

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3

Академик Л. А. Агаловян, М. Л. Агаловян, Т. В. Закарян

О решении трёхмерной динамической смешанной задачи двухслойных ортотропных пластин, лежащих на жёсткой подстилке

(Представлено 15/IX 2021)

Ключевые слова: *вынужденные колебания, слоистая пластина, асимптотический метод.*

Введение. Для решения пространственных статических и динамических задач пластин и оболочек эффективным оказался асимптотический метод решения сингулярно возмущённых дифференциальных уравнений. Решению статических пространственных задач однослойных и многослойных пластин и оболочек посвящены монографии [1-3]. Некоторые классы динамических задач для анизотропных пластин решены в [2,4-6]. В данной работе асимптотическим методом решена трёхмерная смешанная пространственная динамическая задача для двухслойной пластины, лежащей на жёсткой подстилке.

1. **Основные уравнения и постановка задачи.** Требуется найти в области

$$D = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b, \quad -h_2 \leq z \leq h_1, \quad h_1 + h_2 = h \ll l, \\ l = \min(a, b)\},$$

занятой двухслойной пластиной (рис.1), решение уравнений движения

$$\frac{\partial \sigma_{xx}^k}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^k}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}^k}{\partial z} = \rho^k \frac{\partial^2 u^k}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}^k}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}^k}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}^k}{\partial z} = \rho^k \frac{\partial^2 v^k}{\partial t^2}, \quad (1) \\ \frac{\partial \sigma_{xz}^k}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}^k}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}^k}{\partial z} = \rho^k \frac{\partial^2 w^k}{\partial t^2}, \quad k = I, II,$$

и соотношений упругости (обобщенный закон Гука) ортотропного тела

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u^k}{\partial x} &= a_{11}^k \sigma_{xx}^k + a_{12}^k \sigma_{yy}^k + a_{13}^k \sigma_{zz}^k, & \frac{\partial v^k}{\partial y} &= a_{12}^k \sigma_{xx}^k + a_{22}^k \sigma_{yy}^k + a_{23}^k \sigma_{zz}^k, \\
\frac{\partial w^k}{\partial z} &= a_{13}^k \sigma_{xx}^k + a_{23}^k \sigma_{yy}^k + a_{33}^k \sigma_{zz}^k, & \frac{\partial u^k}{\partial y} + \frac{\partial v^k}{\partial x} &= a_{66}^k \sigma_{xy}^k \\
\frac{\partial w^k}{\partial x} + \frac{\partial u^k}{\partial z} &= a_{55}^k \sigma_{xz}^k, & \frac{\partial w^k}{\partial y} + \frac{\partial v^k}{\partial z} &= a_{44}^k \sigma_{yz}^k
\end{aligned} \tag{2}$$

при следующих граничных условиях на лицевых поверхностях пакета:

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz}^I(x, y, h_1, t) &= -\sigma_{zz}^+(\xi, \eta) \exp(i\Omega t), & \sigma_{xz}^I(x, y, h_1, t) &= \sigma_{yz}^I(x, y, h_1, t) = 0, \\
W^{II}(x, y, -h_2, t) &= 0, & \sigma_{xz}^{II}(x, y, -h_2, t) &= f_1 \sigma_{zz}^{II}(x, y, -h_2, t), \\
\sigma_{yz}^{II}(x, y, -h_2, t) &= f_2 \sigma_{zz}^{II}(x, y, -h_2, t),
\end{aligned} \tag{3}$$

где $\xi = x/l$, $\eta = y/l$, Ω – частота внешнего воздействия, и условиях полного контакта между слоями пакета

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha z}^I(x, y, 0, t) &= \sigma_{\alpha z}^{II}(x, y, 0, t), & \alpha &= x, y, z, \\
u^I(x, y, 0, t) &= u^{II}(x, y, 0, t), & & (u, v, w).
\end{aligned} \tag{4}$$

