

МЕХАНИКА

УДК 539.3

DOI: 10.54503/0321-1339-2023.123.1-12

Член-корреспондент НАН РА Ара С. Аветисян<sup>1</sup>, С. Л. Саакян<sup>2</sup>

**Отражение и прохождение форм волны сдвига  
 от границы раздела двух полубесконечных  
 частей упругого композитного волновода**

(Представлено 25/II 2023)

**Ключевые слова:** композитный волновод, волна сдвига, однонаправленное распространение, частоты волновых форм, отраженная форма, прошедшая форма.

**Введение.** Задача о направленном распространении гармонических волн в упругих композитных волноводах составляет предмет изучения многих исследователей. Вопросы об определении волновых полей в составных волноводах с различными поверхностными условиями на его составляющих обсуждаются в обзорных статьях [1, 2] и работах [3-6].

**1. Постановка задачи.** Рассматривается распространение чисто сдвиговых упругих колебаний (волны антиплоской деформации)  $\{0, 0, w(x, y, t)\}$  в упругом составном волноводе со смешанными граничными условиями закрепления на поверхностях. Плоский волновод состоит из двух частей. В прямоугольной декартовой системе координат  $xOy$  первый полубесконечный слой занимает область

$$\Omega_1 = \{-\infty < x \leq 0, 0 \leq y \leq h, -\infty < z < \infty\},$$

а второй полубесконечный слой – область

$$\Omega_2 = \{0 \leq x < \infty, 0 \leq y \leq h, -\infty < z < \infty\} \text{ (рис.1).}$$

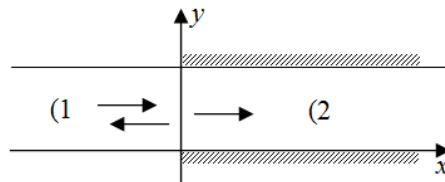


Рис. 1. Схема отраженных и проходящих форм волны сдвига от границы раздела двух полубесконечных частей упругого композитного волновода.

Уравнения распространения волн в обеих частях волновода имеют вид

$$C_{it}^2 \nabla^2 w_i(x, y, t) = \ddot{w}_i(x, y, t), \quad C_{it}^2 = \mu_i / \rho_i, \quad i \in \{1; 2\}. \quad (1.1)$$

Здесь и в последующих соотношениях  $\nabla^2$  – двумерный оператор Лапласа,  $\mu_i$  – модули сдвига,  $\rho_i$  – плотности материалов,  $C_{it}$  – скорости объемной сдвиговой волны в разных частях волновода  $i \in \{1; 2\}$ , соответственно.

Поверхности левой части волновода механически свободны, а правой жестко закреплены. Граничные условия на этих участках запишутся в виде

$$\left. \frac{\partial w_1(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial w_1(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=h} = 0, \quad -\infty < x \leq 0, \quad (1.2)$$

$$w_2(x, y, t)|_{y=0} = 0, \quad w_2(x, y, t)|_{y=h} = 0, \quad 0 \leq x < \infty. \quad (1.3)$$

На разделе двух частей волновода  $x=0$  существует идеальный механический контакт двух сред, где непрерывны упругие перемещения и касательные напряжения

$$w_1(x, y, t)|_{x=0} = w_2(x, y, t)|_{x=0}, \quad \mu_1 \left. \frac{\partial w_1(x, y, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = \mu_2 \left. \frac{\partial w_2(x, y, t)}{\partial x} \right|_{x=0}. \quad (1.4)$$

В задаче отражения и прохождения однонаправленной волны сдвига по сечению волновода из первого полубесконечного слоя  $\Omega_1$  во второй  $\Omega_2$  в соответствующих частях композитного волновода волновое поле будет состоять из слагаемых

$$w_1(x, y, t) = w_1(x, y, t) + w_{\text{Rf}}(x, y, t), \quad w_2(x, y, t) = w_{\text{Tr}}(x, y, t). \quad (1.5)$$

**2. Отражение и прохождение волны сдвига по сечению волновода из полуслоя  $\Omega_1$  во второй полуслой  $\Omega_2$ .** Удовлетворяющее граничным условиям (1.2) решение уравнения (1.1) для первой части волновода (при  $i=1$ ) представится в виде ряда по собственным формам

$$w_1(x, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} W_{1m}(x, t) \cdot \cos(\lambda_{1m} y). \quad (2.1)$$

