

Член-корреспондент НАН РА С. О. Саркисян¹,
К. А. Жамакочян¹, Л. С. Саркисян²

**Статика и собственные плоские колебания
листа графена по моментно-мембранной
теории упругих пластин**

(Представлено 20/X 2022)

Ключевые слова: *моментно-мембранная теория, упругие пластинки, модель графена, статика и собственные плоские колебания, метод конечных элементов.*

1. Введение. Одной из ключевых проблем наномеханики после экспериментального определения графена (двумерный наноматериал, состоящий из одного атомного слоя и обладающий уникальными механическими и электрическими свойствами) [1] стало построение континуальной модели его деформаций. Исходя из исследований [2-4], в которых обосновывается применение трёхмерной моментной теории упругости к континуальной модели деформаций двумерных наноматериалов, а также работ [5, 6], в которых экспериментально устанавливается, что на уровне нано- и мезомеханики деформация материалов происходит по схеме «сдвиг плюс поворот», в [7], где каждый атом графена моделируется как тело точка [8], а атомные связи – как одномерные упругие стержни, построена континуальная модель деформаций листа графена и показано, что эта модель идентична моментно-мембранной теории упругих пластин [9, 10]. В [9, 10] определены и рассчитаны упругие постоянные моментной теории упругости для графена. Построенная моментно-мембранная теория упругих пластин представляет собой: 1) модель плоского напряжённого состояния, 2) модель поперечного изгиба. На их основе можно рассматривать деформационные задачи статики и динамики для листа графена.

В данной работе в рамках моментно-мембранной теории упругих пластин на основе модели плоского напряжённого состояния изучены статическая задача и задача о собственных колебаниях для прямоугольного листа графена, которые решаются численно при помощи разработанного в [11] варианта метода конечных элементов (МКЭ).

2. Основные уравнения и граничные условия модели плоского напряжённого состояния моментно-мембранной теории упругих пластин. От общих уравнений и соотношений моментно-мембранной теории упругих тонких оболочек [9, 10] перейдём к частной теории – теории пластин, включающей: 1) модель плоского напряжённого состояния, 2) модель поперечного изгиба. По этим моделям можем отдельно рассматривать деформацию графена в своей плоскости и изгибную деформацию от своей плоскости.

Приведем основные уравнения плоского напряжённого состояния моментно-мембранной теории упругих тонких пластин (рассматриваются декартовы координаты (x, y)) [9,10]:

уравнения равновесия (движения)

$$\begin{aligned}\frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{\partial S_{21}}{\partial y} &= \rho_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - (p_1^+ - p_1^-), \\ \frac{\partial S_{12}}{\partial x} + \frac{\partial T_{22}}{\partial y} &= \rho_0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - (p_2^+ - p_2^-),\end{aligned}\quad (1)$$

$$\frac{\partial L_{13}}{\partial x} + \frac{\partial L_{23}}{\partial y} + (S_{12} - S_{21}) = J_0 \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2} - (m_3^+ - m_3^-);$$

геометрические соотношения

$$\begin{aligned}\Gamma_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad \Gamma_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial y}, \quad \Gamma_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial x} - \Omega_3, \\ \Gamma_{21} &= \frac{\partial u_1}{\partial y} + \Omega_3, \quad k_{13} = \frac{\partial \Omega_3}{\partial x}, \quad k_{23} = \frac{\partial \Omega_3}{\partial y};\end{aligned}\quad (2)$$

физические соотношения упругости

$$\begin{aligned}T_{11} &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} (\Gamma_{11} + \nu \Gamma_{22}), \quad T_{22} = \frac{2Eh}{1-\nu^2} (\Gamma_{22} + \nu \Gamma_{11}), \\ S_{12} &= 2h[(\mu + \alpha)\Gamma_{12} + (\mu - \alpha)\Gamma_{21}], \quad S_{21} = 2h[(\mu + \alpha)\Gamma_{21} + (\mu - \alpha)\Gamma_{12}], \\ L_{13} &= 2Bhk_{13}, \quad L_{23} = 2Bhk_{23}, \quad B = \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon};\end{aligned}\quad (3)$$

граничные условия

$$T_{11} = T_{11}^*, \quad S_{12} = S_{12}^*, \quad L_{13} = L_{13}^*, \quad \text{при } x = const, \quad (4)$$

или

$$u_1 = u_1^*, \quad u_2 = u_2^*, \quad \Omega_3 = \Omega_3^*, \quad \text{при } x = const. \quad (5)$$

Могут иметь место также смешанные граничные условия.

