ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 122 2022 № 2

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 510.64
DOI: 10.54503/0321-1339-2022.122.2-118

А. А. Чубарян[1], А. С. Азизян[2]

О сложностях выводов балансированных формул в двух пропозициональных системах выводов

(Представлено академиком Ю. Г. Шукуряном 10/IV 2022)

Ключевые слова: *балансированные формулы, дерево расщеплений, определяющий конъюнкт, сложности выводов.*

1. Введение. Балансированные формулы играют важную роль в теории сложности выводов. В [1] доказано, что если сложности выводов балансированных формул будут полиномиально ограничены в системах Фреге, то сложности выводов всех тавтологий будут также полиномиально ограничены, что, в свою очередь, будет доказательством совпадения класса задач NP со своим дополнением [2]. Данная работа посвящена изучению количества шагов и длин выводов одного класса балансированных формул в некоторых системах пропозициональных выводов. Исследованы выводы балансированных формул

$$QHQ_n = \bigvee_{0\le i\le n} \bigwedge_{1\le j\le n}\left[\bigvee_{1\le k\le i} \bar{q}_{i,j,k} \vee \bigvee_{i<k\le n} q_{k,j,i+1}\right],$$

т.е. формул, в которых каждая переменная имеет ровно одно положительное и одно отрицательное вхождения. Выводы этих формул рассматриваются в системе $\mathbf{OP}$, основанной на обобщённом методе расщепления [3], и в системе $\mathbf{E}$, основанной на определяющей дизъюнктивной нормальной форме [4]. Относительно второй системы в [4] доказана ее полиномиальная эквивалентность с системой резолюций и секвенциальной системой без правила сечения, следовательно, в них могут быть экстраполированы оценки сложностных характеристик выводов в системе $\mathbf{E}$. Место же системы $\mathbf{OP}$ в известной иерархии пропозициональных систем (см., например, [2]) пока не уточнено, более того, в [5] рассмотрены два класса формул, для одного из которых оценки и количества шагов, и длин выводов в $\mathbf{OP}$ существенно лучше, чем в системах Фреге, а для другого класса – наоборот. В силу вышесказанного исследование сложностных характеристик формул $\mathrm{QHQ_n}$ в системе OP представляет особый интерес. В настоящей статье для всех четырех исследуемых величин получены одинаковые по порядку (по логарифмической шкале) верхние и нижние оценки.

2. Предварительные понятия. Для представления основных результатов напомним некоторые понятия и обозначения, введенные в [3, 4]. Мы пользуемся общепринятыми понятиями единичного n-мерного булева куба B^n, пропозициональной формулы, тавтологии и системы доказательства классического исчисления высказываний.

Конкретный выбор языка для представления пропозициональной формулы, а значит, и системы доказательств, не имеет значения для наших рассмотрений, однако из технических соображений предполагаем, что он содержит пропозициональные переменные, логические связки ¬, &, ∨, ⊃ и пару скобок (,). Длина формулы φ, определяемая как количество всех вхождений в нее логических связок, обозначается через $|\varphi|$. Очевидно, что линейной функцией от $|\varphi|$ оцениваются и полная длина формулы, понимаемая как количество всех символов.

Следуя общепринятой терминологии, *литералом* считается переменная или ее отрицание. Конъюнкт K может быть представлен как множество литералов, причем это множество не может содержать переменную и ее отрицание одновременно.

Для произвольной формулы ψ следующие тривиальные эквивалентности называются ***правилами замещения***:

$0\,\&\psi = 0,$	$\psi\&\,0 = 0,$	$1\,\&\psi = \psi,$	$\psi\&\,1 = \psi,$
$0 \vee \psi = \psi,$	$\psi \vee 0 = \psi,$	$1 \vee \psi = 1,$	$\psi \vee 1 = 1,$
$0 \supset \psi = 1,$	$\psi \supset 0 = \bar{\psi},$	$1 \supset \psi = \psi,$	$\psi \supset 1 = 1,$
$\bar{0} = 1,$	$\bar{1} = 0,$	$\bar{\bar{\psi}} = \psi,$	

Применение правил замещения к некоторому слову заключается в замене какого-либо его подслова, имеющего вид левой части одного из указанных эквивалентностей, правой частью. Отметим также, что функция p^{σ} определяется общепринятым образом: p^0 есть $\neg p$, а p^1 есть p.

