ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 122 2022 № 3

МАТЕМАТИКА

УДК 621.391.15
DOI: 10.54503/0321-1339-2022.122.3-175

В. К. Леонтьев[1], Г. Л. Мовсисян[2], Ж. Г. Маргарян[3]

Шары в булевом пространстве

(Представлено академиком С. К. Шукуряном 24/V 2022)

Ключевые слова: *булево пространство, сумма множеств по Минковскому, сумма шаров, весовая функция, производная функция.*

Введение. Во многих задачах комбинаторного анализа используются операции сложения множеств (сумма, прямая сумма, прямое произведение и т.п.). В данной работе, как и в предыдущих [1, 2], приводятся некоторые свойства операции сложения множеств (сложения по Минковскому) в булевом пространстве B^n и рассматриваются суммы «классических фигур», таких как шар. Полученные результаты позволяют описать суммы через такие характеристики слагаемых, как радиус шара и расстояние между центрами.

1. Сумма множеств по Минковскому.

Если $x = (x_1x_2 \dots x_n)$, $y = (y_1y_2 \dots y_n)$ – точки из B^n, то
$$x + y = ((x_1 \oplus y_1)(x_2 \oplus y_2) \dots (x_n \oplus y_n)),$$
где $\oplus$ – операция сложения по mod 2,
$$x \cdot y = ((x_1 \cdot y_1)(x_2 \cdot y_2) \dots (x_n \cdot y_n)), \quad \text{где} \quad x_i y_i = \max\{x_i, y_i\}$$

Эта операция сложения элементов из B^n может быть продолжена на подмножества B^n. Другими словами, если $X, Y \in 2^{B^n}$, то
$$X + Y = \{x + y;\ x \in X, y \in Y\}.$$

Таким образом, сумма подмножеств $X + Y$ состоит из сумм точек, принадлежащих соответственно X и Y.

Примеры.

1. Если $X \in 2^{B^n}$, $y \in B^n$, то $\{X + y\}$ – «сдвиг» множества X на точку y и $|X + y| = |X|$.

2. Если X – подпространство B^n, то $X + X = X$.

3. $X + B^n = B^n$ для любого $X \in 2^{B^n}$.

Иначе, $\{X+Y\}$ можно интерпретировать как объединение «сдвигов» множеств X на точки из множества Y.

Семейство $(2^{B^n}, +)$ с введенной операцией «+»-сложения по Минковскому образует моноид с нейтральным элементом $\{0^n\}$ – одноэлементным множеством, состоящим из нулевого элемента B^n.

Ниже перечислены простые свойства операции «+»-сложения по Минковскому, которые можно рассматривать как свойства алгебраической системы с основным множеством 2^{B^n} и операциями: сумма, объединение, пересечение и др.:

1. ассоциативность $X+(Y+Z)=(X+Y)+Z$;
2. коммутативность $X+Y=Y+X$;
3. дистрибутивность по объединению, пересечению, вычитанию, умножению $(X \cup Y)+Z=(X+Z) \cup (Y+Z)$;
4. $(X \cap Y)+Z=(X+Z) \cap (Y+Z)$;
5. $(X \setminus Y)+Z=(X+Z) \setminus (Y+Z)$;
6. $(X \cdot Y)+Z=(X+Z) \cdot (Y+Z)$.

Конечно, имеется много других соотношений, связывающих элементы определенной выше алгебраической сиситемы.

2. Сумма шаров в $\boldsymbol{B^n}$. Пусть $\rho(x,y)=\|x+y\|$ – расстояние Хемминга между точками $x, y \in B^n$.

Шар $S_t^n(v)$ с центром в точке $v \in B^n$ и радиуса t определяется стандартным образом

$$S_t^n(v)=\left\{x \in B^n \rho(v,x) \le t\right\} \tag{1}$$

и имеет мощность

$$S_t^n=\left|S_t^n(v)\right|=\sum_{\kappa=0}^{t}\binom{n}{k}.$$

Семейство шаров $\left\{S_t^n(a)\right\}$ играет значительную роль как в теории корректирующих кодов $[3]$, так и в комбинаторной математике в целом [4, 5].

В частности, мощность пересечения шаров радиуса t является важным параметром в модели передачи информации по нескольким каналам $[6]$.

Отметим, что формула (1) допускает следующее обобщение, связанное с суммированием.

Пусть $M \in 2^{B^n}$ и $S_t^n(M)$ – множество точек, принадлежащих объединению шаров радиуса t с центром в точках M, т.е.

$$S_t^n(M) = \bigcup_{x \in M} S_t^n(x).$$

$S_t^n(M)$ – «обобщенный» шар радиуса t с центром в точках M.

При этом дополнение обобщенного шара $S_t^n(M)$ в B^n является обобщенным шаром. Точнее,

$$\overline{S}_t^n(M) = \bigcup_{x \in M} S_{n-t-1}^n\left(\overline{x}\right),$$

где « $\bar{\ }$ » – логическое дополнение (отрицание) в булевой алгебре.

В алгебраическом аспекте множество всех шаров в булевом кубе B^n также обладает целым рядом интересных свойств, некоторые из которых перечислены ниже.

