ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 122 2022 № 4

МАТЕМАТИКА

УДК 517.927.25
DOI: 10.54503/0321-1339-2022.122.4-255

Академик НАН РА А. Б. Нерсесян

О явлении сверх-сходимости при разложениях по собственным функциям

(Представлено 14/XI 2022)

Ключевые слова: *дифференциальные уравнения, краевые задачи, ускорение сходимости, функция Грина, разложения по собственным функциям, спектральный метод, явление сверх-сходимости.*

§1. Введение.

1.1. Ускорение сходимости рядов Фурье. Одним из классических инструментов математики является аппарат рядов Фурье, основанный на разложении функции f по полной в $L_2[-1,1]$ ортогональной системе $\{\exp(i\,\pi\, s\, x)\}, s \in \mathbb{Z}$. Однако на практике его востребованность крайне ограничена из-за явления Гиббса для кусочно-гладких функций $f(x)$ общего вида, когда используются частные суммы ряда Фурье. Еще на заре двадцатого века известный ученый-кораблестроитель А. Н. Крылов ([1], 1907) предложил следующий подход. Пусть на отрезке $x \in [-1,1]$ задана кусочно-гладкая функция $f(x)$ с коэффициентами Фурье $\{f_s\}$, $s = 0, \pm 1, \dots, \pm n$, и со следующими скачками f(x) или ее производными до порядка $\mathrm{q} \geq 1$ в точках $\{\mathrm{a_k}\}$, $-1 < \mathrm{a}_1 < \cdots < \mathrm{a_m} = 1$, $1 \leq \mathrm{m} < \infty$, $k = 0,1, \dots, q, \mathrm{A_{m,k}} = f^{(k)}(1) - f^{(k)}(-1)$ и

$$A_{p,k}(f) = f^{(k)}\big(a_p - 0\big) - f^{(k)}\big(a_p + 0\big),\ q \geq 0, p = 1, \dots, m-1, \quad (1)$$

а в окрестностях остальных точек $f \in C^{q+1}$. Построим некоторую (скажем, кусочно-полиномиальную) функцию $g = g(x)$, $x \in [-1,1]$, с ненулевыми коэффициентами Фурье $\{g_s\}$, $|s| \geq 0$, которая имеет в тех же точках такие же скачки, а в окрестностях остальных точек также $\mathrm{g(x)} \in \mathrm{C^{q+1}}$. В результате ошибка аппроксимации

$$f(x) \simeq f_n(x) = g(x) + \sum_{k=-n}^{n} (f_s - g_s) e^{i\,\pi\, s\, x},\ \ x \in [-1,1] \quad (2)$$

имеет порядок $o(n^{-q})$, $n \to \infty$, что гораздо лучше аппроксимации

Фурье (т.е. когда $g(x) = 0$). Однако нахождение величин $\{A_{s,k}\}$ непосредственно по самой функции f сильно ограничивает сферу применения |этого метода. В работе [2] (1993 г.) норвежский математик Кнут Экхоф разработал «спектральный» метод, основанный на использовании лишь коэффициентов Фурье $\{f_s\}$. Указанные скачки он предложил находить приближенно, решая систему определенных линейных уравнений с матрицей Вандермонда и применив полиномиальную функцию g в схеме Крылова (2). Подобный подход был развит многими авторами (подробности см. во введении и списке литературы в работах [3-8]). Назовем его методом Крылова – Экхофа (**КЕ-методом**).

1.2. Параметрическая биортогональная система. Приведем схему иного подхода к «ускорению сходимости», основанного только на выборе функции $g(x)$ в разложении А. Крылова (2) (см. [5-7] и [9]). Пусть множество $D_n \in \mathbb{Z}$ состоит из n разных целых чисел. Частичную сумму ряда Фурье для функции $f(x) \in L_2[-1,1]$ определим формулой

$$S_n(x) = \sum_{k \epsilon D_n} f_k \exp(i\,\pi\,k\,x)\,, \quad x \in [-1,1]\,, \tag{3}$$

где $f_k = 1/2 \int_{-1}^{1} f(t) \exp(-i\,\pi\,k\,t) dt\,,\ k \epsilon D_n,$ – коэффициенты Фурье.

