



equivalent to an additive channel [1] (there does not exist  $b_1, b_2 \in B$  and  $c_1, c_2 \in C$  for which  $b_1 + c_1 = b_2 + c_2$ ).

It is easily can be seen that  $B^* = (B + b)^*$ , thus we can always assume that  $0 \in B$  and  $0 \in C$ .

**Property 2.** One can see from (3) that if  $\langle B, C \rangle$  is a good pair, then the pair  $\langle B', C' \rangle$  is a good pair as well, for any  $B' \subset B$  and  $C' \subset C$  sets.

**Theorem 1.** *The following is true for arbitrary sets  $B, C$ :*

$$\langle B, C \rangle \Leftrightarrow |B| \cdot |C| = |B + C|, \quad (4)$$

where  $B + C = \{b + c \mid b \in B, c \in C\}$ .

**Definition 5.** *We call the pair  $\langle B, C \rangle$  completely good pair if  $|B| \cdot |C| = 2^n$ . Respectively, we call  $C$  a completely good complement.*

Examples can be constructed by viewing Hamming codes [2] and Golay code [3] as a codes in additive channel. There are also examples not related to perfect codes:

$$\begin{aligned} B &= \{000000, 000001, 000010, 000011, \\ &\quad 000100, 000101, 000110, 000111, \\ &\quad 001000, 001001, 001010, 001011, \\ &\quad 010000, 010010, 100000, 100010\} \\ C &= \{000000, 101100, 110001, 011111\} \\ &\quad |B||C| = 2^6. \end{aligned}$$

**Definition 6.** *We call  $C' \subset L(B)$  a partially good complement for  $B$  if  $\langle B, C' \rangle$  is a good pair and  $|B| \cdot |C'| = 2^r$ , where  $r$  is the rank of  $B$  and  $L(B)$  is the linear span of  $B$ .*

It turns out that the problem of finding a partially good complement is equivalent to the problem of finding a completely good complement.

**Theorem 2.** *Let the set  $B$  ( $|B| = 2^m$ ) be given; to have a completely good complement for  $B$ , it is necessary and sufficient to have a partially good complement for  $B$ .*

When constructing a good pair with given  $B$ , it is easily seen that number of existing  $C$  sets is dependent on the number of zero-sum subsets in set  $B$ , e.g., when  $n = 3$  and  $B = \{a, b, c, d\}$  if  $a + b + c + d \neq 0$  then there is only one possible  $C$ ,  $C = \{0, a + b + c + d\}$ . But if  $a + b + c + d = 0$ , then there are four possible  $C$  sets.

**Definition 7.** *We call  $B_0 = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  a subset with zero sum for the set  $B \subset B_2^n$  if:*

$$0 \notin B_0, \quad (5)$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = 0.$$

**Definition 8.** *We denote the number of the zero-sum subsets of the given set  $B \subset B_2^n$  by  $t_k^B$ .*

Obviously,  $t_k^B$  makes sense only if  $k$  is less than  $|B|$ . We take  $t_0^B = 1$ .

**Property 3.** One can easily see that  $t_1^B = t_2^B = 0$ .

Let us consider the following case:  $B = B_2^n (n \geq 2)$ . We will write  $t_k$  instead of  $t_k^{B_2^n}$  for simplicity. The following equation is valid for  $k > 2$ :

$$t_k = \frac{C_{2^n-1}^{k-1} - (2^n - 1 - (k-2))t_{k-2} - t_{k-1}}{k}. \quad (6)$$

Using (6), we can find all the  $t_k$ , because we know  $t_1$  and  $t_2$  (Property 3):

$$t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_{2^n-1} = 2^{2^n-1-n}. \quad (7)$$

It turns out that (7) is valid for the general case.

**Theorem 3.** For any set  $B \subset B_2^n$ , the sum of the numbers  $t_k^B$  is

$$t_0^B + t_1^B + \dots + t_{|B|}^B = 2^{|B \setminus \{0\}| - \text{rank}(B)}. \quad (8)$$

Yerevan State University  
e-mails: hovhannes1417@gmail.com,  
jiromr@mail.ru

**H. K. Sahakyan, Zh. G. Margaryan**

### Independent Neighbourhoods of Sets in $B^n$ Groups

The paper considers the structural problems and cardinality problems of pairs of non-empty subsets with certain restrictions with respect to the  $B_2^n$  space where the sum is by modulo 2. The described subsets are related, in many cases, to the construction of error-correcting codes on additive communication channels, and to the quantitative bounds of their cardinality.

**Հ. Կ. Սահակյան, Ժ. Գ. Մարգարյան**

### Բազմությունների անկախ շրջակայքեր $B^n$ խմբում

Դիտարկված են  $B_2^n$  տարածության ըստ երկու մոդուլի գումարման նկատմամբ, որոշակի սահմանափակումներով, ոչ դատարկ ենթաբազմությունների գույգերի հզորությունների և կառուցվածքային խնդիրներ: Նկարագրված ենթաբազմությունները առնչվում և շատ դեպքերում օգնում են աղիտիվ կապի գծերում սխալների ուղղող կոդերի կառուցման և նրանց հզորությունների քանակական գնահատման խնդիրներին:

**Օ. Կ. Տաակյան, Զ. Գ. Մարգարյան**

### Независимые окрестности множеств в группе $B^n$

Рассмотрены структурные проблемы и проблемы мощности пар непустых подмножеств с некоторыми ограничениями относительно пространства  $B_2^n$ , где сумма по модулю два. Описанные подмножества связаны во многих случаях с построением кодов исправления ошибок на аддитивных линиях связи и с количественной оценкой их мощности.

## References

1. *Leontiev V. K., Movsisyan G. L., Margaryan Zh. G.* – The Reports of NAS RA. 2010. V.110. № 4. P. 334-339.
2. *Hamming R.W.* – The Bell System Technical Journal. 1950. V. 29. №2. P. 149-154.
3. *Golay M. J. E.* – Notes on digital coding. IEEE Information Society Newsletter. 1949. V. 37. № 6. P. 657.