Сведём исходные уравнения и соотношения (1)-(3) модели плоского напряжённого состояния моментно-мембранной теории упругих тонких пластин к разрешающим уравнениям. Подставив (3) в (2) и затем в

уравнения равновесия (1), получим систему уравнений относительно функций $u_1(x, y), u_2(x, y), \Omega_3(x, y)$:

$$\begin{aligned} (\lambda' + 2\mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + (\mu + \alpha) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} \right) + 2\alpha \frac{\partial \Omega_3}{\partial y} &= -p_1, \\ (\lambda' + 2\mu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + (\mu + \alpha) \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} \right) - 2\alpha \frac{\partial \Omega_3}{\partial x} &= -p_2, \\ B\Delta\Omega_3 - 4\alpha\Omega_3 + 2\alpha \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) &= -m_3, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\lambda' = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{E\nu}{1 - \nu^2}, \quad \Delta(\cdot) = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial y^2}. \quad (7)$$

Система уравнений (6) дополняется граничными условиями (4) или (5), выраженными через u_1, u_2, Ω_3 .

Полная потенциальная энергия системы для указанной модели определяется по формуле [9, 10]:

$$\Pi_0 = \mathcal{E}_0 - A_0, \quad \mathcal{E}_0 = \iint_{(S)} U_0 dx dy, \quad (8)$$

где U_0 – плотность потенциальной энергии деформации:

$$\begin{aligned} U_0 = \frac{1}{2} \left[\frac{2Eh}{1 - \nu^2} (\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2 + 2\nu\Gamma_{11}\Gamma_{22}) + 2h(\mu + \alpha)(\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{21}^2) + \right. \\ \left. + 4h(\mu - \alpha)\Gamma_{12}\Gamma_{21} + 2Bh(k_{13}^2 + k_{23}^2) \right] \end{aligned} \quad (9)$$

A_0 – работа внешних усилий:

$$\begin{aligned} A_0 = \iint_{(S)} \left\{ (q_1^+ - q_1^-)u_1 + (q_2^+ - q_2^-)u_2 + (m_3^+ - m_3^-)\Omega_3 \right\} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\ + \int_{\Gamma_1'} (\bar{S}_{21}u_1 + \bar{T}_{22}u_2 + \bar{L}_{23}\Omega_3) A_1 d\alpha_1 - \int_{\Gamma_2'} (\bar{T}_{11}u_1 + \bar{S}_{12}u_2 + \bar{L}_{13}\Omega_3) A_2 d\alpha_2. \end{aligned} \quad (10)$$

Отметим, что для графена как двумерного наноматериала упругие модули представляют собой соответствующие жесткости: $2G_*h, 2h(\gamma + \varepsilon)$ и т.д., которые определяются через физические параметры атомной структуры графена [7]:

$$E_* = 2Eh = 287 \frac{\text{Н}}{\text{М}}; \mu_* = 2\mu h = 116 \frac{\text{Н}}{\text{М}}; \alpha_* = 2\alpha h = 42 \frac{\text{Н}}{\text{М}}; \nu = 0,24, \quad (11)$$

$$B_* = 2Bh = 5,05 \cdot 10^{-10} \text{Н} \cdot \text{мм}.$$

3. МКЭ для решения граничных задач плоского напряжённого состояния моментно-мембранной теории пластин.

А) Рассмотрим статическую граничную задачу плоского напряжённого состояния прямоугольного листа графена (1) – (5) (силы инерции исключаются).