Рассмотрим последовательность, содержащую свободные комплексные параметры $\{\,z_q\} \subset \mathbb{C}$

$$t_{r,s} = (-1)^{s-r} \left(\prod_{p \in D_n, p \neq r} \frac{s-p}{r-p} \right) \prod_{q \in D_n} \frac{r-z_q}{s-z_q}\ , r\,\epsilon D_n, s\,\epsilon\,\mathbb{Z}\,, \{\,z_q\} \notin \mathbb{Z}, \tag{4}$$

а систему функций $\{T_r\}$ определим в виде следующих рядов Фурье:

$$T_r(x) = \exp(i\,\pi\,r\,x) + \sum_{s \notin D_n} t_{r,s} \exp(i\,\pi\,s\,x), \quad r \epsilon D_n\,,\ x \in [-1,1]. \tag{5}$$

Очевидно, система $\{T_r(x), exp(i\,\pi\,r\,x)\}$, $r \in D_n$ биортогональна на $[-1,1]$ и нормирована (т.к. $t_{r,s} = \delta_{r,s}$ при $r, s\,\epsilon D_n$). Отметим, что при $s \to \infty$ $t_{r,s} = O(1/s)$.

При $z_p \neq z_q$ $(p \neq q)$ функции $\{T_r\}$ имеют следуюший явный вид:

$$T_r(x) = \sum_{k \epsilon D_n} c_{r,k} \exp(\mathrm{i}\ \pi\,z_k\,\mathrm{x})\,,\ r \epsilon D_n\,, \quad x \in [-1,1]\,, \tag{6}$$

где

$$c_{r,k} = \frac{\pi(r - z_k\,)}{\sin(\pi(r - z_k\,))}\ \left(\prod_{p \in D_n, p \neq k,} \frac{(r - z_p)}{(z_k - z_p\,)}\right) \quad \prod_{q \in D_n, q \neq r} \frac{(z_k - q)}{(r - q)}$$

В работах [6] и [7] можно найти несколько более сложный явный вид системы $\{T_r\}$ в случае наличия совпадающих параметров $\{z_k\}$, а также когда некоторые параметры принимают целые значения.

1.3. Алгоритмы ускорения сходимости. Пусть $f \in C^q[-1,1], q \geq 1.$ и $\{f_s\}$ – его коэффициенты Фурье. Имеем $f(x) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} f_s \exp(i\,\pi\,s\,x)$, $x \in [-1,1]$.

Сравнивая это представление с формулой (5), получаем

$$R_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) - \sum_{r\epsilon D_n} f_r\ T_r(x)$$
$$= \sum_{s\notin D_n} (f_s - \sum_{r\epsilon D_n} f_r\ t_{r,s})\ \exp(i\,\pi\,s\,x).$$

Полагая, что функцию f аппроксимируем по формуле $f(x) \simeq \sum_{r\epsilon D_n} f_r\ T_r(x)$, получаем, что квадрат L_2 – нормы ошибки $R_n(x)$ имеет вид

$$||R_n(x)||^2 = \sum_{s\notin D_n} |f_s - \sum_{r\epsilon D_n} f_r\ t_{r,s}|^2 \qquad (7)$$

Замечание 1. *Если частичная сумма (2) классическая, то* n *нечетное и* D_n *состоит из всех целых* $k, |k| \leq \frac{n-1}{2}$.

Предлагаемые ниже алгоритмы позволяют эффективно восстанавливать гладкую функцию f, если известно конечное число ее коэффициентов Фурье $\{f_s\}$.

1.3а. Традиционный алгоритм. В **п. 2.1** выше было показано, как **при заданных** нецелых параметрах $\{z_k\}$ получить систему $\{T_r(x)\}$, $r\epsilon D_n$, в явном виде. Назовем в этом случае аппроксимацию $f(x) \simeq \sum_{r\epsilon D_n} f_r\ T_r(x)$ **традиционным алгоритмом**. В некоторых случаях он эффективно реализует ускорение сходимости ряда Фурье. Например, в простейшем случае $z_k = 0, \forall k$, система $\{T_r(x)\}$ состоит из многочленов и, в отличие от **КЕ-метода** (см. **п.1.1**), не требует решения каких-либо уравнений. На практике более стабильные результаты демонстрируют алгоритмы квазипериодического типа, являющиеся аналогами дискретных алгоритмов работ [8] и [10]. Здесь, при данном n, $z_k = \theta(n)k, |k| \leq n, 0 < \theta(n) < 1,$ и при $n \to \infty$ $\theta(n) \uparrow 1$. Оценка сходимости таких алгоритмов в классических классах целых функций при $n \to \infty$ приведена в работе [9], откуда следует, что чем выше гладкость функции f, тем эффективней традиционный алгоритм.

