

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3

DOI: 10.54503/0321-1339-2023.123.1-21

В. С. Торосян, А. В. Погосян

О выявлении особенностей напряжений на границе прямоугольной области в одной задаче теории упругости

(Представлено академиком А. Б. Нерсесяном 7/XI 2022)

Ключевые слова: *вычисление разрывов(скачков) напряжений, улучшение сходимости рядов, точность удовлетворения граничных условий.*

Введение. Развитию методов решения граничных задач теории упругости для прямоугольника посвящены работы многих исследователей [1-17]. Основополагающие достижения в этой области отражены в известной монографии В. Т. Гринченко [1], многие фундаментальные результаты представлены в обзорной статье В. В. Мелешко [2]. Однако зачастую граничные условия, необходимые для выяснения качественных особенностей напряжений на границе и особенно вблизи угловых точек упругого тела, удовлетворяются не полностью. С настоящим исследованием непосредственно связана работа [15], в которой с помощью двойных тригонометрических рядов получено решение первой краевой плоской задачи теории упругости для прямоугольника при произвольном нагружении его кромок нормальными и тангенциальными напряжениями и произвольном распределении массовых сил. Однако автор в этой работе не ставил вопрос об особенностях напряженного состояния, порождаемых наличием особых точек границы. В настоящей статье, путем сочетания данного метода с новыми методами ускорения сходимости тригонометрических рядов Фурье (см. [18-20]), а также с использованием промежуточных численных результатов [21], предложен способ выявления возможных точек на границе (включая угловые точки) упругого тела, где напряжения (производные функции напряжений) могут иметь разрывы. В качестве примера рассматривается известная краевая задача (см. [3, 15]), но в более общем случае (см. также [8]).

1. Краткое описание метода М. М. Тодорова решения первой основной задачи теории упругости для прямоугольной области (под-

робности см. в [15]). Известно, что первая плоская задача теории упругости сводится к определению напряжений $X_x(x, y)$, $Y_y(x, y)$ и $X_y(x, y)$ из системы дифференциальных уравнений. В частных производных

$$\begin{aligned} \nabla^2(X_x + Y_y) + (1 + \mu) \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) &= 0 \\ \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + X &= 0, \quad \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + Y = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

так, чтобы для границ прямоугольника $D = \{0 \leq x \leq a; 0 \leq y \leq b\}$ выполнялись условия

$$\begin{aligned} X_x(a, y) &= f_1(y) & X_y(a, y) &= f_3(y) & (0 \leq y \leq b) \\ X_x(0, y) &= f_2(y) & X_y(0, y) &= f_4(y) & (0 \leq y \leq b) \\ Y_y(x, b) &= f_5(x) & X_y(x, b) &= f_6(x) & (0 \leq x \leq a) \\ Y_x(x, 0) &= f_7(x) & X_y(x, 0) &= f_8(x) & (0 \leq x \leq a) \end{aligned} \quad (2)$$

Далее предполагается, что функции f_i ($i = 1, 2, \dots, 8$) удовлетворяют условиям Дирихле разложения в ряд Фурье в соответствующих интервалах, а массовые силы $X(x, y)$, $Y(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в рассмотренной области.

Пусть функции $f_{ij}(x, y)$, $g_{ij}(x, y)$ и $h_{ij}(x, y)$ ($i = 1, 2, \dots; j = 1, 2, \dots$) образуют в рассматриваемой области три полные системы ортогональных функций. Тогда если нам удастся определить напряжения $X_x(x, y)$, $Y_y(x, y)$ и $X_y(x, y)$ так, чтобы левые части уравнения (1) удовлетворяли всем значениям i и j и условию ортогональности

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + X \right) f_{ij}(x, y) dx dy &= 0 \\ \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + Y \right) g_{ij}(x, y) dx dy &= 0 \\ \int_0^a \int_0^b \left(\nabla^2(X_x + Y_y) + (1 + \mu) \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \right) h_{ij}(x, y) dx dy &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

то из полноты пространства $L_2(D)$ (левые части уравнений (1) принадлежат пространству $L_2(D)$), вытекает, что $X_x(x, y), Y_y(x, y)$ и $X_y(x, y)$ удовлетворяют и уравнению (1).