Основными кинематическими параметрами в задаче плоского напряжённого состояния моментно-мембранной модели упругих пластин являются перемещения u_1, u_2 и свободный поворот Ω_3 . Будем считать, что пластинка (графен) занимает область прямоугольника: $0 \leq x \leq a, -b \leq y \leq b$. Разобьём эту область на конечные элементы прямоугольного типа. Узлы конечного элемента обозначим через i, j, k, l . Для прямоугольного конечного элемента получим 12 степеней свободы (4 узла по u_1, u_2, Ω_3 в каждом, когда рассматриваем плоское напряжённое состояние), поэтому введём 12 полиномиальных коэффициентов: $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, 12$. В этом случае имеем:

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy, \\ u_2 &= \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy, \\ \Omega_3 &= \alpha_9 + \alpha_{10} x + \alpha_{11} y + \alpha_{12} xy. \end{aligned} \quad (12)$$

При подстановке в полиномы (12) координат узлов прямоугольного элемента i, j, k, l получим 12 уравнений. Полученную систему уравнений запишем в матричной форме:

$$\{\delta\} = [A] \{\alpha\}, \quad (13)$$

где $\{\delta\}^T = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{12}\}$, $\{\alpha\}^T = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{12}\}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -b & 0 \\ 1 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b & 0 \\ 1 & a & b & ab & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & b & ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & b & ab \\ 1 & a & -b & -ab & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & -b & -ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & -b & -ab \end{pmatrix}.$$

Из матричного уравнения (13) определим вектор $\{\alpha\}$, через узловые перемещения и повороты:

$$\{\alpha\} = [A]^{-1}\{\delta\}. \quad (14)$$

Подставляя найденный вектор (14) снова в (12), для перемещений u_1, u_2 и независимого поворота Ω_3 получим следующие аппроксимации:

$$\{u\} = [N]\{\delta\}, \quad (15)$$

где $\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \Omega_3 \end{Bmatrix}$, $[N]$ – матрица функции формы,

$$\begin{aligned} u_1 &= \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2a} - \frac{y}{2b} + \frac{xy}{2ab}\right)\delta_1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2a} + \frac{y}{2b} - \frac{xy}{2ab}\right)\delta_4 + \left(\frac{x}{2a} + \frac{xy}{2ab}\right)\delta_7 + \left(\frac{x}{2a} - \frac{xy}{2ab}\right)\delta_{10}, \\ u_2 &= \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2a} - \frac{y}{2b} + \frac{xy}{2ab}\right)\delta_2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2a} + \frac{y}{2b} - \frac{xy}{2ab}\right)\delta_5 + \left(\frac{x}{2a} + \frac{xy}{2ab}\right)\delta_8 + \left(\frac{x}{2a} - \frac{xy}{2ab}\right)\delta_{11}, \\ \Omega_3 &= \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2a} - \frac{y}{2b} + \frac{xy}{2ab}\right)\delta_3 + \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2a} + \frac{y}{2b} - \frac{xy}{2ab}\right)\delta_6 + \left(\frac{x}{2a} + \frac{xy}{2ab}\right)\delta_9 + \left(\frac{x}{2a} - \frac{xy}{2ab}\right)\delta_{12}. \end{aligned} \quad (16)$$

Подставив (16) в функционал (8), после интегрирования получим функцию двенадцати независимых переменных $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{12}$. Минимизация функционала (8) приводит к нахождению минимума функции 12 независимых переменных:

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial \delta_k} = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots, 12). \quad (17)$$

Вычислив соответствующие частные производные, получим систему линейных алгебраических уравнений вида

$$[K] \cdot \{\delta\} = \{P\}. \quad (18)$$

Здесь $[K]$ – матрица жёсткости конечного элемента размером 12×12 , представляющего собой важнейшее понятие метода конечных элементов; $\{\delta\}^T = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5, \delta_6, \delta_7, \delta_8, \delta_9, \delta_{10}, \delta_{11}, \delta_{12}\}$ – вектор узловых перемещений, поворотов и их производных; $\{P\}$ – сосредоточенные узловые силы и моменты, вид которых приведём при рассмотрении конкретных задач.

