\beta_{66}}} \left( \frac{\partial R_{uI}^{(s-1)}}{\partial \xi} - \frac{1}{\beta_{66}} \frac{\partial^3 U_{Iq}^{(s-1)}}{\partial \xi^3} - \rho_1^2 \Omega^2 \frac{\partial U_{Iq}^{(s-1)}}{\partial \xi} \right)_{\xi=-1}; \\
\gamma_1^{(s)} &= \frac{f\sqrt{\beta_{11}\beta_{66}}}{\sqrt{\Delta}} \left( B_1^{(s)}(\alpha_2 b_1 - \alpha_1 b_2) - B_2^{(s)}(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2) + \right. \\
& \left. + B_3^{(s)}(\alpha_1 b_4 - \alpha_2 b_3) + B_4^{(s)}(\alpha_1 b_3 + \alpha_2 b_4) \right); \\
\gamma_2^{(s)} &= \frac{f\sqrt{\beta_{11}\beta_{66}}}{\sqrt{\Delta}} \left( -B_1^{(s)}(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2) + B_2^{(s)}(\alpha_1 b_2 - \alpha_2 b_1) + \right. \\
& \left. + B_3^{(s)}(\alpha_1 b_3 + \alpha_2 b_4) + B_4^{(s)}(\alpha_2 b_3 - \alpha_1 b_4) \right).
\end{aligned}$$

Решением алгебраической системы (23) является:

$$\begin{aligned}
A_1^{(s)} &= \frac{1}{2(M_1^2 + M_2^2)} \left( M_1(P_1^{(s)} - P_2^{(s)} - \gamma_1^{(s)}) + M_2(P_3^{(s)} - P_4^{(s)} - \gamma_2^{(s)}) \right); \\
A_2^{(s)} &= \frac{1}{2(M_1^2 + M_2^2)} \left( M_2(P_1^{(s)} - P_2^{(s)} - \gamma_1^{(s)}) - M_1(P_3^{(s)} - P_4^{(s)} - \gamma_2^{(s)}) \right); \quad (25) \\
A_3^{(s)} &= \frac{1}{2(M_3^2 + M_4^2)} \left( M_3(P_1^{(s)} + P_2^{(s)} + \gamma_1^{(s)}) + M_4(P_3^{(s)} + P_4^{(s)} + \gamma_2^{(s)}) \right); \\
A_4^{(s)} &= \frac{1}{2(M_3^2 + M_4^2)} \left( M_4(P_1^{(s)} + P_2^{(s)} + \gamma_1^{(s)}) - M_3(P_3^{(s)} + P_4^{(s)} + \gamma_2^{(s)}) \right).
\end{aligned}$$

Имея значения функций  $A_i^{(s)}, B_i^{(s)}$ , по формулам (12), (14) определяем  $U_I^{(s)}, U_{II}^{(s)}$ , а по формулам (17), (18) –  $V_I^{(s)}, V_{II}^{(s)}$ . По формулам (9) определяются напряжения.

**4. О математически точных решениях.** Если входящая в граничные условия (3) функция  $V^+(\xi)$  является алгебраическим многочленом от  $\xi$ , итерационный процесс обрывается на определенном приближении, зависящем от степени многочлена. В результате получаем математически точное

решение во внешней задаче.

Для иллюстрации сказанного рассмотрим случай, когда

$$V^+ = \gamma_1 + \gamma_2 \xi. \quad (26)$$

При  $s = 0$ , согласно формулам (12), (21), (22), (24), (25) имеем

$$\begin{aligned} Q_1^{(0)} = Q_2^{(0)} = Q_4^{(0)} = 0, \quad Q_3^{(0)} &= -\frac{\gamma_1 + \gamma_2 \xi}{l}; \\ P_1^{(0)} = P_2^{(0)} = P_3^{(0)} = P_4^{(0)} &= 0; \\ B_1^{(0)} &= -\frac{b_3(\gamma_1 + \gamma_2 \xi)}{2(b_3^2 + b_4^2)l}; \quad B_2^{(0)} = \frac{b_4(\gamma_1 + \gamma_2 \xi)}{2(b_3^2 + b_4^2)l}; \\ B_3^{(0)} &= -\frac{b_1(\gamma_1 + \gamma_2 \xi)}{2(b_1^2 + b_2^2)l}; \quad B_4^{(0)} = \frac{b_2(\gamma_1 + \gamma_2 \xi)}{2(b_1^2 + b_2^2)l}; \\ A_1^{(0)} &= \frac{1}{2(M_1^2 + M_2^2)}(-M_1\gamma_1^{(0)} - M_2\gamma_2^{(0)}); \\ A_2^{(0)} &= \frac{1}{2(M_1^2 + M_2^2)}(-M_2\gamma_1^{(0)} + M_1\gamma_2^{(0)}); \\ A_3^{(0)} &= \frac{1}{2(M_3^2 + M_4^2)}(M_3\gamma_1^{(0)} + M_4\gamma_2^{(0)}); \\ A_4^{(0)} &= \frac{1}{2(M_3^2 + M_4^2)}(M_4\gamma_1^{(0)} - M_3\gamma_2^{(0)}), \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_1^{(0)} &= \frac{f(\gamma_1 + \gamma_2 \xi) \sqrt{\beta_{11}\beta_{66}}}{2l\sqrt{\Delta}}(b_3N_1 - b_4N_2 + b_1N_3 + b_2N_4); \\ \gamma_2^{(0)} &= \frac{f(\gamma_1 + \gamma_2 \xi) \sqrt{\beta_{11}\beta_{66}}}{2l\sqrt{\Delta}}(b_3N_2 + b_4N_1 - b_1N_4 + b_2N_3); \\ N_1 &= \frac{(\alpha_1b_2 - \alpha_2b_1)}{(b_3^2 + b_4^2)}; \quad N_2 = \frac{(\alpha_1b_1 + \alpha_2b_2)}{(b_3^2 + b_4^2)}; \\ N_3 &= \frac{(\alpha_2b_3 - \alpha_1b_4)}{(b_1^2 + b_2^2)}; \quad N_4 = \frac{(\alpha_1b_3 + \alpha_2b_4)}{(b_1^2 + b_2^2)}. \end{aligned}$$