1. $S_{t_1}^n\left(M_1\right) + S_{t_2}^n\left(M_2\right) = S_{t_1+t_2}^n(M_1 + M_2)$.

Таким образом, при сложении по Минковскому двух шаров соответственно радиусами t_1, t_2 и с центрами в множествах M_1, M_2 соответственно получается шар радиуса $t_1 + t_2$ с центром в $M_1 + M_2$.

При этом если $t_1 + t_2 \geq n$, то

$$S_{t_1}^n\left(M_1\right) + S_{t_2}^n\left(M_2\right) = B^n.$$

2. $S_p(M) = M + S_p(0)$.

Обобщенный шар с центрами в точках множества M можно представить в виде суммы по Минковскому множества M и шара с центром в нулевой точке.

3. $S_{t_1}^n(S_{t_2}^n(M)) = S_{t_1+t_2}^n(M)$.

1) Пусть $\overline{F}_{a,t}(z)$ – весовая функция сферы радиуса t с центром в $a \in B^n$

$$\overline{F}_{a,t}(z) = \sum_{x \in C_t^n(a)} z^{\|x\|},$$

где $C_t^n(a) = S_t^n(a) \setminus S_{t-1}^n(a)$.

Утверждение 1. Имеет место соотношение

$$\overline{F}_{a,t}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|u| = \rho} \frac{(1+uz)^{n-\|a\|}(u+z)^{\|a\|}}{u^{t+1}} du$$

где ρ <1.

Если рассматривать $\|x\|$ для $x \in C_t^n(0)$ как случайную величину ξ, равномерно распределенную по сфере $C_t^n(a)$, то утверждение 1 позволяет находить параметры этого распределения.

2) **Следствие.** Имеет место соотношение

1. $M\xi = t + \|a\| - 2t\frac{\|a\|}{n}$.

2. Если $\|a\| = o(n)$ и $t = o(n)$, то $D\xi = \frac{4t\|a\|(\|a\|+t)}{n}$.

Пусть $F_{a,t}(z)$ – весовая функция шара $S_t^n(a)$ радиуса t с центром в точке $a \in B^n$, т. е.

$$F_{a,t}(z) = \sum_{x \in S_{t(a)}^n} z^{\|x\|}.$$

Утверждение 2. Имеет место соотношение

$$F_{a,t}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|u|=\rho} \frac{(1+uz)^{n-\|a\|}(z+a)^{\|a\|}}{(1-u)^{u^{t+1}}} du,$$

где ρ <1.

Если $\Phi_{a,t}(z)$ – производная функция расстояния в шаре радиуса в B^n или

$$\Phi_{a,t}(z) = \sum_{x,y \in S_t^n(a)} z^{\rho(x,y)},$$

то справедливо

Утверждение 3. Имеет место соотношение

$$\Phi_{a,t}(z) = z^{t+1} \sum_{p=0}^{t} \binom{n}{p} z^p \oint\limits_{|u|=\rho} \frac{(1+u)^{n-p}(1+\frac{u}{z^2})^p}{(z-u)u^{t+1}} du, \tag{2}$$

где ρ <1.

Если $\xi = \rho(x,y)$ – случайная величина, равномерно распределенная в шарах $S_t^n(0)$, и $W_t(z)$ – производные функции этой случайной величины, то

$$W_t(z) = \frac{1}{(S_t^n)^2} \sum_{x,y \in S_t^n(a)} z^{\rho(x,y)} = \frac{\Phi_t(z)}{(S_t^n)^2}$$

Из (2) вытекает:

Следствие. $M\xi = \dfrac{2nS_{t-1}^{n-1}}{(S_t^n)^2} S_t^{n-1}$.

Следствие. Если $t = o(\sqrt{a})$, то

$$M\xi = 2t - 0(\frac{t^2}{n}).$$

Рассмотрим весовую функцию $F_t(z)$ пересечения двух шаров $S_t^n(a)$ и $S_t^n(0)$:

$$F_t(z) = \sum_{x \in S_t^n(a) \cap S_t^n(0)} z^{\|x\|},$$

Утверждение 4. Имеет место соотношение

$$F_t(z) = \sum_{r,m=0}^{t} z^m. \tag{3}$$

Суммирование в формуле (3) происходит по всем параметрам r и m, для которых биномиальный коэффициент определен.

Следствие. Пусть $\lambda(n,t) = \max_a \left\{ \left| S_t^n(0) \cap S_t^n(a) \right| \right\}$. Тогда

$$\lambda(n,t) = \min\left\{ 2S_{t-1}^{n-1}, 2^n \right\} \tag{4}$$

Из формулы (4) следует, что любой шар радиуса t из B^n однозначно определяется $(\lambda(n,t)+1)$-точками и это число является минимальным для определимости шара радиуса t. При этом «определимость» означает следующее: если два шара радиуса t имеют в пересечении $\lambda(n,t)$ и больше точек, то они совпадают.