В разложении (2.1)  $\lambda_m = m\pi/h$  ( $m \in \mathbb{N}^+$ ) собственные числа волнообразования в левой полубесконечной части волновода. Из уравнения (1.1) при  $i=1$  для каждой формы волнового сигнала и отражения получается

$$W_{1m}''(x, t) - \lambda_{1m}^2 W_{1m}(x, t) = C_{1t}^{-2} \ddot{W}_{1m}(x, t). \quad (2.2)$$

Проставляя функцию распространения в виде разложения функций с разделенными параметрами  $W_{1m}(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} X_{1m}(x) \cdot q_{1m}(t)$ , для соответствующих

продольных форм гармоник падающей и отраженной волн получим систему уравнений

$$\begin{cases} X_{1m}''(x) + \omega_{1m}^2 \alpha_{1m}^2 \cdot X_{1m}(x) = 0, \\ \ddot{q}_{1m}(t) + \omega_{1m}^2 \cdot q_{1m}(t) = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

В соотношениях (2.3)  $\omega_{1m}^2 = p_{1m}^2 C_{1t}^2$  – частоты гармоник колебаний собственных форм падающей и отраженной волн,  $\alpha_{1m}^2 = C_{1t}^{-2} - \lambda_m^2 / \omega_{1m}^2$  – волновой коэффициент и  $p_{1m}^2$  – волновое число распространения падающей и отраженной волн в первом полубесконечном слое.

Удовлетворяющие решения уравнения (1.1) граничным условиям (1.3) во втором полубесконечном слое (при  $i = 2$ ) будут представлены в виде ряда по собственным формам волнообразования

$$w_2(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_{2n}(x, t) \cdot \sin(\lambda_n y). \quad (2.4)$$

В ряде (2.4)  $\lambda_n = n\pi/h$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) – собственные числа волнообразования в правой части волновода.

Проставляя функцию распространения в виде разложения функций с разделенными параметрами  $W_{2n}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_{2n}(x) \cdot q_{2n}(t)$ , для соответствующих продольных форм гармоник преломленной волны получим идентичную с (2.4) систему уравнений

$$\begin{cases} X_{2n}''(x) + \omega_{2n}^2 \alpha_{2n}^2 \cdot X_{2n}(x) = 0, \\ \ddot{q}_{2n}(t) + \omega_{2n}^2 \cdot q_{2n}(t) = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

В соотношениях (2.5)  $\omega_{2n}^2 = p_{2n}^2 C_{2t}^2$  – частоты гармоник колебаний собственных форм преломленной волны,  $\alpha_{2n}^2 = C_{2t}^{-2} - \lambda_n^2 / \omega_{2n}^2$  – волновой коэффициент во втором полубесконечном слое и  $p_{2n}^2$  – волновое число распространения преломленной волны.

С учетом инвариантности частот колебания соответствующих гармоник  $\omega_{1m} = \omega_{2m} = \omega$  получим соотношения между волновыми числами отраженной и преломленной волн

$$p_{2n} / p_{1n} = C_{1t} / C_{2t}. \quad (2.6)$$

В случае распространения однонаправленного волнового сигнала упругого сдвига по положительному направлению оси  $Ox$  с учетом структуры волнового поля (1.5), для соответствующих компонент волнового поля в волноводе будем иметь

$$w_1(x, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{0m} \exp[ip_{1m}(\alpha_{1m}x - \omega t / p_{1m})] \cdot \cos(\lambda_m y), \quad (2.7)$$

$$w_{\text{Rf}}(x, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} B_{\text{Rfm}} \exp[-ip_{1m}(\alpha_{1m}x + \omega t/p_{1m})] \cdot \cos(\lambda_m y), \quad (2.8)$$

$$w_{\text{Tr}}(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{\text{Tn}} \exp[ip_{2n}(\alpha_{2n}x - \omega t/p_{2n})] \cdot \sin(\lambda_n y). \quad (2.9)$$

В решениях (2.7) ÷ (2.9)  $A_{0m}$  – известные косинус коэффициенты ряда Фурье падающего волнового сигнала,  $B_{\text{Rfm}}$  – неизвестные косинус коэффициенты ряда Фурье отраженной волны и  $B_{\text{Tn}}$  – неизвестные синус коэффициенты ряда Фурье преломленной волны.