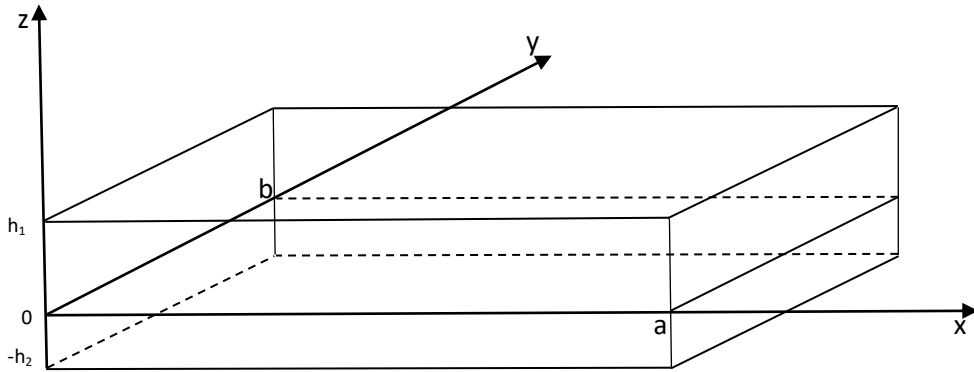


Рис.1

Решение сформулированной задачи будем искать в виде

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha\beta}^k(x, y, z, t) &= \sigma_{ij}^k(x, y, z) \exp(i\Omega t), & \alpha, \beta &= x, y, z, & i, j &= 1, 2, 3, & k &= I, II. \tag{5} \\
(u^k(x, y, z, t), v^k(x, y, z, t), w^k(x, y, z, t)) &= (u_x^k(x, y, z), u_y^k(x, y, z), u_z^k(x, y, z)) \exp(i\Omega t),
\end{aligned}$$

Перейдя в динамических уравнениях и соотношениях упругости к безразмерным координатам и перемещениям

$$\xi = x/l, \quad \eta = y/l, \quad \zeta = z/h, \quad U = u_x/l, \quad V = u_y/l, \quad W = u_z/l, \quad (6)$$

получим сингулярно возмущенную малым параметром $\varepsilon = h/l$ систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}^k}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}^k}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{13}^k}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \rho^k \Omega_*^2 U^k &= 0, & \frac{\partial \sigma_{12}^k}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22}^k}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{23}^k}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \rho^k \Omega_*^2 V^k &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{13}^k}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{23}^k}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{33}^k}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \rho^k \Omega_*^2 W^k &= 0, & \frac{\partial U^k}{\partial \xi} &= a_{11}^k \sigma_{11}^k + a_{12}^k \sigma_{22}^k + a_{13}^k \sigma_{33}^k, \\ \frac{\partial V^k}{\partial \eta} &= a_{12}^k \sigma_{11}^k + a_{22}^k \sigma_{22}^k + a_{23}^k \sigma_{33}^k, & \varepsilon^{-1} \frac{\partial W^k}{\partial \zeta} &= a_{13}^k \sigma_{11}^k + a_{23}^k \sigma_{22}^k + a_{33}^k \sigma_{33}^k, \\ \frac{\partial V^k}{\partial \xi} + \frac{\partial U^k}{\partial \eta} &= a_{66}^k \sigma_{12}^k, & \frac{\partial W^k}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial U^k}{\partial \zeta} &= a_{55}^k \sigma_{13}^k. \end{aligned} \quad (7)$$

$$\frac{\partial W^k}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial V^k}{\partial \zeta} = a_{44}^k \sigma_{23}^k, \quad \Omega_*^2 = H^2 \Omega^2, \quad k = I, II$$

Решение системы (7) складывается из решений внешней задачи (I^{out}) и пограничного слоя (I_b), т.е. $I = I^{out} + I_b$.

Решение внешней задачи будем искать в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{kout} &= \varepsilon^{-1+s} \sigma_{ij}^{k(s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad s = \overline{0, N} \\ (U^{kout}, V^{kout}, W^{kout}) &= \varepsilon^s (U^{k(s)}, V^{k(s)}, W^{k(s)}), \quad k = I, II. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $s = \overline{0, N}$ (обозначение Эйнштейна) означает, что в (8) по повторяющемуся индексу s происходит суммирование от нуля до числа приближений N . Подставив (8) в (7) и приравняв в каждом уравнении коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим следующую непротиворечивую систему для определения коэффициентов $\sigma_{ij}^{k(s)}, U^{k(s)}, V^{k(s)}, W^{k(s)}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}^{k(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}^{k(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{13}^{k(s)}}{\partial \zeta} + \rho^k \Omega_*^2 U^{k(s)} &= 0, & \frac{\partial \sigma_{12}^{k(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22}^{k(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{23}^{k(s)}}{\partial \zeta} + \rho^k \Omega_*^2 V^{k(s)} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{13}^{k(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{23}^{k(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{33}^{k(s)}}{\partial \zeta} + \rho^k \Omega_*^2 W^{k(s)} &= 0, & \frac{\partial U^{k(s-1)}}{\partial \xi} &= a_{11}^k \sigma_{11}^{k(s)} + a_{12}^k \sigma_{22}^{k(s)} + a_{13}^k \sigma_{33}^{k(s)}, \\ \frac{\partial V^{k(s-1)}}{\partial \eta} &= a_{12}^k \sigma_{11}^{k(s)} + a_{22}^k \sigma_{22}^{k(s)} + a_{23}^k \sigma_{33}^{k(s)}, & \frac{\partial W^{k(s)}}{\partial \zeta} &= a_{13}^k \sigma_{11}^{k(s)} + a_{23}^k \sigma_{22}^{k(s)} + a_{33}^k \sigma_{33}^{k(s)}. \end{aligned} \quad (9)$$