1.3б. Адаптивный алгоритм. Наличие свободы выбора параметров $\{z_k\}$ позволяет выбирать их для данных коэффициентов Фурье $\{f_r\}, r \in n$, «индивидуально». Основная наша идея следующая. Для того чтобы уменьшить ошибку $R_n(x)$ хотя бы в части формулы (7), достаточно минимизировать конечную сумму вида

$$\sum_{s\in\widetilde{D}_m} |f_s - \sum_{r\epsilon D_n} f_r\ t_{r,s}|^2 \to min,$$

множество $\widetilde{D}_m$ состоит из m разных целых чисел и $m \geq n, \widetilde{D}_m \cap D_n\ \emptyset$. Такой подход приводит к применению метода наименьших квадратов.

В конечном счете, такая задача сводится к решению методом псевдообращения следующей существенно нелинейной системы

$$f_s - \sum_{r \epsilon D_n} f_r\ t_{r,s} = 0,\ s\ \in\ \widetilde{D}_m\ , \tag{8}$$

относительно параметров $\{z_k\}, k \in D_n$.

Алгоритм **A** (см. его уточненную версию в [9]) позволяет исполнить это в два этапа: сначала применяется псевдообращение определенной $n \times\ m$-матрицы, затем вычисляются все нули $\{z_k\}$ некоторого многочлена n-той степени. На выходе алгоритма применяется метод **п. 1.2** .

1.4. Явление сверх-сходимости для частной суммы ряда Фурье.

Определение 1. *При заданном целом* $n > 0$ *рассмотрим множество* $\boldsymbol{Q_n}$ *конечных сумм* $q(x),\ x \in [-1,1]$, *вида*

$$q(x) = \sum_k P_{m_k}(x)\, exp(i\, \pi\, \mu_k\, x),\quad \mu_k\ \in \mathbb{C}\ ,\quad \sum_k (1 + m_k) \leq n,$$

где P_{m_k} *– многочлен степени* m_k**.** *Назовем* $\boldsymbol{Q_n}$ ***множеством квазиполиномов степени n***.

Замечание 2. *Квазиполиномы и их степени инвариантны относительно сдвигов аргумента. То же самое сохраняется при умножении квазиполинома на функцию* $\exp(\mathrm{z}\,\mathrm{x}),\ z \in \mathbb{C}$. *При перемножении двух квазиполиномов общего вида, как правило, получается квазиполином более высокой степени, чем каждый из сомножителей.*

Теорема 1 (**явление сверх-сходимости**) [5]. *Пусть* $f \in \boldsymbol{Q_n}$ *(см.* ***определение 1****) и даны множества n целых чисел* D_n и D_n, $D_n \cap \widetilde{D_n} = \emptyset$, *и коэффициенты Фурье* $\{f_s\}$, $s \in D_n \cup \widetilde{D_n}$, *функции* f. *Обозначим через* $\Lambda \in D_n \cup \widetilde{D_n}$ *множество всех целочисленных параметров* $\{z_k\}$ *в адаптивной аппроксимации (*см. ***п. 1.3б)***

$$f(x) \simeq F_n(x) = \sum_{r \epsilon D_n} f_r\ \ T_r(x),\ x \in [-1,1]\ .$$

Для того чтобы эта аппроксимация была точной **(***т.е. было* $f(x) \equiv F_n(x),\ x \in [-1,1]$*), необходимо и достаточно, чтобы* $\Lambda \subseteq D_n \cup \widetilde{D_n}$.

Замечание 3. *Множество функций* $\boldsymbol{Q_n}$ ***бесконечномерно*** *за счет произвольности параметров* $\{\mu_k\} \subset \mathbb{C}$. *Именно это лежит в основе необычно быстрой сходимости адаптивного алгоритма (см. [9]). Это свойство обнаружено в работе [5] и названо* ***сверх-сходимостью***. *Насколько нам известно, все известные алгоритмы ускорения сходимости частных сумм ряда Фурье (в том числе и традиционный алгоритм из* ***п. 1.3а)*** *точны только в соответствующих* ***конечномерных*** *пространствах).*

Определение 2. *Через* $\boldsymbol{Z_n}$ *обозначим множество параметров* $\{z_k\}$, *соответствующих адаптивной аппроксимации для данной функции f (см.* ***п. 1.3б*** *выше). Назовем* $\boldsymbol{Z_n}$ ***собственными параметрами функции*** $\boldsymbol{f}$.