Если положить

$$f_{ij}(x, y) = \frac{2}{a} \frac{2}{b} \sin \alpha_i x \cos \beta_j y, \quad g_{ij}(x, y) = \frac{2}{a} \frac{2}{b} \cos \alpha_i x \sin \beta_j y$$

$$h_{ij}(x, y) = \frac{2}{a} \frac{2}{b} \cos \alpha_i x \cos \beta_j y, \quad \left(\alpha_i = \frac{i\pi}{a}, \quad \beta_j = \frac{j\pi}{b} \right) \quad (4)$$

то получим решение поставленной задачи в виде

$$X_x(x, y) = \frac{1}{4} A_{00} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} A_{i0} \cos \alpha_i x + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} A_{0j} \cos \beta_j y + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} \cos \alpha_i x \cos \beta_j y,$$

$$Y_y(x, y) = \frac{1}{4} B_{00} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} B_{i0} \cos \alpha_i x + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} B_{0j} \cos \beta_j y + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} B_{ij} \cos \alpha_i x \cos \beta_j y,$$

$$Y_x(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} C_{ij} \sin \alpha_i x \sin \beta_j y. \quad (5)$$

Коэффициенты разложения A_{ij} , B_{ij} и C_{ij} определяются из четырех совокупностей бесконечных систем линейных уравнений, где каждая совокупность содержит две бесконечные системы. Регулярность этих систем исследована. В зависимости от выбора системы ортогональных функций (4) имеются другие способы представления решения задачи в виде двойных тригонометрических рядов. Уравнения равновесия действующих сил при таком подходе к решению краевой задачи (1)-(2) имеют следующий вид:

$$f_{10} - f_{20} - 2 \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} A_{i0} = 0, \quad f_{50} - f_{70} - 2 \sum_{j=1,3,\dots}^{\infty} B_{0j} = 0, \quad (6)$$

$$\text{где } A_{i0} = \frac{1}{\alpha_i} (d_{bi} - d_{0i} + X_{i0}), \quad B_{0j} = \frac{1}{\beta_j} (c_{aj} - c_{0j} + Y_{j0}), \quad (7)$$

$$d_{bi} = \frac{2}{a} \int_0^a \frac{2}{b} X_y(x, b) \sin \alpha_i x dx, \quad d_{0i} = \frac{2}{a} \int_0^a \frac{2}{b} X_y(x, 0) \sin \alpha_i x dx$$

$$c_{aj} = \frac{2}{b} \int_0^b \frac{2}{a} X_y(a, y) \sin \beta_j y dy, \quad c_{0j} = \frac{2}{b} \int_0^b \frac{2}{a} X_y(0, y) \sin \beta_j y dy$$

$$X_{i0} = \frac{2}{a} \frac{2}{b} \int_0^a \int_0^b X(x, y) \sin \alpha_i x dx dy, \quad Y_{0j} = \frac{2}{a} \frac{2}{b} \int_0^a \int_0^b X(x, y) \cos \beta_j y dx dy. \quad (8)$$

а $\frac{f_{10}}{2}, \frac{f_{20}}{2}, \frac{f_{50}}{2}, \frac{f_{70}}{2}$ – свободные члены разложения соответствующих функций в ряды Фурье по косинусам.

Следует отметить, что условия равновесия (6) всегда выполнимы, если главный момент внешних сил равен нулю.

2. Постановка задачи. Рассмотрим задачу растягивания квадратной пластинки симметричными относительно каждой из осей нагрузками, действующими по некоторым участкам (рис. 1). Ввиду того, что в данной краевой задаче отсутствуют массовые силы и тангенциальные нагружения по кромкам квадрата, в (5) имеем $A_{i0} = 0, B_{0j} = 0$ и, следовательно, решение

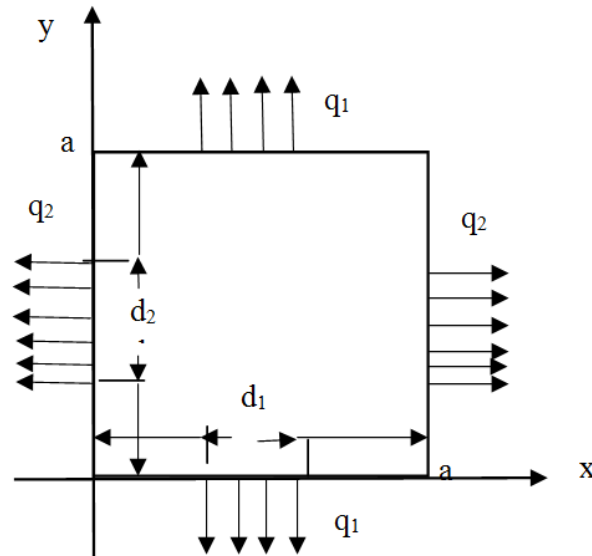


Рис. 1. Схематическое представление задачи.