$$\frac{\partial V^{k(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U^{k(s-1)}}{\partial \eta} = a_{66}^k \sigma_{12}^{k(s)}, \quad \frac{\partial W^{k(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U^{k(s)}}{\partial \zeta} = a_{55}^k \sigma_{13}^{k(s)}, \quad \frac{\partial W^{k(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{k(s)}}{\partial \zeta} = a_{44}^k \sigma_{23}^{k(s)},$$

Из системы (10) все напряжения можно выразить через перемещения по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_{13}^{k(s)} &= \frac{1}{a_{55}^k} \left(\frac{\partial U^{k(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W^{k(s-1)}}{\partial \xi} \right), & \sigma_{23}^{k(s)} &= \frac{1}{a_{44}^k} \left(\frac{\partial V^{k(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W^{k(s-1)}}{\partial \eta} \right), \\ \sigma_{12}^{k(s)} &= \frac{1}{a_{66}^k} \left(\frac{\partial U^{k(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{k(s-1)}}{\partial \xi} \right), & \sigma_{11}^{k(s)} &= \frac{1}{\Delta^k} \left(-A_{23}^k \frac{\partial W^{k(s)}}{\partial \zeta} + A_{22}^k \frac{\partial U^{k(s-1)}}{\partial \xi} - A_{12}^k \frac{\partial V^{k(s-1)}}{\partial \eta} \right), \\ \sigma_{22}^{k(s)} &= \frac{1}{\Delta^k} \left(-A_{13}^k \frac{\partial W^{k(s)}}{\partial \zeta} - A_{12}^k \frac{\partial U^{k(s-1)}}{\partial \xi} + A_{33}^k \frac{\partial V^{k(s-1)}}{\partial \eta} \right), \\ \sigma_{33}^{k(s)} &= \frac{1}{\Delta^k} \left(A_{11}^k \frac{\partial W^{k(s)}}{\partial \zeta} - A_{23}^k \frac{\partial U^{k(s-1)}}{\partial \xi} - A_{13}^k \frac{\partial V^{k(s-1)}}{\partial \eta} \right), & Q^{k(m)} &\equiv 0, \text{ при } m < 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} A_{11}^k &= a_{11}^k a_{22}^k - (a_{12}^k)^2, & A_{12}^k &= a_{12}^k a_{33}^k - a_{23}^k a_{13}^k, & A_{13}^k &= a_{11}^k a_{23}^k - a_{13}^k a_{12}^k, \\ A_{22}^k &= a_{22}^k a_{33}^k - (a_{23}^k)^2, & A_{23}^k &= a_{13}^k a_{22}^k - a_{12}^k a_{23}^k, & A_{33}^k &= a_{11}^k a_{33}^k - (a_{13}^k)^2, \\ \Delta^k &= a_{11}^k A_{22}^k - a_{12}^k A_{12}^k - a_{13}^k A_{23}^k, \end{aligned} \quad (11)$$

а для определения $U^{k(s)}$, $V^{k(s)}$, $W^{k(s)}$ получим уравнения

$$\frac{\partial^2 U^{k(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55}^k \rho^k \Omega_*^2 U^{k(s)} = R_U^{k(s)}, \quad R_U^{k(s)} = -a_{55}^k \left(\frac{\partial \sigma_{11}^{k(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}^{k(s-1)}}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial^2 W^{k(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 V^{k(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{44}^k \rho^k \Omega_*^2 V^{k(s)} = R_V^{k(s)}, \quad R_V^{k(s)} = -a_{44}^k \left(\frac{\partial \sigma_{12}^{k(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22}^{k(s-1)}}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial^2 W^{k(s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} A_{11}^k \frac{\partial^2 W^{k(s)}}{\partial \zeta^2} + \Delta^k \rho^k \Omega_*^2 W^{k(s)} &= R_W^{k(s)}, \\ R_W^{k(s)} &= -\Delta^k \left(\frac{\partial \sigma_{13}^{k(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{23}^{k(s-1)}}{\partial \eta} \right) + A_{23}^k \frac{\partial^2 U^{k(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} + A_{13}^k \frac{\partial^2 V^{k(s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta}. \end{aligned} \quad (14)$$