Пусть φ – пропозициональная формула, $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ –множество всех ее переменных, а $P' = \{p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_m}\}$ $(1 \le m \le n)$ – некоторое подмножество P.

Определение 2.1. Для некоторого $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\} \in \mathrm{B}^m$ конъюнкт $K^{\sigma} = \{p_{i_1}^{\sigma_1}, p_{i_2}^{\sigma_2}, \dots, p_{i_m}^{\sigma_m}\}$ называется φ-определяющим, если, подставляя в φ вместо каждой переменной p_{i_j} значение σ_j $(1 \le j \le m)$ и последовательно применяя правила замещения, получаем значение формулы φ (0 или 1) вне зависимости от значений остальных переменных.

Определение 2.2. Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) $D=\{K_1, K_2,...,K_r\}$ называется φ-определяющей для формулы φ, если каждый конъюнкт из D является φ-1-определяющим и φ= D.

Определяющую ДНФ будем обозначать через оДНФ.

2.1. Описания рассматриваемых систем. В [4] была описана следующая система доказательств **E.** Аксиомы системы **E** не фиксируются. Для каждой формулы φ в качестве аксиом берутся конъюнкты из некоторой оДНФ. **Элиминационное правило** вывода (э-правило) выводит конъюнкт $K' \cup K''$ из конъюнктов $K' \cup \{p\}$ и $K'' \cup \{\neg p\}$ для произвольной пропозициональной переменной p .

E-выводом называется такая конечная последовательность конъюнктов, каждый из которых или является одной из зафиксированных аксиом, или получается из предыдуших по э-правилу. Очевидно, что ДНФ $D=\{K_1,K_2,\ldots,K_l\}$ является тавтологией, если, применяя э-правило, можно вывести пустой конъюнкт ($\varnothing$) из аксиом $\{K_1,K_2,\ldots,K_l\}$.

Система обобщенных расщеплений **OP** была введена в [3]. Обобщенный метод расщеплений (о.м.р.) позволяет каждой формуле φ сопоставить некоторое помеченное бинарное дерево расщепления (д.р.), корню которого приписана сама формула φ, конечным узлам приписаны значения 0 или 1, а сыновьям каждого узла v, которому приписана некоторая формула φ_v, приписаны результаты расщепления φ_v по некоторой переменной p, входящей в φ_v следующим образом:

1) при расщеплении тавтологии φ по литералу α делаем пометку α на ребре, ведущем от узла с пометкой φ к узлу с пометкой $\varphi[\alpha]$,

2) сама формула $\varphi[\alpha]$ строится по φ следующим образом: если $\alpha = p (\alpha = \bar{p})$, то всюду в φ вместо переменной p подставляем значение 1(0) и применяем правила замещения или до получения формулы, не содержащей константы, или до получения константы.

Естественно, что, меняя порядок переменных, по которым производится расщепление, можно получать различные д.р. Очевидно также, что тавтологиям соответствуют деревья, конечным узлам которых приписаны только единицы.

Соответствующая система, основанная на о.м.р. с одной аксиомой-тавтологией – 1 и одним правилом вывода $\varphi[p], \varphi[\bar{p}] \vdash \varphi$, обозначена через **OP.**

2.2. Сложностные характеристики выводов. Основными сложностными характеристиками выводов являются: t-сложность, определяемая как количество различных формул в выводе, и l-сложность, определяемая как сумма длин всех различных формул в выводе [2]. Пусть ϕ является некоторой системой выводов, а φ – некоторая тавтология. Через $t^{\phi}(\varphi)\big(l^{\phi}(\varphi)\big)$ обозначается минимально возможное значение t-сложности (*l-сложности*) всевозможных выводов тавтологии φ в системе ϕ. В даль-

нейшем t-сложности (*l-сложности*) формул $\mathrm{QHQ_n}$ в системах **OP** и **E** будем обозначать через $t^{\mathrm{OP}}(n)\big(l^{\mathrm{OP}}(n)\big)$ и $t^{\mathrm{E}}(n)\big(l^{\mathrm{E}}(n)\big)$ соответственно и будут использованы следующие общепринятые обозначения:
если $\exists \mathrm{c}_1$ т. ч. для $\forall x$ $|f(x)| \geq c_1|g(x)|$, то будем писать $f(x) = \Omega(g(x))$,
если $\exists \mathrm{c}_2$ т. ч. для $\forall x$ $|f(x)| \leq c_2|g(x)|$, то будем писать $f(x) = O(g(x))$.