Неизвестные коэффициенты  $B_{\text{Rfm}}$  и  $B_{\text{Tn}}$  определяются подстановкой разложения (2.7) ÷ (2.9) в условия (1.4). С учетом структуры волнового поля (1.5) приходим к следующим двум бесконечным системам уравнений:

$$\sum_{m=0}^{\infty} (A_{0m} + B_{\text{Rfm}}) \cos(\lambda_m y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{\text{Tn}} \sin(\lambda_n y), \quad (2.10)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \mu_1 p_{1m} \alpha_{1m} (A_{0m} - B_{\text{Rfm}}) \cos(\lambda_m y) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2 p_{2n} \alpha_{2n} B_{\text{Tn}} \sin(\lambda_n y). \quad (2.11)$$

С учётом разложения в ряд Фурье  $\sin(\lambda_n y) = \sum_{m=0}^{\infty} b_{n,m} \cos(\lambda_m y)$  полу-

чим

$$\begin{cases} A_{0m} + B_{\text{Rfm}} = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,m} B_{\text{Tn}}, \\ \mu_1 p_{1m} \alpha_{1m} (A_{0m} - B_{\text{Rfm}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2 p_{2n} \alpha_{2n} b_{n,m} B_{\text{Tn}}. \end{cases} \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.12)$$

где коэффициенты Фурье определяются по формулам

$$b_{2k-1;0} = \frac{2}{(2k-1)\pi}, \quad b_{2k-1;2j} = \frac{4(2k-1)}{[(2k-1)^2 - 4j^2]\pi}, \quad k; j \in \mathbb{N}$$

$$b_{2k;2j-1} = \frac{8k}{[4k^2 - (2j-1)^2]\pi}, \quad b_{2k;0} = b_{2k-1;2j-1} = b_{2k;2j} = 0. \quad (2.13)$$

Исключая неизвестные  $B_{\text{Rfm}}$  из системы уравнений (2.12), приходим к системе бесконечных уравнений относительно неизвестных амплитуд  $B_{\text{Tn}}$

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_1 p_{1m} \alpha_{1m} + \mu_2 p_{2n} \alpha_{2n}) b_{n,m} B_{\text{Tn}} = 2\mu_1 p_{1m} \alpha_{1m} A_{0m}, \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \right. \quad (2.14)$$

С учетом принятых обозначений уравнения (2.14) переписутся в виде

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sqrt{1 - m^2 \xi^2} + \kappa \sqrt{1 - \chi^2 n^2 \xi^2} \right\} b_{n,m} B_{\text{Tn}} = 2\sqrt{1 - m^2 \xi^2} A_{0m}, \quad m \in \mathbb{N}^+, \right. \quad (2.15)$$

где  $\xi = (\pi C_{1r}/h\omega)^2$  – безразмерная характеристика частоты,  $\kappa = \rho_2/\rho_1$ ,  $\chi = C_{2r}/C_{1r}$ , а коэффициенты Фурье  $b_{n,m}$  определяются по (2.13).

Вместо бесконечной системы (2.15) рассмотрим усечённые системы при  $n = 1; 2; 3; 4$  и  $m = 0; n-1$ . Согласно (2.12), (2.14) и (2.15) в первом приближении, когда  $n = 1$  и  $m = 0$ , получим

$$B_{Tr1} = \frac{\pi}{1 + \kappa\sqrt{1 - \chi^2\xi^2}} A_{00}, \quad B_{R10} = \frac{1 - \kappa\sqrt{1 - \chi^2\xi^2}}{1 + \kappa\sqrt{1 - \chi^2\xi^2}} A_{00}. \quad (2.16)$$

На рис.2 и 3 приведены графики, построенные по (2.16), на которых показано поведение амплитуд отраженной и прошедшей форм соответствующих частот при первом приближении.

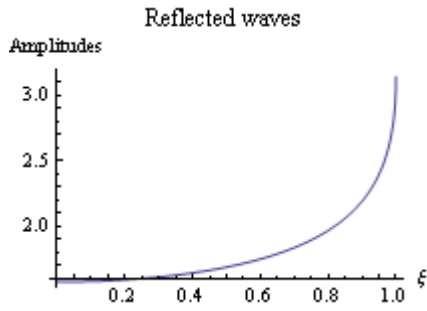


Рис. 2. Поведение амплитуд отраженной формы волны при первом приближении в случае параметров  $\kappa = 1$ ,  $\chi = 1$