Подчеркнем, что на практике множество $\mathbf{Z_n}$ зависит не только от f и n, но и от точности задания коэффициентов Фурье $\{f_s\}$, а также от свойств вычислительных средств, используемых при реализации адаптивного алгоритма для приближенного восстановления функции f по заданным величинам $\{f_s\}$ (подробности см. в [9]). В отличие от традиционного алгоритма адаптивный полнее учитывает «индивидуальные» особенности функции f, однако, как правило, имеет высокую сложность.

§2. О некоторых новых результатах.

Приведем полученные недавно результаты. В частности, среди них есть задачи, поставленные в работе [9].

2.1. Ряд Фурье. Удалось построить алгоритмы сверх-сходимости для быстрого суммирования классического периодического на действительной оси ряда Фурье для кусочно-гладких функций при нескольких заданных точках скачков (см. выше (1)). В основе примененного метода лежит следующая формула функции Грина для оператора $\frac{d}{dx} - \lambda\, I$ в случае одного скачка в точке $0 < t \leq 1$:

$$G(x,t,\lambda\,) = \begin{cases} \exp(i\,\pi\,(x-t-1)\,\lambda)/2\ ,\ t < x \\ \exp(i\,\pi\,(x-t+1)\,\lambda)/2,\ t \geq x \end{cases} \tag{9}$$

и то обстоятельство, что в каждой функции системы $\{T_r(x)\}$ могут содержаться функции с одним скачком, но в разных точках интервала $(-1,1]$. Это позволяет реализовать наши алгоритмы на основе разложения Крылова (2).

2.2. Многомерные ряды Фурье. В работе [5] (формула (10)) был приведен метод применения традиционного (названного там универсальным) алгоритма для ускорения сходимости многомерных рядов Фурье. Оказалось, что его можно применить и в случае адаптивного алгоритма. Например, в простейшем двумерном случае используется то обстоятельство, что каждые строка и столбец матрицы коэффициентов Фурье $\{f_{s,p}\}$ функции $f(x,t)$ «ускоряются» как соответствующие одномерные ряды Фурье.

2.3. Разложение по собственным функциям оператора Лапласа в прямоугольных областях. Здесь, наряду с методом предыдущего пункта (учитывающим формулы (16) и (17) ниже), можно применить и технически иной подход. Для простоты рассмотрим и здесь двумерный случай. Пусть $(x_1,x_2) \in [0,1] \times [0,1]$. Функция Грина для оператора $\Delta - \lambda\, I$, например, при граничных условиях Неймана, имеет вид (см. [11], глава XI)

$$G(x,t,\lambda\,) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_n\,\varepsilon_m\cos(\pi n\,x_1)\cos(\pi m\,x_2)\cos(\pi n\,t_1)\cos(\pi m\,t_2)}{\pi^2(n^2+m^2)-\lambda}, \tag{10}$$

где $\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_n = 2$ при $n \geq 1$. Функция $G_0(x_1, x_2, \lambda) = \mathrm{G}(x, (1,1), \lambda)$ используется здесь в случае гладкой функции $f(x_1, x_2)$.

2.4. О краевых задачах для ОДЕ произвольного порядка. Оказывается, что и в области общей теории граничных задач для ОДЕ на конечном отрезке может быть эффективен указанный в **пп.1.2-1.3** метод. Следуя обозначениям монографии [12], рассмотрим, например, при некотором целом $m \geq 2$ уравнение

$$L\, y = \sum_{k=0}^{m} p_k(x)\ y(x)^{(k)} = \lambda\, y(x)\,,\ x \in [-1,1]\,,\ p_m = 1, \qquad (11)$$

с регулярными (см. [12], глава II, § 4) краевыми условиями

$$U_\mu y = \sum_{k=0}^{m-1} \left(a_k^\mu y^{(k)}(-1) + b_k^\mu y^{(k)}(1) \right),\ \mu = 1,2,\dots,m\ , \qquad (12)$$