При выполнении этих обоих условий будем писать $f(x) = \theta(g(x))$

3. Оценка сложностей выводов формул $\mathbf{QHQ_n}$ в системе OP. Для описания алгоритма вывода $\mathrm{QHQ_n}$ в системе **OP** введем ряд обозначений. Для данного n и всех $0 \leq \mathrm{i} \leq n$ и $1 \leq \mathrm{j} \leq n$ определим формулы $Q_{i,j} = \bigvee_{1\leq k\leq i} \bar{q}_{i,j,k} \vee \bigvee_{i<k\leq n} q_{k,j,i+1}$, и тогда $\mathrm{QHQ_n} = \bigvee_{0\leq i\leq n}\big(Q_{i1} \wedge Q_{i2} \wedge \ldots \wedge Q_{ij} \wedge \ldots \wedge Q_{i(n-1)} \wedge Q_{in}\big)$, и, наконец, введя обозначение $(Q_{i1} \wedge Q_{i2} \wedge \ldots \wedge Q_{in}) = H_i$, получим $\mathrm{QHQ_n} = H_0 \vee H_1 \vee \ldots \vee H_n$. Поскольку каждую из формул $Q_{i,j}$ всего за шаг можно перевести в единицу, то за n шагов можно перевести одну из формул H_i в единицу, тем самым получив единицу на одной из ветвей д.р. $\mathrm{QHQ_n}$. На рис. 1 приводится пример д.р. для $\mathrm{QHQ_3}$.

Отметим, что в этом д.р. только из одной вершины с плюсом продолжено расщепление и дальнейшее д.р. содержит одно поддерево (в большом треугольнике) для $\mathrm{QHQ_2}$, в котором содержатся два поддерева (в малых треугольниках) для $\mathrm{QHQ_1}$. Исследуя д.р. этого примера, нетрудно убедиться, что в общем случае до первого перехода в единицу производится n расщеплений по логическим переменным, т.е. на момент первого перехода в единицу мы имеем всего $\sum_{i=0}^{n} 2^i$ формул, две из которых являются единицами, т.е. $\left(\sum_{i=0}^{n} 2^i\right) - 2$ различных формул, не считая единиц. Каждая из неединичных (с плюсом) формул, получившихся на n-ом уровне сверху, в сути своей имеет одинаковую длину и «строение» и при дальнейшем расщеплении через (n-2) шага может быть представлена в виде д.р. для случая (n-1), а таких формул всего $2^n - 2$, таким образом для $\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{OP}}(n)$ получаем следующее рекуррентное соотношение:

$$\boldsymbol{t}^{\mathrm{OP}}(n) \leq (2^n - 2)\boldsymbol{t}^{\mathrm{OP}}(n-1) + 4 + n2^n,$$

из которого после ряда преобразований получается $\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{OP}}(n) \leq 2^{\frac{1}{2}(\mathrm{n}+1)(\mathrm{n}+2)}$.

