ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 121 2021 № 4

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

Г. С. Григорян[1], А. Г. Камалян[2], Г. А. Киракосян[3]

Операторы $\mathcal{L}$-Винера – Хопфа с кусочно-непрерывным матричным символом в лебеговых пространствах со степенным весом

(Представлено академиком А. Б. Нерсесяном 4/X 2021)

Ключевые слова: *безотражательный потенциал, оператор $\mathcal{L}$-Винера – Хопфа, матричный символ, оператор Фредгольма.*

1. Введение. Понятия операторов $\mathcal{L}$-свертки и $\mathcal{L}$-Винера – Хопфа введены в [1]. В основе определения этих операторов лежит понятие спектрального преобразования оператора $\mathcal{L}$, самосопряженного в $L_2(\mathbb{R})$ и порожденного дифференциальным выражением

$$(\ell y)(x) = -y''(x) + v(x)y(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

где

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|)v(x)dx < \infty. \tag{1.2}$$

Операторы $\mathcal{L}$-свертки и $\mathcal{L}$-Винера – Хопфа в случае нулевого потенциала совпадают с классическими оператором свертки и оператором Винера – Хопфа. Для потенциалов $v \neq 0$ наиболее простую структуру операторы $\mathcal{L}$-Винера – Хопфа имеют, когда v является безотражательным потенциалом, т.е. имеет представление

$$v(x) = -2\frac{d^2x}{dx^2}(\ln \Delta(x)), \tag{1.3}$$

где

$$\Delta(x) = \det\left[\delta_{ij} + \frac{m_i \exp\left(-(\lambda_i + \lambda_j)x\right)}{\lambda_i + \lambda_j}\right]_{i,j=1,\dots,N}, \tag{1.4}$$

δ_{ij} – символ Кронекера, λ_k, m_k $(k = 1, \dots, N)$ — положительные числа, причем $\lambda_k \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. В [2-5] изучены свойства фредгольмовости, полуфредгольмовости и обратимости операторов $\mathcal{L}$-Винера — Хопфа в случае безотражательного потенциала. Оператор $A: X \to Y$, где X, Y − банаховы пространства, называется фредгольмовым, если его образ замкнут (т.е. $\operatorname{Im} A = \overline{\operatorname{Im} A}$) и конечномерны его ядро $\ker A \coloneqq \{x \in X; Ax = 0\}$ и коядро $\operatorname{Coker} A \coloneqq {}^{Y}\!/_{\operatorname{Im} A}$. Число $\operatorname{Ind} A \coloneqq \dim \ker A - \dim \operatorname{Coker} A$ называется индексом оператора A.

Ниже для линейного пространства (алгебры) X через X^n $(X^{n \times n})$ обозначается множество всех вектор-столбцов порядка n (матриц порядка $n \times n$) с элементами из X. Для линейного оператора $A: X \to Y$ (X, Y — линейные пространства) оператор $\operatorname{diag}(A, \dots, A): X^n \to Y^n$ также будем обозначать через A. Через $m(a)$ будем обозначать действующий в функциональных пространствах оператор умножения на функцию (матриц-функцию) $a: m(a)y = ay$. Пусть $\dot{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ и $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ соответственно одноточечная и двухточечная компактификации $\mathbb{R}$. Через $PC \coloneqq PC(\dot{\mathbb{R}})$ будем обозначать алгебру кусочно-непрерывных функций на $\dot{\mathbb{R}}$, т.е. функций a, для которых в каждой точке $x_0 \in \dot{\mathbb{R}}$ существуют пределы $a(x_0 - 0) \coloneqq \lim_{x \to x_0 - 0} a(x)$, $a(x_0 + 0) \coloneqq \lim_{x \to x_0 + 0} a(x)$, причем $a(\infty - 0) \coloneqq a(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} a(x)$, $a(\infty + 0) \coloneqq a(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} a(x)$.