задачи (1)-(2) примет следующий вид:

$$X_x(x, y) = \frac{1}{4} A_{00} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} A_{0j} \cos \beta_j y + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} \cos \alpha_i x \cos \beta_j y$$

$$Y_y(x, y) = \frac{1}{4} B_{00} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} B_{i0} \cos \alpha_i x + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} B_{ij} \cos \alpha_i x \cos \beta_j y \quad (9)$$

Коэффициенты разложения в этом случае в силу симметрии граничных условий определяются из одной совокупности, содержащей две бесконечные системы линейных алгебраических уравнений [3, 15]. Кроме того, из постановки задачи также следует, что тангенциальное напряжение на сторонах квадрата $X_y(x, y) = 0$, и в дальнейшем рассматривать его не будем.

3. Вычисление значений разрывов(скачков) напряжений на границе квадрата. В силу того, что граничные условия заданы симметрично относительно обеих осей симметрии квадрата, следует ожидать, что напряжения $X_x(x, 0), X_x(x, a)$ и $Y_y(0, y), Y_y(a, y)$ на отрезках $0 \leq x \leq a$ и $0 \leq y \leq a$ соответственно будут иметь тот же характер особенностей (см. также [21]), что и напряжения $Y_y(x, 0), Y_y(x, a)$ и $X_x(0, y), X_x(a, y)$, которые заданы на этих отрезках и являются кусочно -гладкими функциями. Исследование проводилось для напряжения $X_x(x, 0)$ (исследование других напряжений аналогично этому), Напряжение $X_x(x, 0)$ путем введения новых обозначений можно представить в привычном виде

$$X_x(x, 0) = \frac{h_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} h_i \cos \alpha_i x, \quad \frac{h_0}{2} = \frac{A_{00}}{4} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} A_{0j}, \quad h_i = \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} \quad (i=1, 2, \dots) \quad (10)$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $a = 1$. Введем следующие обозначения:

$$d_2 = y_2 - y_1, \quad d_1 = x_2 - x_1$$

$$A_1 = X_x(x_1 - 0, 0) - X_x(x_1 + 0, 0), \quad A_2 = X_x(x_2 - 0, 0) - X_x(x_2 + 0, 0) \quad (11)$$

Очевидно, $A_1 = -A_2$. Численный эксперимент проведен для двух случаев граничных условий рассматриваемой краевой задачи. Разрывы (скачки) A_1 и A_2 нормальных напряжений $X_x(x, 0)$ вычислялись путем, предложенным в работах [18-20] (скачки определяются посредством конечного количества коэффициентов Фурье $\{h_n\}, |n| \leq N$). Значения A_1 приведены в таблицах.

Таблица 1

$$q_2 = \frac{1}{2}, q_1 = 2, d_2 = 1, d_1 = \frac{1}{2}$$

	N=20	N=32	N=40
A_1	-0.452354	-0.435027	-0.422229

Таблица 2

$$q_1 = \frac{5}{3}, q_2 = \frac{5}{6}, d_1 = \frac{3}{5}, d_2 = \frac{1}{2}$$

	N=20	N=32	N=40
A_1	-0.370342	-0.354219	-0.350992

Данные, приведенные в таблицах, подтверждают, что нормальное напряжение $X_x(x, 0)$ на границе квадрата в двух точках имеет скачки. Следует отметить, что, как показывают численные результаты, в этих точках и на вершинах квадрата производная функции напряжения $X_x(x, 0)$ также имеет скачки.

4. Ускорение сходимости ряда Фурье (10). Улучшение сходимости ряда Фурье (10), фактически кусочно-гладкой на отрезке $[0, 1]$ функции $X_x(x, 0)$, проводим методом, предложенным в работе [20], на основе численных результатов, полученных для рассмотренной задачи при граничных условиях, указанных в табл. 1. Для сравнения, нормальные напряжения $X_x(x, 0)$ (рис. 2-4а) вычислялись как по формуле (7), так и посредством аппроксимационной формулы для $X_x(x, 0)$ [20] (на графиках они обозначены через $X_x^{(c)}(x, 0)$ (рис. 2-4б). Результаты численных расчетов приведены на рис. 2-4.