Решениями этих уравнений являются

$$\begin{aligned}
U^{k(s)} &= C_1^{k(s)}(\xi, \eta) \sin \gamma_1^k \zeta + C_2^{k(s)}(\xi, \eta) \cos \gamma_1^k \zeta + U_\tau^{k(s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad \gamma_1^k = \Omega_* \sqrt{\rho^k a_{55}^k}, \\
V^{k(s)} &= C_3^{k(s)}(\xi, \eta) \sin \gamma_2^k \zeta + C_4^{k(s)}(\xi, \eta) \cos \gamma_2^k \zeta + V_\tau^{k(s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad \gamma_2^k = \Omega_* \sqrt{\rho^k a_{44}^k}, \\
W^{k(s)} &= C_5^{k(s)}(\xi, \eta) \sin \gamma_3^k \zeta + C_6^{k(s)}(\xi, \eta) \cos \gamma_3^k \zeta + W_\tau^{k(s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad \gamma_3^k = \Omega_* \sqrt{\rho^k \Delta^k / A_{11}^k},
\end{aligned} \tag{15}$$

где $U_\tau^{k(s)}$, $V_\tau^{k(s)}$, $W_\tau^{k(s)}$ – частные решения уравнений.

Подставив значения $U^{k(s)}$, $V^{k(s)}$, $W^{k(s)}$ в формулы (10), для напряжений $\sigma_{13}^{k(s)}$, $\sigma_{23}^{k(s)}$, $\sigma_{33}^{k(s)}$ будем иметь

$$\begin{aligned}
\sigma_{13}^{k(s)} &= \Omega_* \sqrt{\rho^k / a_{55}^k} \left(C_1^{k(s)}(\xi, \eta) \cos \gamma_1^k \zeta - C_2^{k(s)}(\xi, \eta) \sin \gamma_1^k \zeta \right) + f_{13}^{k(s)}(\xi, \eta, \zeta), \\
\sigma_{23}^{k(s)} &= \Omega_* \sqrt{\rho^k / a_{44}^k} \left(C_3^{k(s)}(\xi, \eta) \cos \gamma_2^k \zeta - C_4^{k(s)}(\xi, \eta) \sin \gamma_2^k \zeta \right) + f_{23}^{k(s)}(\xi, \eta, \zeta), \\
\sigma_{33}^{k(s)} &= \Omega_* \sqrt{\rho^k A_{11}^k / \Delta^k} \left(C_5^{k(s)}(\xi, \eta) \cos \gamma_3^k \zeta - C_6^{k(s)}(\xi, \eta) \sin \gamma_3^k \zeta \right) + f_{33}^{k(s)}(\xi, \eta, \zeta),
\end{aligned} \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned}
f_{13}^{k(s)} &= \frac{1}{a_{55}^k} \left(\frac{\partial U_\tau^{k(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W_\tau^{k(s-1)}}{\partial \xi} \right), \quad f_{23}^{k(s)} = \frac{1}{a_{44}^k} \frac{\partial V_\tau^{k(s)}}{\partial \zeta} + \frac{1}{a_{55}^k} \frac{\partial W_\tau^{k(s-1)}}{\partial \eta}, \\
f_{33}^{k(s)} &= \frac{A_{11}^k}{\Delta^k} \frac{\partial W_\tau^{k(s)}}{\partial \zeta} - \frac{1}{\Delta^k} \left(A_{23}^k \frac{\partial U_\tau^{k(s-1)}}{\partial \xi} + A_{13}^k \frac{\partial V_\tau^{k(s-1)}}{\partial \eta} \right).
\end{aligned} \tag{17}$$

Удовлетворив граничным условиям (3) и условиям контакта (4), получим алгебраическую систему относительно $C_j^{k(s)}$. Решив эту систему, получим