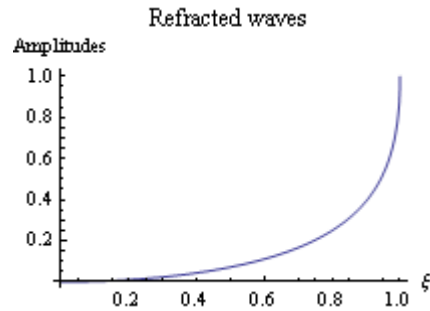


Рис. 3. Поведение амплитуд прошедшей формы волны при первом приближении в случае параметров  $\kappa = 1$ ,  $\chi = 1$

В зависимости от частоты падающей волны, когда ее амплитуда равна единице и параметры  $\kappa = 1$ ,  $\chi = 1$ , волновод разрешает по одной отраженной и одной проходящей форме волны с относительной частотой до  $\xi = 1.0$ .

На рис. 4 и 5 приведены графики, построенные по (2.16), на которых также показано поведение амплитуд отраженной и прошедшей форм соответствующих частот при первом приближении.

В зависимости от частоты падающей волны, когда ее амплитуда равна единице и параметры  $\kappa = 3$ ,  $\chi = 2$ , волновод разрешает по одной отраженной и одной проходящей форме волны с относительной частотой до  $\xi = 0.5$ .

Во втором приближении, когда  $n = 1; 2$  и  $m = 0; 1$ ,

$$\left(1 + \kappa\sqrt{1 - \chi^2\xi^2}\right) \frac{2}{\pi} B_{Tr1} = 2A_{00},$$

$$\left(\sqrt{1-\xi^2} + \kappa\sqrt{1-4\chi^2\xi^2}\right)\frac{8}{3\pi}B_{Tr2} = 2\sqrt{1-\xi^2}A_{01}, \quad (2.17)$$

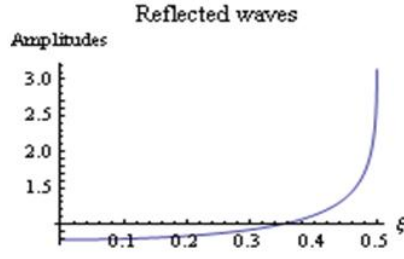


Рис. 4. Поведение амплитуд отраженной формы волны при первом приближении в случае параметров  $\kappa=3$ ,  $\chi=2$ .

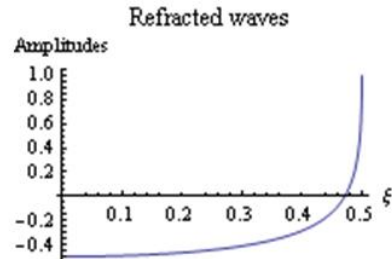


Рис. 5. Поведение амплитуд прошедшей формы волны при первом приближении в случае параметров  $\kappa=3$ ,  $\chi=2$ .

откуда для амплитуд отраженных и прошедших форм волны получим

$$B_{Tr1} = \frac{\pi}{1 + \kappa\sqrt{1-\chi^2\xi^2}} A_{00}, \quad B_{Tr2} = \frac{3\pi}{4} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\sqrt{1-\xi^2} + \kappa\sqrt{1-4\chi^2\xi^2}} A_{01}, \quad (2.18)$$

$$B_{Rf0} = \frac{1 - \kappa\sqrt{1-\chi^2\xi}}{1 + \kappa\sqrt{1-\chi^2\xi}} A_{00},$$

$$B_{Rf1} = \frac{2\kappa\sqrt{1-\xi^2} - \pi\left(\sqrt{1-\xi^2} + \kappa\sqrt{1-4\chi^2\xi^2}\right)}{\pi\left(\sqrt{1-\xi^2} + \kappa\sqrt{1-4\chi^2\xi^2}\right)} A_{01}. \quad (2.19)$$

На рис. 6 и 7 приведены графики, построенные по (2.18) и (2.19), на которых показано поведение амплитуд отраженной и прошедшей форм соответствующих частот во втором приближении.

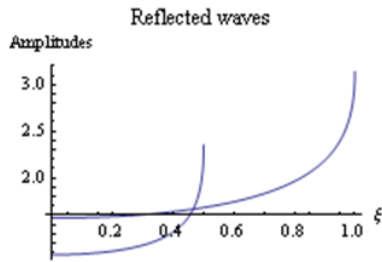


Рис. 6. Поведение амплитуд отраженной формы волны во втором приближении в случае параметров  $\kappa=1$ ,  $\chi=1$ .