Если $\|a\| = k$, то выражение $F_t(z)$ можно записать в следующей форме:

$$F_t(z) = \sum_{r,m} z^m \operatorname*{coef}_{u,v} \left\{ \frac{(1+u)^{n-k}(1+uv^2)^k}{u^{m+1}v^{m-r+k+1}} \right\}. \tag{5}$$

Из (5) получается

Утверждение 5. Имеет место соотношение

$$F_t(z) = \operatorname*{coef}_{u,v} \left\{ \frac{(1+u)^{n-k}(1+uv^2)^k}{(1-v)(uv-z)v^k} \left(1 - \left(\frac{z}{uv} \right)^{t+1} \right) (1-v^{t+1}) \right\}.$$

Следствие. Справедлива формула

$$\left|S^n t(a) \cap S_t^n(b)\right| = \sum_r \binom{k}{r} S_{t-r}^{n-k} + \sum_r \binom{k}{r} S_{t-k+r}^{n-k}. \qquad (6)$$

$$k < 2r < \min\{2k, t+k+1\},$$

где $\rho(a,b) = k$.

Из (6) следует, что

$$\left|S_t^n(a) \cap S_t^n(b)\right| = 2S_{t-1}^{n-1} \text{ при } \rho(a,b) = 1,$$

$$\left|S_t^n(a) \cap S_t^n(b)\right| = \binom{2t}{t} \text{ при } \rho(a,b) = 2t.$$

Рассмотрим производную функцию

$$F_t(a,b,z_1,z_2) = \sum_x z_1^{\rho(x,a)} z_2^{\rho(x,b)}.$$

$$\rho\ (x,a) \le t,$$

$$\rho\ (x,b) \le t.$$

Утверждение 6. Имеет место соотношение

$$F_t(a,b,z_1,z_2) =_{u,v}^{coef} \left\{ \frac{(1-(\frac{z_1}{u})^{t+1}}{u-z_1} \frac{1-(\frac{z_2}{v})^{t+1}}{v-z_2} (1+uv)^{n-\rho(a,b)} (u+v)^{\rho(a,b)} \right\}.$$

Если выбрать в B^n «случайным» образом два шара радиуса t, то мощность их пересечения $\left|S_t^n(a) \cap S_t^n(b)\right|$ зависит только от расстояния между центрами этих шаров.

Если обозначим через $\xi_t(a,b)$ случайную величину, определяемую следующим образом:

$$\xi_t(a,b) = \left|S_t^n(a) \cap S_t^n(b)\right|,$$

то справедливо

Утверждение 7. Имеет место соотношение

$$M\xi_t(a,b) = \frac{(S_t^n)^2}{2^n}.$$

[1] ФИЦ ИУ РАН, Москва
[2] Группа Бит, Москва
[3] Ереванский государственный университет
e.mails: vkleontiev@yandex.ru, garib@hkzap.ru , j.margaryan@ysu.am

В. К. Леонтьев, Г. Л. Мовсисян, Ж. Г. Маргарян

Шары в булевом пространстве

Приводятся некоторые свойства операции сложения множеств (сложения по Минковскому) в булевом пространстве и рассматриваются суммы таких фигур, как шары. Полученные результаты позволяют описать суммы через такие характеристики слагаемых, как радиус шара и расстояние между центрами.

Վ. Կ. Լեոնտիև, Գ. Լ. Մովսիսյան, Ժ. Գ. Մարգարյան

Գնդեր բուլյան տարածությունում

Բերված են գումար (գումար ըստ Մինկովսկու) գործողության որոշակի հատկություններ բուլյան տարածության համար, և դիտարկվում է այնպիսի պատկերների գումար, ինչպիսին գնդերն են։Ստացված արդյունքները հնարավորություն են տալիս նկարագրելու գումարը այնպիսի բնութագրիչներով, ինչպիսին են գնդերի շառավիղները և կենտրոնների միջև հեռավորությունը։

V. K. Leontiev, G. L. Movsissian, Zh. G. Margaryan

Spheres in Boolean Spase

The operation of addition of sets is used in numerous problems of combinatorics. In the present paper some properties of the addition operation of sets (the Minkowski addition) in Boolean space are presented and the additions of spheres are considered. The obtained results make possible to describe the sums through such characteristics as the sphere radii and the distances between the sphere centres.

Литература

1. *Leontiev V. K., Movsisyan G. L., Margaryan Zh. G.* – Open Journal of Discrete Mathematics (OJDM). 2016. V. 6. № 2. P. 25-40.
2. *Леонтьев В. К., Мовсисян Г. Л., Маргарян Ж. Г.* – ДНАН РА. 2017. Т. 117. № 2. С. 106-119.
3. *Мак-Вильямс Ф. Дж.* Теория кодов, исправляющих ошибки. М. Связь., 1979. 744 с.
4. *Бурдюк В. Я.* Дискретные метрические пространства. Днепропетровск. ДГУ. 1982. 99 с.
5. *Леонтьев В. К.* – Журн. выч. мат. и мат. физ. 2009. Т. 49. № 11. С. 2041-2053.
6. *Леонтьев В. К.* – Журн. выч. мат. и мат. физ. 2008. Т. 48. № 6. С. 1126-1139.
7. *Егорычев Г. П.* Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм. Новосибирск. Наука. 1977. 286 с.