$$\begin{aligned}
C_1^{I(s)} &= d_7^{(s)} + b_3 C_1^{II(s)}, \quad C_2^{I(s)} = d_{10}^{(s)} + C_2^{II(s)}, \quad C_3^{I(s)} = d_8^{(s)} + b_4 C_3^{II(s)}, \\
C_4^{I(s)} &= d_{11}^{(s)} + C_4^{II(s)}, \quad C_5^{I(s)} = d_9^{(s)} + b_5 C_5^{II(s)}, \quad C_6^{I(s)} = d_{12}^{(s)} + C_6^{II(s)}, \\
C_5^{II(s)} &= \frac{1}{b_5 B_5^I - B_6^I B_5^{II}} \left[d_3^{(s)} - B_5^I d_9^{(s)} + B_6^I d_{12}^{(s)} + B_6^I d_6^{(s)} \right], \\
C_6^{II(s)} &= d_6^{(s)} + B_5^{II} C_5^{II(s)}, \quad C_3^{II(s)} = \frac{1}{B_3^{II}} \left[d_5^{(s)} + b_2 B_6^{II} d_6^{(s)} + (b_2 + 1) B_5^{II} C_5^{II(s)} \right], \\
C_4^{II(s)} &= \frac{1}{b_4 B_3^I B_4^{II} + B_3^{II} B_4^I} \left[B_3^I b_4 \left(d_5^{(s)} + b_2 B_6^{II} d_6^{(s)} + (b_2 + 1) B_5^{II} C_5^{II(s)} \right) - d_2^{(s)} - B_4^I d_{11}^{(s)} + B_3^I d_8^{(s)} \right], \\
C_2^{II(s)} &= \frac{1}{b_3 B_1^I B_2^{II} + B_2^I B_1^{II}} \left[b_3 B_1^I \left(d_4^{(s)} + b_1 B_6^{II} d_6^{(s)} + (1 + B_6^{II}) b_1 B_5^{II} C_5^{II(s)} \right) - B_1^{II} \left(d_1^{(s)} - B_1^I d_7^{(s)} + B_2^I d_{10}^{(s)} \right) \right], \\
C_1^{II(s)} &= \frac{1}{B_1^{II}} \left[d_4^{(s)} + b_1 B_6^{II} d_6^{(s)} + (1 + B_6^{II}) b_1 B_5^{II} C_5^{II(s)} - B_2^{II} C_2^{II(s)} \right],
\end{aligned} \tag{18}$$

где

$$\begin{aligned}
B_1^I &= \cos \gamma_1^I \zeta_1, & B_2^I &= \sin \gamma_1^I \zeta_1, & B_3^I &= \cos \gamma_2^I \zeta_1, & B_4^I &= \sin \gamma_2^I \zeta_1, \\
B_5^I &= \cos \gamma_3^I \zeta_1, & B_6^I &= \sin \gamma_3^I \zeta_1, & B_1^{II} &= \cos \gamma_1^{II} \zeta_2, & B_2^{II} &= \sin \gamma_1^{II} \zeta_2, \\
B_3^{II} &= \cos \gamma_2^{II} \zeta_2, & B_4^{II} &= \sin \gamma_2^{II} \zeta_2, & B_5^{II} &= \cos \gamma_3^{II} \zeta_2, & B_6^{II} &= \sin \gamma_3^{II} \zeta_2, \\
b_1 &= f_1 \sqrt{\frac{A_{11}^{II} a_{55}^{II}}{\Delta^{II}}}, & b_2 &= f_2 \sqrt{\frac{A_{11}^{II} a_{44}^{II}}{\Delta^{II}}}, & b_3 &= \sqrt{\frac{a_{55}^I \rho^{II}}{a_{55}^{II} \rho^I}}, & b_4 &= \sqrt{\frac{a_{44}^I \rho^{II}}{a_{44}^{II} \rho^I}}, & b_5 &= \sqrt{\frac{A_{11}^{II} \rho^{II} \Delta^I}{A_{11}^I \rho^I \Delta^{II}}}, \\
d_1^{(s)} &= -\frac{1}{\Omega_*} \sqrt{a_{55}^I / \rho^I} f_{13}^{I(s)}(\xi, \eta, \zeta_1), & d_2^{(s)} &= -\frac{1}{\Omega_*} \sqrt{a_{44}^I / \rho^I} f_{23}^{I(s)}(\xi, \eta, \zeta_1), \\
d_3^{(s)} &= -\frac{1}{\Omega_*} \sqrt{\frac{\Delta^I}{A_{11}^I \rho^I}} (\sigma_{zz}^{+(s)} + f_{33}^{I(s)}(\xi, \eta, \zeta_1)), & \sigma_{zz}^{+(0)} &= \varepsilon \sigma_{zz}^+, & \sigma_{zz}^{+(s)} &= 0, & s &\neq 0, \\
d_4^{(s)} &= \frac{1}{\Omega_*} \sqrt{a_{55}^{II} / \rho^{II}} (f_{13}^{II(s)}(\xi, \eta, -\zeta_2) - f_{13}^{II(s)}(\xi, \eta, \zeta_2)), \\
d_5^{(s)} &= \frac{1}{\Omega_*} \sqrt{a_{44}^{II} / \rho^{II}} (f_{23}^{II(s)}(\xi, \eta, -\zeta_2) - f_{23}^{II(s)}(\xi, \eta, \zeta_2)), & d_6^{(s)} &= -W_\tau^{II(s)}(\xi, \eta, -\zeta_2), \\
d_7^{(s)} &= \frac{1}{\Omega_*} \sqrt{a_{55}^I / \rho^I} (f_{13}^{II(s)}(\xi, \eta, 0) - f_{13}^{I(s)}(\xi, \eta, 0)), \\
d_8^{(s)} &= \frac{1}{\Omega_*} \sqrt{a_{44}^I / \rho^I} (f_{23}^{II(s)}(\xi, \eta, 0) - f_{23}^{I(s)}(\xi, \eta, 0)), \\
d_9^{(s)} &= \frac{1}{\Omega_*} \sqrt{\frac{\Delta^I}{A_{11}^I \rho^I}} (f_{33}^{II(s)}(\xi, \eta, 0) - f_{33}^{I(s)}(\xi, \eta, 0)), \\
d_{10}^{(s)} &= U_\tau^{II(s)}(\xi, \eta, 0) - U_\tau^{I(s)}(\xi, \eta, 0) & d_{11}^{(s)} &= V_\tau^{II(s)}(\xi, \eta, 0) - V_\tau^{I(s)}(\xi, \eta, 0), \\
d_{12}^{(s)} &= W_\tau^{II(s)}(\xi, \eta, 0) - W_\tau^{I(s)}(\xi, \eta, 0),
\end{aligned} \tag{19}$$