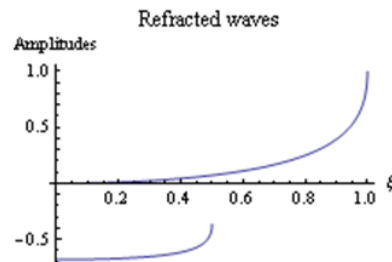


Рис. 7. Поведение амплитуд прошедшей формы волны во втором приближении в случае параметров  $\kappa=1$ ,  $\chi=1$ .

В зависимости от частоты падающей волны, когда ее амплитуда равна единице и параметры  $\kappa = 1$ ,  $\chi = 1$ , волновод разрешает по одной отраженной и одной проходящей форме волны с относительной частотой до  $\xi = 1.0$ , а также по одной отраженной и одной проходящей форме волны с относительной частотой до  $\xi = 0.5$ .

На рис. 8 и 9 приведены графики, построенные по (2.18) и (2.19), на которых также показано поведение амплитуд отраженной и прошедшей форм соответствующих частот во втором приближении.

В зависимости от частоты падающей волны, когда ее амплитуда равна единице и параметры  $\kappa = 3$ ,  $\chi = 2$ , волновод разрешает по одной отраженной и одной проходящей форме волны с относительной частотой до  $\xi = 0.5$ .

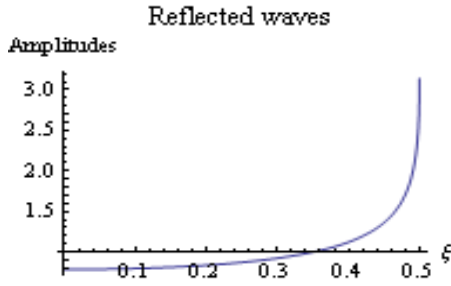


Рис. 8. Поведение амплитуд отраженной формы волны во втором приближении в случае параметров  $\kappa = 3$ ,  $\chi = 2$ .

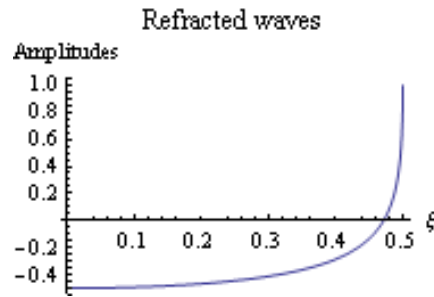


Рис. 9. Поведение амплитуд прошедшей формы волны во втором приближении в случае параметров  $\kappa = 3$ ,  $\chi = 2$ .

В третьем приближении, когда  $n = 1; 2; 3$  и  $m = 0; 1; 2$ , из (2.14), (2.15) получим систему уравнений относительно амплитуд  $B_{Tr1}$ ,  $B_{Tr2}$ ,  $B_{Tr3}$ :

$$6\left(1 + \kappa\sqrt{1 - \chi^2\xi^2}\right)B_{Tr1} + 2\left(1 + \kappa\sqrt{1 - 9\chi^2\xi^2}\right)B_{Tr3} = 6\pi A_{00}, \quad (2.20)$$

$$4\left(\sqrt{1 - \xi^2} + \kappa\sqrt{1 - 4\chi^2\xi^2}\right)B_{Tr2} = 3\pi\sqrt{1 - \xi^2}A_{01}, \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} & -10\left(\sqrt{1 - 4\xi^2} + \kappa\sqrt{1 - \chi^2\xi^2}\right)B_{Tr1} + \\ & + 18\left(\sqrt{1 - 4\xi^2} + \kappa\sqrt{1 - 9\chi^2\xi^2}\right)B_{Tr3} = 15\pi\sqrt{1 - 4\xi^2}A_{02}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

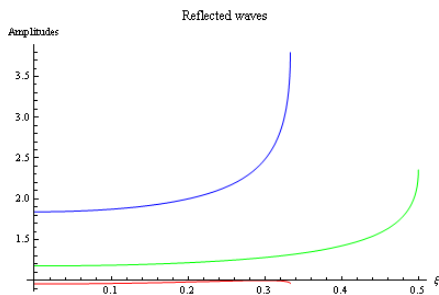


Рис. 10. Поведение амплитуд отраженных форм волны в третьем приближении в случае параметров  $\kappa = 1$ ,  $\chi = 1$ .