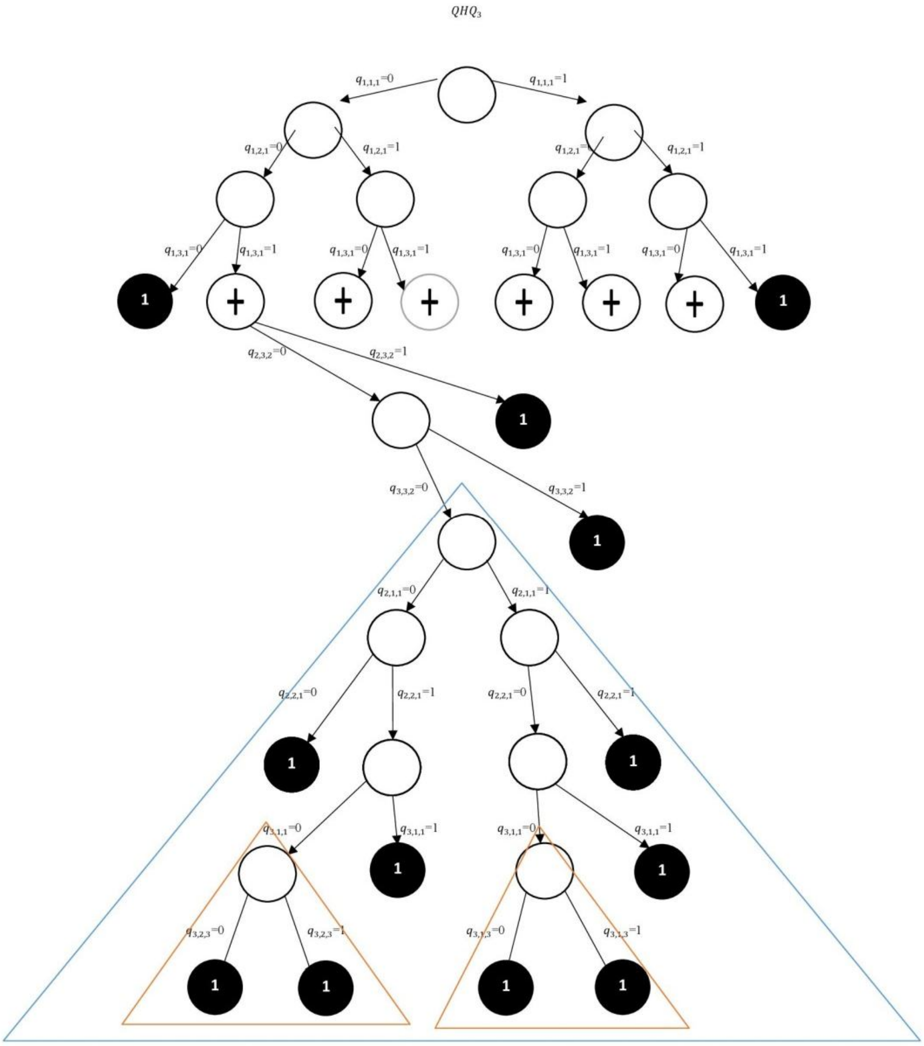

Рис. 1.

Для получения нижней оценки величины $\boldsymbol{t}^{\mathrm{OP}}(n)$ с учетом «одинаковости» вхождения различных переменных в формулу $\mathrm{QHQ_n}$, а значит, неважности порядка выбора переменных для последовательных расщеплений, нетрудно убедиться, что только количество формул с плюсом во всем д.р. будет не меньше $(2^{\mathrm{n}}-2)\,(2^{\mathrm{n}-1}-2)\ldots(2^3-2)(2^2-2)$, и, учитывая $(2^{\mathrm{n}}-2) \geq 2^{\mathrm{n}-1}$, для $n \geq 2$ получим $\boldsymbol{t}^{\mathrm{OP}}(n) \geq 2^{\mathrm{n}-1}2^{\mathrm{n}-2}\ldots 2^1 \geq 2^{\frac{1}{2}(\mathrm{n}-1)\mathrm{n}}$.

Для получения оценок длин выводов учтем тривиальные неравенства $\boldsymbol{t}^{\Phi}(\varphi) \leq \boldsymbol{l}^{\Phi}(\varphi) \leq \boldsymbol{t}^{\Phi}(\varphi)|\mathrm{A}|$, где A – самая длинная формула в выводе. В силу того, что $|QHQ_n| = \frac{3n^2(n+1)}{2} - 1$, получим

$$\boldsymbol{l}^{OP}(n) \le 2^{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)}\frac{3n^2(n+1)}{2} \quad и \quad \boldsymbol{l}^{OP}(n) \ge 2^{\frac{1}{2}(n-1)n}.$$

4. Оценка сложностей выводов формул QHQ_n в системе E. Опишем тривиальный алгоритм преобразования произвольного д.р. любой формулы φ в вывод той же формулы в системе **E**. Заметим, что множество литералов любой ветви д.р., ведущей от корня д.р., которому приписана формула φ, к вершине, которой приписана 1, является φ-определяющим конъюнктом, а множество всех таких конъюнктов будет оДНФ для формулы φ. Поскольку в исследуемой нами балансированной формуле каждая переменная имеет ровно одно положительное и одно отрицательное вхождения, то все вышеописанным образом составленные φ-определяющие конъюнкты попарно различны. Отметим также, что количество ребер в самой длинной ветви д.р. формулы QHQ_n, равно n^2, а значит, длина самого длинного QHQ_n-определяющиего конъюнкта, в котором быть может только отрицание переменных, не превышает $2n^2$ -1. Учитывая эти замечания и вышеполученые оценки для системы **OP**, получим

$$\boldsymbol{t}^{E}(n) \le 2^{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)} \quad и \quad \boldsymbol{t}^{E}(n) \ge 2^{\frac{1}{2}(n-1)n}, \text{ а также}$$

$$\boldsymbol{l}^{E}(n) \le 2^{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)}\,(2n^2\text{-}1) \qquad и \qquad \boldsymbol{l}^{E}(n) \ge 2^{\frac{1}{2}(n-1)n}.$$