Аналогичным образом вычисляются данные для  $s=1$  (из-за объемности их значения не приводим), а все величины при  $s \geq 2$  тождественно равны нулю, т.е. итерация обрывается на приближении  $s=1$ , следовательно имеем математически точное решение:

$$\begin{aligned}\sigma_{ijk}^{out} &= \varepsilon^{-1} \sigma_{ijk}^{(0)} + \sigma_{ijk}^{(1)}, \quad i, j = 1, 2, \quad k = I, II; \\ U_k^{out} &= U_k^{(0)} + \varepsilon U_k^{(1)}, \quad (U, V).\end{aligned}\tag{28}$$

Найденное в работе решение внешней задачи ( $I^{out}$ ), как правило, не будет удовлетворять условиям на торцевых сечениях полосы  $x=0, l$ . Возникающая неувязка устраняется решением для пограничного слоя ( $I^b$ ). Это решение можно построить автономно и сращивать его с решением внешней задачи описанным в [6] способом. Как показано в [6], величины пограничного слоя при удалении от торцов во внутрь полосы убывают экспоненциально.

**Заключение.** Определены решение внешней задачи и соответствующие ему компоненты вектора перемещения и тензора напряжений при наличии в полосе внутреннего трения и кулонова трения между полосой и жестким основанием. Полоса свободно лежит на жесткой подстилке, верхней кромке полосы сообщено нормальное перемещение, гармонически изменяющееся во времени. Если это перемещение зависит от продольной координаты полиномиально, итерация обрывается, и в результате получаем математически точное решение во внешней задаче.

Институт механики НАН РА  
e-mail: varujan.yarujyan@mail.ru

**В. Т. Япуджян**

**О вынужденных колебаниях ортотропной полосы при наличии внутреннего трения и кулонова трения между полосой и жестким основанием**

Решена задача о вынужденных колебаниях ортотропного тела, находящегося в условиях плоской деформации, при наличии в теле внутреннего трения, и кулонова трения между полосой и жестким основанием. Полоса опирается на абсолютно жесткую подстилку, и верхней кромке полосы сообщено нормальное перемещение, гармонически изменяющееся во времени. На верхней кромке касательное напряжение равно нулю. Найдено асимптотическое решение внешней задачи. Указаны случаи, когда решение становится математически точным, приведен иллюстрационный пример.

**Վ. Տ. Յափուջյան**

**Օրթոտրոպ շերտի ստիպողական տատանումների մասին,  
երբ առկա են ներքին շփում և կոլոնյան շփում  
շերտի և կոշտ հենարանի միջև**

Լուծված է հարթ դեֆորմացիոն վիճակում գտնվող օրթոտրոպ մարմնի ստիպողական տատանումների մասին խնդիրը, երբ առկա են ներքին շփում և կոլոնյան շփում շերտի և կոշտ հենարանի միջև: Շերտը հենված է բացարձակ կոշտ հենարանին, և շերտի վերին նիստին հաղորդված է ըստ ժամանակի հարմոնիկ փոփոխվող նորմալ տեղափոխություն: Վերին նիստում շոշափող լարումը հավասար է զրոյի: Որոշված է արտաքին խնդրի ասիմպտոտիկ լուծումը: Նշված են դեպքեր, երբ լուծումը դառնում է մաթեմատիկորեն ճշգրիտ, բերված է իլյուստրացիոն օրինակ:

**V. T. Yafujyan**

**On Forced Oscillations of Orthotropic Layer in the  
Presence of Internal Friction and Coulomb Friction  
Between Layer and Ridge Base**

The problem of forced oscillations of orthotropic body in a plane deformation state when there is an internal friction and Coulomb friction between layer and ridge base is solved. The layer rests on an absolute ridge base, and it is transmitted to the upper edge of the layer normal displacement, which changes harmonically in time. The tangential friction in the upper edge equals to zero. The anisotropic solution of the outer problem is determined. Cases where the solution becomes mathematically precise are noted, an illustrative example is given.

**Литература**

1. *Пановко Я. Г.* Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М. Физматгиз. 1960. 193 с. (*Panovko Y. G.* Internal Friction During Vibrations of Elastic Systems. M. Fizmatgiz. 1960. 193 p.).
2. *Aghalovyan L. A., Aghalovyan M. L., Zakaryan T. V.* – Mechanics of Solids. 2020. V. 55. № 7. P. 1062-1070.
3. *Ագալովյան Լ. Ա., Ագալովյան Մ. Լ., Յակարյան Թ. Վ.* – ДНАН РА. 2021. Т. 121. № 4. С. 279-287.
4. *Ագալովյան Լ. Ա.* – ДНАН РА. 2021. Т. 121. № 1. С. 54-60.
5. *Ագալովյան Լ. Ա.* – Межвуз. сб. Механика. Изд-во ЕГУ. 1982. Вып. 2. С. 7-12.
6. *Aghalovyan L. A.* Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells. Singapore. World Scientific. 2015. 376 p. (*Ագալովյան Լ. Ա.* Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М. Наука. 1997. 414 с.).