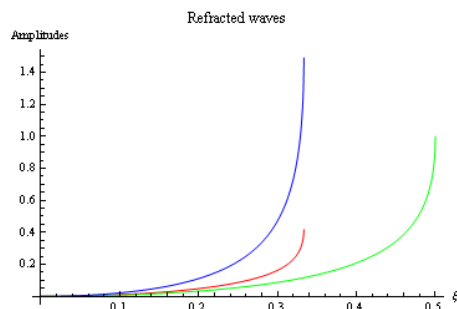


Рис. 11. Поведение амплитуд прошедших форм волны в третьем приближении в случае параметров  $\kappa = 1$ ,  $\chi = 1$ .

На рис. 10 и 11 приведены графики, построенные по (2.20), (2.21) и (2.22), на которых показано поведение амплитуд отраженной и прошедшей форм соответствующих частот в третьем приближении. В зависимости от частоты падающей волны, когда ее амплитуда равна единице и параметры  $\kappa = 1$ ,  $\chi = 1$ , волновод разрешает по одной отраженной и одной проходящей форме волны с относительной частотой до  $\xi = 0,5$ , а также по две отраженные и две проходящие формы волны с относительной частотой до  $\xi = 0,35$ .

Необходимо заметить, что в первых двух приближениях (рис. 2-9) все отраженные и прошедшие низкочастотные формы, для которых  $\xi \ll 0,1$ , имеют отрицательные амплитуды. Только в третьем приближении (рис. 10- 11) появляются низкочастотные формы с положительными амплитудами.

<sup>1</sup>Институт механики НАН РА

<sup>2</sup>Ереванский государственный университет

e-mails: ara.serg.avetisyan@gmail.com

ssahakyan@ysu.am

**Член-корреспондент НАН РА Ара С. Аветисян, С. Л. Саакян**

**Отражение и прохождение форм волны сдвига от границы раздела двух полубесконечных частей упругого композитного волновода**

Выявлен характер отраженных и проходящих через поперечное сечение неоднородного волновода волновых форм с попарно механически свободными и жестко зашумленными поверхностями на его составляющих. Численным ана-



лизом установлена определяющая роль геометрических и материальных характеристик неоднородного волновода.

**ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Արա Ս. Ավետիսյան, Ս. Լ. Մահակյան**

**Մահիքի ալիքների անդրադարձումը և անցումը անհամասեռ առաձգական բաղադրյալ ալիքատարի երկու կիսաանվերջ մասերի միջերեսից**

Բացահայտվում է ալիքային ձևերի բնույթը, որոնք անդրադառնում են կամ անցնում, ալիքատարի անհամասեռ մասերն ըստ տարբեր նյութերի և զույգ մակերևույթներով, մեխանիկորեն ազատ և կոշտ ամրակցված բաղադրիչների կտրվածքով: Թվային վերլուծությունը բացահայտում է անհամասեռ ալիքատարի երկրաչափական և նյութական անհամասեռության բնութագրերի որոշիչ դերը:

**Corresponding member of NAS RA Ara S. Avetisyan, S. L. Sahakyan**

**Reflection and Transmission of Shear Waveforms from the Interface between Two Semi-Infinite Parts of an Elastic Composite Waveguide**

The proposed work reveals the nature of waveforms reflected and passing through the cross section of an inhomogeneous waveguide, in pairs by mechanically free and rigidly clamped surfaces on its components. Numerical analysis reveals the decisive role of the geometric and material characteristics of an inhomogeneous waveguide.

### **Литература**

1. *Сумбатьян М.А., Скалия А.* Основы теории дифракции с приложениями в механике и акустике. М. Физматлит. 2013. 328 с.
2. *Мелешко В. В., Бондаренко А. А. и др.* – Математические методы и физико-механические поля. 2008. Т. 51. С. 86-104; 163-180.
3. *Григорян Э. Х., Агаян К. Л.* – Изв. НАН Армении. Механика. 2007. Т. 60. № 3. С. 23-38,
4. *Белубекян В. М., Белубекян М. В.* – Изв. НАН Армении. Механика. 2015. Т. 68. № 4. С. 3-8,
5. *Avetisyan Ara S., Hunanyan A. A.* – Proc. of NAS Armenia. Mechanics. 2017. V. 70. № 2. P. 28-42,
6. *Агаян К. Л.* В: Тр. Международ. конф. «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред». 2018. Горис. С. 19-23.