где $p_k(x) \in C^{k+m(q-1)}[-1,1]$ – комплекснозначные функции, $\{a_k^\mu\}$, $\{b_k^\mu\}$ – комплекснозначные постоянные и $\mathrm{q} \geq 1$, $\mathrm{k} = 0, \dots, (\mathrm{m}-1)$, $\mu = 1, \dots, \mathrm{m}$. Сопряженная задача имеет вид

$$L^* z = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k (p_k(x)\, z(x))^{(k)} = \lambda\, z(x), \qquad x \in [-1,1]$$

$$U_\mu^* z = \sum_{k=0}^{m-1} \left(a_k^{*\mu} z^{(k)}(-1) + b_k^{*\mu} z^{(k)}(1) \right),\ \mu = 1,2,\dots,m,$$

где $\{a_k^{*\mu}\}$, $\{b_k^{*\mu}\}$ – соответствующие константы (см. [12], глава II, § 1). Собственные значения $\{\nu_k\}$ задачи определяются как все нули целой функции

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & \dots & U_1(y_m) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \dots & U_2(y_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_m(y_1) & U_m(y_2) & \dots & U_m(m) \end{vmatrix}, \qquad (13)$$

а $\{y_k(x), z_k(x)\}$ – соответствующая (вообще говоря, биортогональная) система собственных функций. Чтобы обратить оператор $L - \lambda\, I$, обозначим через $y_i = y_i(x, \lambda)$, $i = 1,2,\dots,m$ фундаментальную систему решений уравнения $Ly = \lambda y$, удовлетворяющую условиям

$$y_i^{(j-1)}(-1, \lambda) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Пусть все собственные значения краевой задачи (11)-(12) простые (как, например, в случае самосопряженных задач). Приведем схему построения необходимой нам функции Грина $G = (L - \lambda I)^{-1}$. Обозначим через $W(x)$ вронскиан системы $\{y_i\}$

$$W = \begin{vmatrix} y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_m^{(m-1)} \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(m-2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1 & y_2 & \dots & y_m \end{vmatrix}$$

и

$$g(x,t) = \pm \frac{1}{2\,W(t)} \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_m(x) \\ y_1^{(m-2)}(t) & y_2^{(m-2)}(t) & \dots & y_m^{(m-2)}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_m(t) \end{vmatrix}, \quad (14)$$

где знак «+» берется при $x > t$, а знак «–» – при $x < t$.Тогда

$$G(x,t,\lambda) = \frac{(-1)^m}{\Delta(\lambda)} H(x,t,\lambda),\ \lambda \notin \{\nu_k\}, \quad (15)$$

где

$$H(x,t,\lambda) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_m(x) & g(x,t) \\ U_1(y_1) & \dots & U_1(y_m) & U_1(g) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_m(y_1) & \dots & U_m(y_m) & U_m(g) \end{vmatrix}$$

При общей нумерации всех собственных значений функция Грина имеет вид

$$G(x,t,\lambda) = \sum_{\forall k} \frac{y_k(x)\overline{z_k(t)}}{\lambda_k - \lambda}, \lambda \notin \{\nu_k\}. \quad (16)$$

Остается (см. [9]) привести следующий аналог последовательности (3), при условии $z_s(1) \neq 0, \forall s$:

$$t_{r,s} = \frac{z_r(1)}{z_s(1)} \left(\prod_{p \in D_n, p \neq r} \frac{\nu_s - \nu_p}{\nu_r - \nu_p} \right) \prod_{q \in D_n} \frac{\nu_r - \lambda_q}{\nu_s - \lambda_q},$$

$$r \in D_n, s \in \mathbb{Z}, \{\lambda_q\} \notin \{\nu_k\}, \quad (17)$$

и указать, что в аналоге множества $\mathbf{Q}_n$ (см. ***определение 1***) роль функции $\exp(i\,\pi\,\lambda\,x)$ играет функция $G(x,1,\lambda), x \in [-1,1]$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Читатель может легко убедиться, что, *в **случае самосопряженной задачи (11)-(12)*** естественным образом применимы все основные, изложенные выше в **§2**, этапы построения как традиционных, так и адаптивных алгоритмов, включая фактически те же базовые формулы, а также такие же доказательства существования соответствующих явлений сверх-сходимости. Практическая эффективность такого подхода нуждается в численной реализации, поскольку при увеличении степени m уравнения (11) сложность алгоритмов возрастает не только за счет сложности формул (13)-(17), но и благодаря расположению величин $\{(\nu_k)^{1/m}\}$ в комплексной плоскости (см. главу II в [12]) .

§3. Заключение.