Пусть ρ − степенной вес, т.е. вес вида

$$\rho(x) = |x + i|^{\mu_\infty} \, |x|^{\mu_0} \prod_{j=1}^{m} \left|\alpha - \beta_j\right|^{\mu_j},$$

где $\mu_\infty, \mu_0, \mu_j, \beta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$, а $L_p(E, \rho)$, $1 < p < \infty$, — лебегово пространство с нормой

$$\|f\|_{p,\rho} \coloneqq \left(\int_E |f(x)|^p \, \rho^p(x) dx \right)^{1/p},$$

где E либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{R}_\pm = \{\pm x > 0; x \in \mathbb{R}\}$. Далее предполагается, что

$$\mu, \mu_0, \dots, \mu_m \in \left(-\frac{1}{p}; \frac{1}{q}\right),$$

где $\mu \coloneqq \mu_\infty + \mu_0 + \mu_1 + \dots + \mu_m$, а ${}^{1}\!/_{p} + {}^{1}\!/_{q} = 1$. Заметим, что это условие является необходимым и достаточным, чтобы ρ был весом Макенхаунта, т.е. удовлетворяло условию A_p:

$$\sup \left(\frac{1}{|\mathrm{I}|} \int_{\mathrm{I}} \rho(x)^p \, dx \right)^{1/p} \left(\frac{1}{|\mathrm{I}|} \int_{\mathrm{I}} \rho(x)^{-q} \, dx \right)^{1/q} < \infty,$$

где I пробегает все ограниченные интервалы вещественной переменной $\mathbb{R}$, а $|\mathrm{I}|$ – длина интервала I (см., например, [6]). Важную роль в дальнейшем играют числа $\nu_\infty = {}^1/_q - \mu$, $\nu_0 = {}^1/_p + \mu_0$.

В [7] получен критерий фредгольмовости и вычислен индекс матричного оператора Винера – Хопфа в пространствах $L_p^n(\mathbb{R}_+, \rho)$ в случае кусочно-непрерывного символа.

В данной работе мы распространяем эти результаты на операторы $\mathcal{L}$-Винера – Хопфа в случае произвольного безотражательного потенциала.

2. Оператор $\mathcal{L}$-Винера – Хопфа. Рассмотрим дифференциальное выражение ℓ (см. (1.1)) с потенциалом v, удовлетворяющим (1.3), (1.4). Условие (1.2) выполняется автоматически. Собственные значения самосопряженного оператора Штурма – Лиувилля $\mathcal{L}$, порожденного дифференциальным выражением ℓ, совпадают с числами $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ (см., например, [8]). Ортонормальная система собственных функций $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ однозначно определяется системой линейных уравнений

$$\varphi_k(x) + \sum_{s=1}^{N} m_k m_s \frac{e^{-(\lambda_k+\lambda_s)x}}{\lambda_k + \lambda_s} \varphi_s(x) = m_k e^{-\lambda_k x}, \qquad k = 1, \dots, N;\ x \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим функции

$$u^-(x,\lambda) = t(\lambda) e^{i\lambda x} \left(1 - \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k e^{-\lambda_k x}}{\lambda_k - i\lambda} \varphi_k(x)\right),$$

$$u^+(x,\lambda) = e^{-i\lambda x} \left(1 - \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k e^{-\lambda_k x}}{\lambda_k + i\lambda} \varphi_k(x)\right),\ \ x, \lambda \in \mathbb{R},$$

где коэффициент прохождения $t(\lambda)$ определяется равенством

$$t(\lambda) = \prod_{k=1}^{N} \frac{\lambda + i\lambda_k}{\lambda - i\lambda_k}.$$

Функции $u^{\mp}(x,\lambda)$ при каждом $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ являются ограниченными решениями уравнения $\ell y = \lambda^2 y$ и порождают интегралы

$$(U_{\mp}\, y)(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} u^{\mp}(x,\lambda) y(\lambda) dx, \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

которые сходятся по норме $L_2(\mathbb{R})$. Эти интегралы определяют ограниченные операторы $U_{\mp}\colon L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ (см. [1, 3, 8]).