Таблица 3

	N=8	N=16	N=32
$Y_y(0.5, 0)$	1.88413	1.93897	1.96924
$Y_y^{(c)}(0.5, 0)$	2.0182	2.00436	2.00163

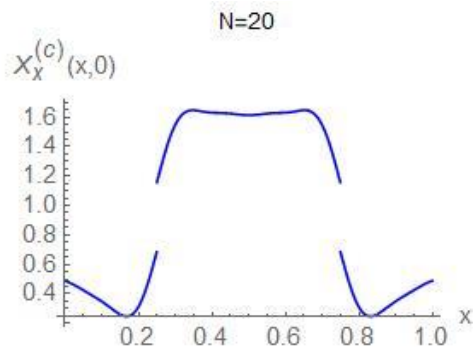
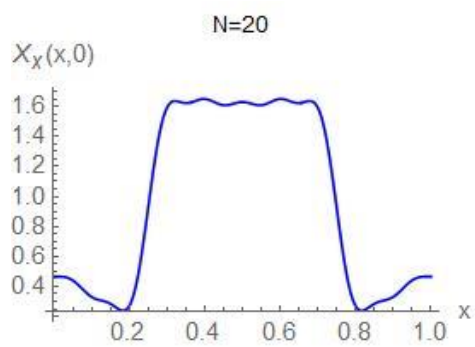


Рис.2.

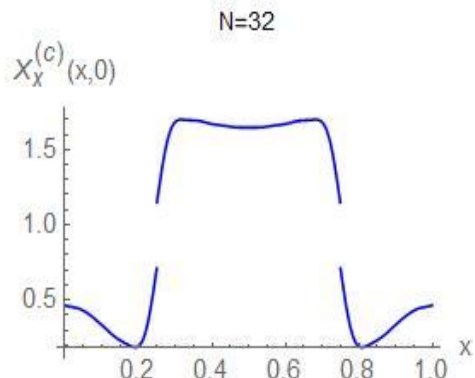
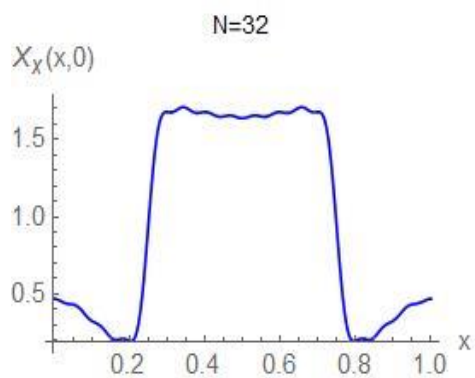


Рис.3.

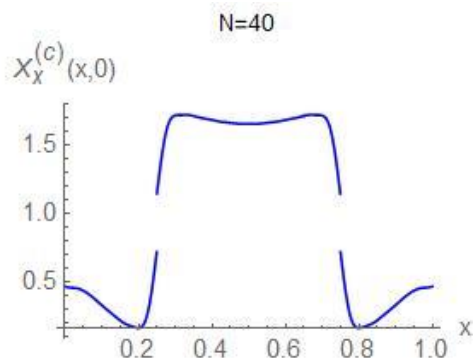
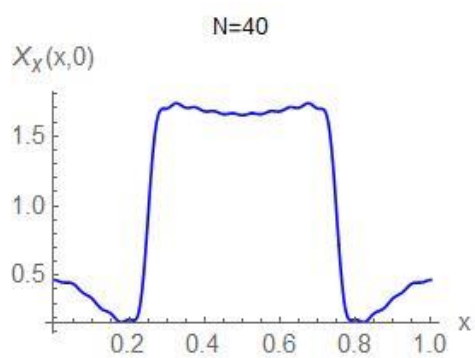


Рис. 4.

Кроме того, как и выше, теми же двумя способами рассчитаны значения напряжений $Y_y(0.5,0)$ (по условию задачи $Y_y(0.5,0) = 2$). Результаты вычислений представлены в табл. 3.

Графики на рис. 2-4 и данные, приведенные в табл. 3, очевидным образом указывают на эффективность предлагаемого способа выявления особых точек на границе упругого тела, что дает возможность вычислить с очень высокой точностью разрывы напряжений и провести улучшение сходимости рядов, представляющих напряжения на границе.

5. Заключение. Предложен конструктивный способ выявления возможных точек на границе (включая угловые точки) упругого тела, где напряжения могут иметь разрывы, что позволяет значительно повысить эффективность вычислений путем использования методов улучшения сходимости рядов и выяснить качественные особенности характеристик напряженно-деформированного состояния на границе упругого тела.