В работах [5] и [7] был предложен новый подход к ускорению сходимости рядов Фурье, основанный на использовании параметрической биортогональной системы (см. **п.1.2**). На этом пути были разработаны два алгоритма, названные традиционным и адаптивным. Первый из них не требует для реализации никаких дополнительных расчетов, а второй (более точный и сложный) основан на применении явления сверх-сходимости, обнаруженного в [5].

Естественность предложенного подхода подтверждается не только высокой эффективностью его численного применения, но и возможностью обобщений на широкие классы разложений по собственным функциям граничных задач (см. выше, **§2**). Универсальность приведенного подхода подтверждена также в работе [8], в которой изучена задача интерполяции на конечной сети. Здесь также было обнаружено явление сверх-сходимости и были предложены соответствующие традиционный и адаптивный алгоритмы. Хотя и здесь изучалась граничная задача для конечно-разностного уравнения, с практической точки зрения этот результат особенно важен, так как позволяет эффективно и быстро (применением FFT) аппроксимировать гладкую функцию f на всем отрезке ее значениями на конечной равномерной сети, – вне связи с какой-либо граничной задачей. При этом явление сверх-сходимости обеспечивает оптимальное применение интерполяции посредством аналога множества квазиполиномов $\boldsymbol{Q_n}$ (см. ***определение 1***).

Институт математики НАН РА
e-mail: nersesyan.anry@gmail.com

Академик НАН РА А. Б. Нерсесян

О явлении сверх-сходимости при разложении по собственным функциям

В недавних работах автора, относящихся к методам ускорения сходимости рядов Фурье, был предложен численный алгоритм, позволяющий приближать гладкие функции с недостижимой ранее точностью. В данной

работе показано, что подобный алгоритм эффективен и в случае разложений по собственным функциям некоторых других краевых задач для дифференциальных уравнений (как обыкновенных, так и в частных производных) в прямоугольных областях. Обсуждаются также некоторые перспективы подобных исследований.

ՀՀ ԳԱԱ ակադեմիկոս Ա. Բ. Ներսեսյան

Գեր-զուգամիտության երևույթի մասին սեփական ֆունկցիաներով վերլուծությունների ժամանակ

Հեղինակի վերջերս հրատարակված աշխատանքներում՝ նվիրված Ֆուրյեի շարքերի զուգամիտության արագացմանը, առաջարկված էր թվային ալգորիթմ, որը մոտարկում է ողորկ ֆունկցիաները նախկինում անհասանելի ճշգրտությամբ: Տվյալ աշխատանքում ցույց է տրված, որ նման ալգորիթմը արդյունավետ է և որոշ այլ սեփական ֆունկցիաներով վերլուծությունների համար:

Academician of NAS RA A. B. Nersessian

On the Phenomenon of Super-Convergence in Eigenfunctions Expansions

In some recent works of the author, related to methods for accelerating the convergence of Fourier series, a numerical algorithm was proposed that allows approximating smooth functions with previously unattainable accuracy. In this paper, we show that similar algorithms are also effective in the case of expansions by some other eigenfunctions associated with boundary value problems for differential equations (both ordinary and partial) in rectangular domains. The prospects for such studies are also discussed.

Литература

1. *Крылов А. Н.* О приближенных вычислениях. Лекции, читанные в 1906 г. СПб. 1907. 288 с.
2. *Eckhoff K. S.* – Math. Comp. 1993. V. 61. P. 745-63.
3. *Нерсесян А. Б.* – Доклады НАН РА. 2005. Т. 105. № 1. С. 28-35.
4. *Нерсесян А. Б.* – Доклады НАН РА. 2007. Т. 107. № 2. С. 124-131.
5. *Nersessian A.* – Armen. J. Math. 2018. V. 10. № 9. P. 1-22.
6. *Nersessian A.* – Armen. J. Math. 2019. V. 11. № 2. P. 1–2.
7. *Nersessian A.* – Lobachevskii Journal of Mathematics. 2019. V. 40. № 8. P. 1122-1131.
8. *Nersessian A.* – Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. Springer. 2021. V. 357. P. 463-477.
9. *Nersessian A.* – Armen. J. Math. 2022. V. 14. P. 1-31.

10. *Нерсесян А. Б., Оганесян Н. В.* – Доклады НАН РА. 2001. Т. 101. № 2. С. 115-121.
11. *Титчмарш Э. Ч.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т. 2. М. ИЛ. 1961.
12. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. Изд. 2-е. М. Наука. 1969. 528 с.