Под спектральным преобразованием оператора $\mathcal{L}$ мы понимаем оператор

$$U \coloneqq m(\chi_+)\, U_- + m(\chi_-)\, J\, U_+ \,:\, L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R}),$$

где χ_+ (χ_-) – характеристическая функция $\mathbb{R}_+$ ($\mathbb{R}_-$), а $J \,:\, L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ – оператор, действующий по формуле $(Jy)(x) = y(-x)$. Оператор U удовлетворяет равенствам

$$U^*U = I - P, \qquad UU^* = I\,,$$

где I – единичный оператор, а P – ортогональный проектор на подпространство $span\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$. Кроме того, на всюду плотном в $L_2(\mathbb{R})$ множестве имеет место равенство $U\mathcal{L}U^* = m(\lambda^2)$.

Будем считать, что $v = 0$ также является безотражательным потенциалом, соответствующим случаю $N = 0$. В этом случае оператор $U = U_\pm$ и совпадает с преобразованием Фурье $F\colon L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$:

$$(Fy)(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} y(x)dx\,.$$

Функцию $a \in L_\infty(\mathbb{R})$ назовем U-мультипликатором в $L_p(\mathbb{R}, \rho)$, если для каждого $y \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_p(\mathbb{R}, \rho)$ функция $U^*m(a)Uy$ также принадлежит $L_2(\mathbb{R}) \cap L_p(\mathbb{R}, \rho)$ и кроме того при некотором постоянном $c > 0$ неравенство

$$\|U^*m(a)U\|_{p,\rho} \le c\|y\|_{p,\rho}$$

имеет место одновременно для всех $y \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R}, \rho)$. Оператор $U^*m(a)U$ допускает непрерывное продолжение до действующего на $L_p(\mathbb{R}, \rho)$ ограниченного оператора, который мы будем обозначать через $W^0_{\mathcal{L}}(a)$ и называть оператором $\mathcal{L}$-свертки на $L_2(\mathbb{R}, \rho)$ с символом a.

Множество U-мультипликаторов будем обозначать через $\mathcal{M}_{p,\rho,\mathcal{L}}$. Поскольку при $v = 0$ оператор U совпадает с преобразованием Фурье F, то в этом случае класс U-мультипликаторов совпадает с классом мультипликаторов Фурье $\mathcal{M}_{p,\rho}$ (см. [6]). Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Пусть v – безотражательный потенциал и $\mathcal{L}$ – соответствующий самосопряженный оператор, порожденный дифференциальным выражением (1.1). Тогда справедливо включение $\mathcal{M}_{p,\rho} \subset \mathcal{M}_{p,\rho,\mathcal{L}}$.*

Пусть теперь $a \in \mathcal{M}^{n\times n}_{p,\rho,\mathcal{L}}$. Тогда оператор $U^*m(a)U$ допускает непрерывное продолжение до ограниченного оператора, действующего на $L^n_p(\mathbb{R}, \rho)$, который мы также будем обозначать через $W^0_{\mathcal{L}}(a)$ и называть оператором $\mathcal{L}$-свертки с матричным символом a.

Определим операторы $\pi^0_+\colon L_p(\mathbb{R}_+, \rho) \to L_p(\mathbb{R}, \rho)$, $\quad \pi_+\colon L_p(\mathbb{R}, \rho) \to L_p(\mathbb{R}_+, \rho)$ по формулам $(\pi_+ y)(x) = y(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$,

$$(\pi^0_+ y)(x) = \begin{cases} y(x) & x \in \mathbb{R}_+ \\ 0 & x \in \mathbb{R}_- \end{cases}.$$

Пусть $a \in \mathcal{M}^{n\times n}_{p,\rho,\mathcal{L}}$. Оператор $W_{\mathcal{L}}(a) := \pi_+ W^0_{\mathcal{L}}(a)\pi^0_+\colon L^n_p(\mathbb{R}_+, \rho) \to L^n_p(\mathbb{R}_+, \rho)$, $1 < p < \infty$, будем называть оператором $\mathcal{L}$-Винера – Хопфа с символом a.