После определения $C_j^{k(s)}$ по формулам (15) определяются компоненты вектора перемещения, а по формулам (10), (16) – все компоненты тензора напряжений.

2. О математически точных решениях внешней задачи. Если функция σ_{zz}^+ является многочленом от ξ, η , итерация обрывается на определенном приближении. В результате будем иметь математически точное решение внешней задачи. В качестве иллюстрации рассмотрим случаи, когда $\sigma_{zz}^+ = a_0 + a_1 \xi + a_2 \eta$. Итерация обрывается на приближении $s = 1$. В результате имеем математически точное решение

$$\begin{aligned}
u^k &= l(U^{k(0)} + \varepsilon U^{k(1)}) \exp(i\Omega t), \quad v^k = l(V^{k(0)} + \varepsilon V^{k(1)}) \exp(i\Omega t), \quad w^k = l(W^{k(0)} + \varepsilon W^{k(1)}) \exp(i\Omega t), \\
\sigma_{\alpha\beta}^k &= (\varepsilon^{-1} \sigma_{\alpha\beta}^{k(0)} + \sigma_{\alpha\beta}^{k(1)}) \exp(i\Omega t), \quad \alpha, \beta = x, y, z, \quad k = I, II. \\
U^{k(0)} &= C_1^{k(0)}(\xi, \eta) \sin \gamma_1^k \zeta + C_2^{k(0)}(\xi, \eta) \cos \gamma_1^k \zeta, \\
V^{k(0)} &= C_3^{k(0)}(\xi, \eta) \sin \gamma_2^k \zeta + C_4^{k(0)}(\xi, \eta) \cos \gamma_2^k \zeta, \\
W^{k(0)} &= C_5^{k(0)}(\xi, \eta) \sin \gamma_3^k \zeta + C_6^{k(0)}(\xi, \eta) \cos \gamma_3^k \zeta. \tag{20} \\
C_1^{I(0)} &= b_3 C_1^{II(0)}, \quad C_2^{I(0)} = C_2^{II(0)}, \quad C_3^{I(0)} = b_4 C_3^{II(0)}, \quad C_4^{I(0)} = C_4^{II(0)}, \\
C_5^{I(0)} &= b_5 C_5^{II(0)}, \quad C_6^{I(0)} = C_6^{II(0)}, \\
C_5^{II(0)} &= \frac{d_3^{(0)}}{b_5 B_5^I - B_6^I B_5^{II}}, \quad C_1^{II(0)} = \frac{(1 + B_6^{II}) b_1 B_5^{II} C_5^{II(s)}}{B_1^{II}}, \quad C_2^{II(0)} = \frac{b_3 B_1^I (1 + B_6^{II}) b_1 B_5^{II} C_5^{II(s)}}{b_3 B_1^I B_2^{II} + B_2^I B_1^{II}}, \\
C_3^{II(0)} &= \frac{(b_2 + 1) B_5^{II} C_5^{II(0)}}{B_3^{II}}, \quad C_4^{II(0)} = \frac{B_5^I b_4 (b_2 + 1) B_5^{II} C_5^{II(s)}}{b_4 B_3^I B_4^{II} + B_3^{II} B_4^I}, \quad C_6^{II(0)} = B_5^{II} C_5^{II(s)}, \\
d_3^{(0)} &= -\frac{\varepsilon}{\Omega_*} \sqrt{\frac{\Delta^I}{A_{11}^I \rho^I}} (a_0 + a_1 \xi + a_2 \eta)
\end{aligned}$$