Б) Для изучения задачи о собственных плоских колебаниях листа графена выберем для перемещений u_1, u_2 и свободного поворота Ω_3 разложения в виде

$$\begin{aligned} u_1(x, y) &= (\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy) \cdot \sin \omega t, \\ u_2(x, y) &= (\alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy) \cdot \sin \omega t, \\ \Omega_3(x, y) &= (\alpha_9 + \alpha_{10} x + \alpha_{11} y + \alpha_{12} xy) \cdot \sin \omega t, \end{aligned} \quad (19)$$

где ω – частота собственных колебаний.

Подставив (19) в функционал (8) (с добавлением инерционных членов), после интегрирования получим функцию 12 независимых переменных $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{12}$. Минимизация функционала (8) приводит к нахождению минимума функции 12 независимых переменных.

Вычислив соответствующие частные производные, придем к решению следующей системы линейных однородных алгебраических уравнений вида

$$([K] - \omega^2[M]) \cdot \{\delta\} = 0. \quad (20)$$

Здесь $[K]$ – матрица жёсткости, $[M]$ – матрица массы конечного элемента размерности 12×12 .

Обратив определитель однородной системы линейных алгебраических уравнений в нуль, получим уравнение для определения частоты ω собственных колебаний.

4. Прикладная статическая задача плоского напряжённого состояния прямоугольного листа графена (рис. 1).

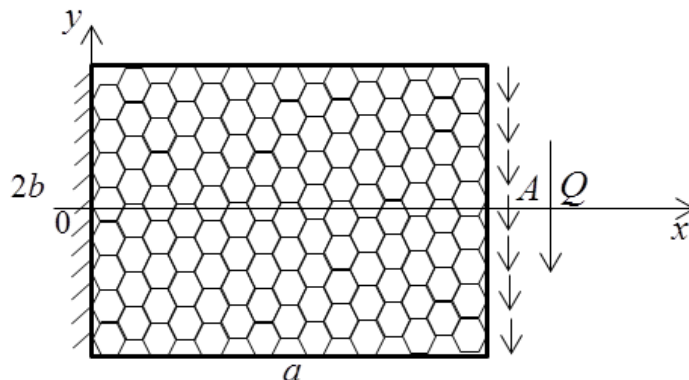


Рис. 1

Рассмотрим лист графена, который представляет прямоугольник $a \times 2b$ (в данном случае как консоль). Консоль заделана на левом конце и нагружена на правом свободном конце вертикальной параболической распределённой нагрузкой, равнодействующую которой обозначим через Q . Краевые горизонтальные линии $y = \pm b$ не нагружены. Будем считать, что в области прямоугольника ($0 \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$) имеют место уравнения плоского напряжённого состояния моментно-мембранной теории пластин ((1)-(3) или (6)). Граничные условия для данной задачи имеют вид

$$\begin{aligned} u_1 = 0, u_2 = 0, \Omega_3 = 0, \text{ при } x = 0, \\ S_{21} = 0, T_{22} = 0, L_{23} = 0, \text{ при } y = \pm b, \end{aligned} \quad (21)$$

$$S_{12} = -\frac{3Q}{4b^3}(y^2 - b^2), T_{11} = 0, L_{13} = 0, \text{ при } x = a. \quad (22)$$

Вариационный принцип типа Лагранжа для данной задачи примет вид

$$\iint_{(S)} U_0 dx dy = \int_{-b}^b S_{12} u_2 dy \quad (23)$$

Для решения задачи примем МКЭ.

Подставив (22) и (16) в (23) и интегрируя, для вектора сосредоточенных узловых сил и моментов получим $\{P\} = \{0, \frac{Q}{2}, 0, 0, \frac{Q}{2}, 0\}$. Решив матричное уравнение (18), получим узловые перемещения и повороты. Упругие постоянные графена имеют значения (11), для Q примем значение $Q = 0.5 \text{ нН}$ (наноНьютон).