Институт механики НАН РА
e-mail.: vtorosyn@gmail.ru

В. С. Торосян, А. В. Погосян

О выявлении особенностей напряжений на границе прямоугольной области в одной задаче теории упругости

Предложен подход, который дает возможность найти все те точки на границе упругого тела, где напряжения могут иметь разрывы. Способ основан на сочетании метода решения плоской задачи теории упругости для прямоугольника с помощью двойных тригонометрических рядов с новыми методами ускорения сходимости рядов Фурье. Точность и вычислительная эффективность иллюстрируются на примере известной краевой задачи теории упругости.

Վ. Ս. Թորոսյան, Ա. Վ. Պոգոսյան

Առաձգականության տեսության մի խնդրում ուղղանկյուն տիրույթի սահմանին լարումների հասկանիչների բացահայտման մասին

Առաջարկվում է մոտեցում, որը հնարավորություն է տալիս գտնելու առանձնական մարմնի եզրի վրա գտնվող բոլոր այն կետերը, որտեղ լարումները կարող են ունենալ խզումներ(թռիչքներ): Եղանակը հիմնված է Ֆուրյեի կրկնակի եռանկյունաչափական շարքերի միջոցով ուղղանկյան համար առաձգականության տեսության հարթ խնդրի լուծման և Ֆուրյեի շարքերի զուգամիտության արագացման նոր մեթոդների զուգակցմամբ: Եղանակը կիրառվել է առաձգականության տեսության հայտնի եզրային խնդրի դեպքում: Բերված թվային փորձարկումների արդյունքները հաստատում են եղանակի ճշգրտությունը և թվային արդյունավետությունը:

V. S. Torosyan, A. V. Poghosyan

On Revealing Stress Features at the Boundary of a Rectangular Domain in a Problem of Elasticity Theory

A constructive method is proposed for revealing possible points on the boundary (in addition to corner points) of an elastic body, where tensions can have discontinuities. This fact makes it possible to significantly increase the efficiency of calculations by using methods for improving the convergence of series and identifying the qualitative features of the behavior of the characteristics of the stress-strain state at the boundary of an elastic body.

Литература

1. *Гринченко В. Т.* Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. Киев. Наукова думка. 1978. 264 с.
2. *Meleshko V. V.* – Appl. Sci. Res. 1998. V. 58. P. 217-249.
3. *Абрамян Б. Л.* – Прикл. математика и механика. 1957. Т. 21. Вып. 1. С. 89-101.
4. *Абрамян Б. Л., Манукян М. М.* – ДАН Арм. ССР. 1957. Т. 25. № 4. С. 177-184.
5. *Баблоян А. А., Гулканян Н. О.* – Изв. АН Арм. ССР. Серия физ.-мат. наук. 1969. Т. 22. № 1. С. 3-17.
6. *Валов Г. М.* – Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1961. № 3. С. 133-142.
7. *Галфаян П. О., Чобанян К. С.* – Прикл. математика и механика, 1966. Т. 30. Вып. 3. С. 569.-578.
8. *Гринберг Г. Л., Лебедев Н. Н., Уфлянд Я. С.* – Прикл. математика и механика. 1953, № 17. Вып. 1. С. 73-87.
9. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф.* – Тепловые напряжения в элементах конструкций. 1965. Вып. 5. С. 138-146.
10. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф.* – Прикл. механика. 1965. Т. 1. № 9. С.134-139.
11. *Лурье А. И.* – ПММ. 1942. Т. 6. Вып. 2-3. С. 151-168.
12. *Папкович П. Ф.* – ДАН СССР. 1940. Т. 27. № 4. С. 335-339.
13. *Прокопов В. К.* – ПММ. 1952. Т. 16. Вып. 1. С. 45-56.
14. *Филоненко-Бородич М. М.* – ПММ. 1946. Т. 10. Вып. 1. С. 193-208, 1946.
15. *Тодоров М. М.* – Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1959. № 4. С.185- 192.
16. *Папков С. О.* – Динамические системы. 2010. Вып. 28. С. 89-98.
17. *Торосян В. С.* – Изв. НАН Армении. Механика. 2013. Т. 66. № 1. С. 14- 22.
18. *Eckhoff K. S.* - Math. Comp. 1995. V. 64. № 210. P. 671-690.
19. *Нерсисян А. Б.* – ДНАН Армении. 2004. Т. 104. № 4. С. 273-278.
20. *Barkhudaryan A., Barkhudaryan R., Poghosyan A.* – Analysis in Theory and Applications. 2007. V. 23. № 3. P. 228-242.
21. *Batenkov D., Yomdin Y.* – Math. Comp. 2012. V. 81. P. 277-318.