Напряжения $\sigma_{\alpha\beta}^{k(0)}$ определяются по формулам (10), (16), где

$$f_{13}^{k(0)} = f_{23}^{k(0)} = f_{33}^{k(0)} = 0.$$

Для величин при $s = 1$ имеем

$$\begin{aligned}
U^{k(1)} &= C_1^{k(1)}(\xi, \eta) \sin \gamma_1^k \zeta + C_2^{k(1)}(\xi, \eta) \cos \gamma_1^k \zeta + U_\tau^{k(1)}(\xi, \eta, \zeta), \\
V^{k(1)} &= C_3^{k(1)}(\xi, \eta) \sin \gamma_2^k \zeta + C_4^{k(1)}(\xi, \eta) \cos \gamma_2^k \zeta + V_\tau^{k(1)}(\xi, \eta, \zeta), \\
W^{k(1)} &= C_5^{k(1)}(\xi, \eta) \sin \gamma_3^k \zeta + C_6^{k(1)}(\xi, \eta) \cos \gamma_3^k \zeta + W_\tau^{k(1)}(\xi, \eta, \zeta). \\
U_\tau^{k(1)}(\xi, \eta, \zeta) &= D_1^{k(1)}(\xi, \eta) \sin \gamma_1^k \zeta + D_2^{k(1)}(\xi, \eta) \cos \gamma_1^k \zeta, \\
(U_\tau^{k(1)}, V_\tau^{k(1)}; D_1^{k(1)}, D_3^{k(1)}; D_2^{k(1)}, D_4^{k(1)}; a_{55}^k, a_{44}^k; A_{23}^k, A_{13}^k; a_1, a_2) & \\
D_1^{II(1)} &= \frac{\delta \varepsilon a_1 B_5^{II} (a_{55}^{II} A_{23}^{II} - \gamma_3^{II} \Delta^{II})}{\Delta^{II} (a_{55}^{II} \rho^{II} \Omega_*^2 - (\gamma_3^{II})^2)}, \quad D_2^{II(1)} = \frac{\delta \varepsilon a_1 (a_{55}^{II} A_{23}^{II} + \gamma_3^{II} \Delta^{II})}{\Delta^{II} (a_{55}^{II} \rho^{II} \Omega_*^2 - (\gamma_3^{II})^2)}, \\
D_1^{I(1)} &= b_5 D_1^{II(1)}, \quad D_2^{I(1)} = b_5 D_2^{II(1)}, \quad \delta = -\frac{\sqrt{\Delta^I / A_{11}^I \rho^I}}{(b_5 B_5^I - B_6^I B_5^{II}) \Omega_*},
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
W_r^{k(1)}(\xi, \eta, \zeta) &= D_5^{k(1)}(\xi, \eta) \sin \gamma_1^k \zeta + D_6^{k(1)}(\xi, \eta) \cos \gamma_1^k \zeta + D_7^{k(1)}(\xi, \eta) \sin \gamma_2^k \zeta + D_8^{k(1)}(\xi, \eta) \cos \gamma_2^k \zeta, \\
D_5^{II(1)} &= \left(\frac{\Delta^{II}}{a_{55}^{II}} + A_{23}^{II} \right) \frac{b_1 b_3 B_1^I B_2^{II} \varepsilon a_1 \delta \gamma_1^{II} (1 + B_6^{II})}{(b_3 B_1^I B_2^{II} + B_2^I B_1^{II}) (\Delta^{II} \rho^{II} \Omega_*^2 - A_{11}^{II} (\gamma_1^{II})^2)}, \\
D_6^{II(1)} &= \left(\frac{\Delta^{II}}{a_{55}^{II}} + A_{23}^{II} \right) \frac{b_1 B_5^{II} \varepsilon a_1 \delta \gamma_1^{II} (1 + B_6^{II})}{B_1^{II} (\Delta^{II} \rho^{II} \Omega_*^2 - A_{11}^{II} (\gamma_1^{II})^2)}, \\
D_7^{II(1)} &= \left(\frac{\Delta^{II}}{a_{44}^{II}} + A_{13}^{II} \right) \frac{b_4 B_3^I B_4^{II} \varepsilon a_2 \delta \gamma_2^{II} (1 + b_2)}{(b_4 B_3^I B_4^{II} + B_4^I B_3^{II}) (\Delta^{II} \rho^{II} \Omega_*^2 - A_{11}^{II} (\gamma_1^{II})^2)}, \\
D_8^{II(1)} &= \left(\frac{\Delta^{II}}{a_{44}^{II}} + A_{13}^{II} \right) \frac{B_5^{II} \varepsilon a_2 \delta \gamma_2^{II} (1 + b_2)}{B_3^{II} (\Delta^{II} \rho^{II} \Omega_*^2 - A_{11}^{II} (\gamma_1^{II})^2)}, \\
D_5^{I(1)} &= D_5^{II(1)}, \quad D_6^{I(1)} = b_3 D_6^{II(1)}, \quad D_7^{I(1)} = D_7^{II(1)}, \quad D_8^{I(1)} = b_4 D_8^{II(1)}.
\end{aligned}$$