5. Основной результат. Обобщая все вышеполученные оценки для достаточно больших n, получим для последовательности формул QHQ_n $\log_2 \boldsymbol{t}^{OP}(n)= \Omega\ (n^2)$ и $\log_2 \boldsymbol{t}^{OP}(n)=O(n^2)$, $\log_2 \boldsymbol{t}^{E}(n)= \Omega\ (n^2)$ и$\log_2 \boldsymbol{t}^{E}(n)=O(n^2)$,

$\log_2 \boldsymbol{l}^{OP}(n)= \Omega\ (n^2)$ и $\log_2 \boldsymbol{l}^{OP}(n)=O(n^2)$, $\log_2 \boldsymbol{l}^{E}(n)= \Omega\ (n^2)$ и $\log_2 \boldsymbol{l}^{E}(n)=O(n^2)$, откуда следует

Теорема. *Для достаточно больших n для минимального количества шагов и минимальной длины выводов последовательности формул QHQ_n в пропозициональных системах OP и E имеет место*

$$\log_2 \boldsymbol{t}^{OP}(n)= \theta\ (n^2),\ \log_2 \boldsymbol{l}^{OP}(n)= \theta\ (n^2) \text{ и}$$
$$\log_2 \boldsymbol{t}^{E}(n)= \theta\ (n^2),\ \ \log_2 \boldsymbol{l}^{E}(n)= \theta\ (n^2).$$

[1]Ереванский государственный университет

[2]Российско-Армянский университет

e-mails: achubaryan@ysu.am, haykazizyan077@gmail.com

А. А. Чубарян, А. С. Азизян

О сложностях выводов балансированных формул в двух пропозициональных системах выводов

Для одного класса балансированных формул исследованы минимальные значения количества шагов и длины выводов в двух пропозициональных системах: системе **OP**, основанной на обобщённом методе расщепления, и системе **E**,

основанной на определяющей дизъюнктивной нормальной форме. Для всех четырех исследуемых величин получены одинаковые по порядку (по логарифмической шкале) верхние и нижние оценки.

Ա. Ա. Չուբարյան, Հ. Ս. Ազիզյան

Ասույթային հաշվի երկու համակարգերում բալանսավորված բանաձևերի արտածումների բարդությունների վերաբերյալ

Ասույթային հաշվի երկու՝ ընդհանրացված տրոհման մեթոդի վրա հիմնված OP և որոշիչ դիզյունկտիվ ձևի վրա հիմնված E համակարգերում ուսումնասիրվել են բալանսավորված բանաձևերի մի դասի համար արտածումների քայլերի քանակի և երկարության նվազագույն արժեքները: Բոլոր չորս ուսումնասիրված մեծությունների համար ստացվել են լոգարիթմական սանդղակով միևնույն կարգի վերին և ստորին գնահատականներ:

A. A. Chubaryan, H. S. Azizyan

On Proof Complexities of Balanced Formulas in Two Propositional Proof Systems

In this paper the minimal number of proof steps and proof sizes for some class of balanced formulas are investigated in two propositional proof systems: system OP, based on the generalization of splitting method, and system E, based on the determinative disjunctive normal form. The same by order (according logarithmic scale) the upper and lower bounds are obtained for all four investigated quantities.

Литература

1. *Sraßburger L.* – Annals of Pure and Applied Logic. 2012. V. 163. P. 1995-2007.
2. *Cook S. A.*, *Reckhow A. R.* – Symbolic Logic. 1979. V. 44. P. 36-50.
3. *Чубарян Ан. А., Чубарян Арм. А.* – Отечественная наука в эпоху изменений: постулаты прошлого и теории нового времени, НАУ, часть 10, 2(7). 2015. С.11-14.
4. *Chubaryan An.* – Proceedings of NAS RA. 2002. V. 37. N 5. and Journal of CMA (AAS). 2002. V. 37. N 5. P. 71-84.
5. *Chubaryan An., Hovhannisyan S., Gasparyan H.* – ASL, ESM, Logic Colloquium–2021, Poznan, Book of abstracts, 166, *https://lc2021.pl/conf-data/LC2020/files/LC21_book_of_abstracts.pdf*