В табл. 1 приведены значения вертикального перемещения точки A при различных значениях размеров прямоугольного листа графена.

Таблица 1

Вертикальные перемещения точки A

a (нм)	$2b$ (нм)	u_2 (нм)	Классическая теория $\alpha = 0$ u_2 (нм)
20	10	0.0193	0.0240
20	20	0.0067	0.0078
20	30	0.0036	0.0041
20	40	0.0024	0.0027

5. Собственные плоские колебания прямоугольного листа графена. В последнее время активно развивается область исследований и разработок наноэлектромеханических систем с целью создания нанорезонаторов нового поколения с использованием углеродных нанотрубок и графена [12]. Углеродные нанотрубки и графен применяются как детекторы гигагерцевого и терагерцевого частотных диапазонов. В связи с этим рассмотрим задачу о собственных плоских колебаниях прямоугольного листа графена (рис. 1), когда внешняя распределённая на правой стороне прямоугольника нагрузка отсутствует. Основными уравнениями динамики плоского напряженного состояния моментно-мембранной теории пластин являются (1)-(3) при наличии сил инерции по принципу Даламбера. Граничные условия имеют вид:

$$u_1 = 0, u_2 = 0, \Omega_3 = 0, \text{ при } x = 0, \quad (24)$$

$$S_{12} = 0, T_{11} = 0, L_{13} = 0, \text{ при } x = a. \quad (25)$$

$$S_{21} = 0, T_{22} = 0, L_{23} = 0, \text{ при } y = \pm b. \quad (26)$$

Для решения однородной граничной задачи (1)-(3), (24-26) применим МКЭ, в результате чего придем к однородному матричному уравнению (20). Обратив определитель в нуль, получим уравнение для определения частоты колебаний ω . Для графена $\rho_0 = 0,78 \cdot 10^{-24}$ кг/нм², $I_0 = 0,46 \cdot 10^{-28}$ кг [7]. В случае квадратной пластинки $a = 2b = 20$ нм, при наименьшей частоте колебаний $\omega = 129$ ГГц (гигагерц).

7. Заключение. Рассмотрены некоторые прикладные задачи на основе модели плоского напряжённого состояния пластин, построенной по моментно-мембранной теории как континуальная модель деформации листа графена.

Равновесие прямоугольного листа графена, когда левый край его закреплён, на правом конце приложена распределённая по параболе касательная нагрузка, а нижняя и верхняя стороны прямоугольника свободны от нагрузок, изучается как статическая задача. Для решения поставленной задачи развивается метод конечных элементов. Задача доведена до получения окончательных численных результатов.

Рассмотрены также собственные плоские колебания того же прямоугольного листа графена с применением метода конечных элементов. Показано, что наименьшая частота собственных колебаний листа графена находится в гигагерцевой зоне частот.

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № 21Т-2С093.

¹Ширакский государственный университет. Гюмри, Армения

²Институт механики НАН РА

e-mails: s_sargsyan@yahoo.com, knarikzhamakochyan@mail.ru,

slusin@yahoo.com

**Член-корреспондент НАН РА С. О. Саркисян,
К. А. Жамакочян, Л. С. Саркисян**

Статика и собственные плоские колебания прямоугольного листа графена на основе моментно-мембранной теории упругих пластин

Рассмотрены деформации листа графена на модели плоского напряжённого состояния пластин по моментно-мембранной теории. Для решения конкретных прикладных задач по этой модели развивается метод конечных элементов. Изучена одна статическая задача для прямоугольного листа графена (до получения окончательных численных результатов), когда левый край жёстко закреплён, на правом крае действует распределённая касательная нагрузка с известной равнодействующей, а нижняя и верхняя стороны свободны от нагрузок. Изучена также для этого же прямоугольного листа графена задача о собственных плоских коле-

баниях. Полученные численные результаты показывают, что наименьшая частота плоских колебаний прямоугольного листа графена находится в гигагерцевом диапазоне частот.

**ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ս. Հ. Սարգսյան, Ք. Ա. Ժամակոչյան,
Լ. Ս. Սարգսյան**

Գրաֆենի ուղղանկյուն շերտի ստատիկական և սեփական հարթ տատանումները առաձգական սալերի մոմենտամեմբրանային տեսության հիման վրա

Դիտարկվում է գրաֆենի շերտի դեֆորմացիան՝ ըստ սալերի մոմենտամեմբրանային տեսության հարթ լարվածային վիճակի մոդելի: Այս մոդելով կոնկրետ կիրառական խնդիրների լուծման համար զարգացվում է վերջավոր տարրերի մեթոդը: Ուսումնասիրվում է մեկ ստատիկական խնդիր գրաֆենի ուղղանկյուն շերտի համար (մինչև վերջնական թվային արդյունքների ստացումը), երբ ձախ եզրը կոշտ ամրակցված է, աջ եզրում ազդում է հայտնի համազորով բաշխված շոշափող բեռ, իսկ վերին և ստորին կողմերը ազատ են: Ուսումնասիրվում է նաև գրաֆենի այդ նույն ուղղանկյուն շերտի համար հարթ սեփական տատանումների խնդիրը: Ստացված թվային արդյունքները ցույց են տալիս, որ գրաֆենի ուղղանկյուն շերտի հարթ տատանումների ամենափոքր հաճախականությունը հաճախականությունների գեգահերց տիրույթում է:

**Corresponding member of NAS RA S. H. Sargsyan,
K. A. Zhamakochyan, L. S. Sargsyan**

Statics and Natural Plane Vibrations of a Rectangular Graphene Sheet Based on the Moment-Membrane Theory of Elastic Plates

In this paper the deformation of a graphene sheet according to the model of the moment-membrane theory a plane stress state of plates is considered. The finite element method is developed to solve concrete applied problems using this model. One static problem is studied for a rectangular graphene sheet (until the final numerical results are obtained), when the left edge is rigidly fixed, a distributed tangential load with a known resultant acts on the right edge, and the lower and upper sides are free. The problem of plane natural vibrations for the same rectangular graphene sheet is also studied. The obtained numerical results show that the lowest frequency of natural plane vibrations of a rectangular graphene sheet is in the gigahertz frequency range.

Литература

1. Geim A. K., Novoselov K. S. –Nature Materials. 2007. V. 6. № 3. P. 183-191.
2. Иванова Е. А., Кривцов А. М., Морозов Н. Ф. и др. – Докл. РАН. 2003. Т. 391. № 6. С. 764-768.

3. *Иванова Е. А., Кривцов А. М., Морозов Н. Ф.* – Прикладная математика и механика. 2007. Т. 71. Вып. 4. С. 595-615.
4. *Беринский И. Е., Иванова Е. А., Кривцов А. М. и др.* –Изв. РАН. Механика твёрдого тела. 2007. № 5. С. 6-16.
5. *Панин В. Е.* – Физическая мезомеханика. 1998. Т. 1. № 1. С. 5-22.
6. *Панин В. Е., Гриняев Ю. В., Егорушкин В. Е.* – Изв. РАН. Механика твёрдого тела. 2010. № 4. С. 8-29.
7. *Саркисян С. О.* – Физическая мезомеханика. 2022. Т. 25. № 2. С. 109-121.
8. *Жилин П. А.* Теоретическая механика. Фундаментальные законы механики. СПб. Изд-во ЦПБГПУ. 2003. 340 с.
9. *Саркисян С. О.* – Физическая мезомеханика. 2020. Т. 23. № 4. С. 13-19.
10. *Саркисян С. О.* – Вестн. Московского ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2022. № 1. С. 38-47.
11. *Sargsyan S. H.* In: AIP Conference Proceedings 2448, Krasnoyarsk, Russia, 020020 (2021). <https://doi.org/10.1063/5.0073269>. P.020020.
12. *Гринберг Я. С., Пашкин Ю. А., Ильичев Е. В.* –Успехи физических наук. 2012. Т. 182. № 4. С. 407-436.