Напряжения $\sigma_{\alpha\beta}^{k(1)}$ определяются аналогичным образом.

Институт механики НАН РА
e-mails: lagal@sci.am, mheraghalovyan@yahoo.com,
zaqaryantatevik@mail.ru

Академик Л. А. Агаловян, М. Л. Агаловян, Т. В. Закарян

**О решении трёхмерной динамической смешанной задачи
двухслойных ортотропных пластин, лежащих
на жесткой подстилке**

Решена пространственная смешанная динамическая задача теории упругости для двухслойной ортотропной пластинки. Считается что нижняя кромка пластинки жёстко закреплена с абсолютно жёстким основанием, а на верхнюю кромку двухслойного пакета действует нормальная нагрузка, гармонически меняющаяся во времени. Асимптотическим методом определены амплитуды вынужденных колебаний, компоненты тензора напряжений. Указаны случаи, когда найденное решение становится математически точным.

Ակադեմիկոս Լ. Ա. Աղալովյան, Մ. Լ. Աղալովյան, Տ. Վ. Ջաքարյան

Կոշտ հենարանի վրա դրված երկշերտ օրթոտրոպ սալերի եռաչափ դինամիկական խառը խնդրի լուծման մասին

Ասիմպտոտիկ մեթոդով լուծված է առաձգականության տեսության տարածական դինամիկական խառը եզրային խնդիր երկշերտ սալի համար, որը դրված է կոշտ հենարանի վրա: Գառուցված է իտեռացիոն պրոցես, որը հնարավորություն է ընձեռում որոշելու լարման թենզորի և տեղափոխման վեկտորի բոլոր բաղադրիչները նախօրոք տրված ասիմպտոտիկ ճշտությամբ: Նշված են այն դեպքերը, երբ ստացված լուծումը դառնում է մաթեմատիկորեն ճշգրիտ: Բերված է իլյուստրացիոն օրինակ:

Academician L. A. Aghalovyan, M. L. Aghalovyan, T. V. Zakaryan

**On the Solution of the Three-Dimensional Dynamic Mixed Problem
of Two-Layer Orthotropic Plates Lying on a Rigid Litter**

The spatial mixed dynamic problem of the theory of elasticity for a two-layer orthotropic plate is solved. It is considered that the lower edge of the plate is rigidly fixed with an absolutely rigid base, while the upper edge of the two-layer package is subject to normal load harmonically varying with time. The amplitudes of forced vibrations and the components of the stress tensor are determined by the asymptotic method. Cases are indicated when the solution becomes mathematically accurate.

Литература

1. *Гольденвейзер А.Л.* Теория упругих тонких оболочек. М. Наука. Физматлит. 1976. 512 с.
2. *Aghalovyan L. A.* Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells. Singapore. World Scientific Publishing. 2015. 376 p. (Рус. издание: *Агалосян Л. А.* Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М. Наука. Физматлит. 1997. 414 с.)
3. *Агалосян Л.А., Геворкян Р.С.* Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван. Гитутюн. 2005. 468 с. (*Aghalovyan L. A., Gevorgyan R. S.* Nonclassical Boundary-Value Problems of Anisotropic Layered Beams, Plates and Shells. Yer. Gitutyun. 2005. 468 p.)
4. *Агалосян Л.А.* – Изв. вузов РФ. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. 2000. № 3. С. 8-11.
5. *Агалосян Л.А., Закарян Т.В.* – Изв. НАН РА. Механика. 2011. Т.64. №2. С.15-25.
6. *Саргсян М.З.* В кн.: Механика. 2009. Тр. междунар. школы-конф. молодых ученых. Ереван. Изд-во ЕГУАС. 2009. С. 297-303.