3. Фредгольмовость оператора $\mathcal{L}$-Винера – Хопфа. Класс мультипликаторов Фурье $\mathcal{M}_{p,\rho}$ (см. [7]) является банаховой алгеброй с нормой

$$\|a\|_{\mathcal{M}} := \|W^0(a)\|_{\mathcal{B}(L_p(\mathbb{R},\rho))}.$$

Функции из PC, имеющие ограниченную вариацию, принадлежат $\mathcal{M}_{p,\rho}$. Через $PC_{p,\rho}$ обозначим замыкание всех функций PC, имеющих ограниченную вариацию в банаховой алгебре $\mathcal{M}_{p,\rho}$, а через $C_{p,\rho}(\overline{\mathbb{R}})$ обозначим алгебру $PC_{p,\rho} \cap C(\overline{\mathbb{R}})$. Имеет место включение $PC_{p,\rho} \subset PC$ (см. [6]).

Пусть $\nu \in (0,1)$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Множество

$$\mathcal{A}(z_1, z_2; \nu) := \left\{ \frac{z_2 e^{2\pi(x+i\nu)} - z_1}{e^{2\pi(x+i\nu)} - 1} \; ; x \in \overline{\mathbb{R}} \right\}$$

является дугой окружности, соединяющей точки z_1 и z_2.

Пусть $a \in PC^{n\times n}$ и $a = (a_{ij})_{ij=1}^{n}$. Определим матриц-функцию $a_{p,\rho}\colon \dot{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ по формуле

$$a_{p,\rho}(x,\xi) = \frac{-1}{e^{2\pi\xi(x+i\nu)} - 1} a(x-0) + \frac{e^{2\pi(\xi+i\nu)}}{e^{2\pi\xi(x+i\nu)}} a(x+0),$$

где $x \in \dot{\mathbb{R}}$, $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ и $\nu = \begin{cases} \nu_\infty & x \in \mathbb{R} \\ \nu_0 & x = \infty \end{cases}$ Образ каждой из компонент $(a_{ij})_{p,\rho}$ является непрерывной кривой в комплексной плоскости, поскольку в точке разрыва $x \in \dot{\mathbb{R}}$ существенного образа a_{ij} точки $a_{ij}(x-0)$ и $a_{ij}(x+0)$ соединяются дугой $\mathcal{A}\big(a_{ij}(x-0), a_{ij}(x+0); \nu\big) = \big\{(1-\eta)a_{ij}(x-0) + \eta a_{ij}(x+0); \eta \in \mathcal{A}(0,1;\nu)\big\}$. В частности, образ функции $\det a_{p,\rho}$ также является непрерывной замкнутой естественным образом ориентированной кривой в результате добавления к существенному образу $\det a_{p,\rho}$ кривых $\big\{\det\big((1-\eta)a(x-0) + \eta a(x+0)\big);\ \eta \in \mathcal{A}(0,1;\nu)\big\}$, соединяющих в точках разрывов $\det a(x)$, точки $\det a(x-0)$ и $\det a(x+0)$, $x \in \dot{\mathbb{R}}$. Это обстоятельство позволяет в случае $\det a_{p,\rho}(x,\xi) \neq 0$ ($x \in \dot{\mathbb{R}}$, $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$) корректным образом определить целое число $\operatorname{wind}(\det a(x))$, равное количеству оборотов вокруг нуля точки $\det a_{p,\rho}(x,\xi)$.

Теорема 3.1. *Пусть v – безотражательный потенциал, $a \in (PC_{p,\rho})^{n\times n}$. Тогда оператор $W_{\mathcal{L}}(a)$ фредгольмов в пространстве $L_p^n(\mathbb{R}_+, \rho)$ тогда и только тогда, когда*

$$det\, a_{p,\rho}(x,\xi) \neq 0 \text{ при всех } x \in \dot{\mathbb{R}},\ \xi \in \overline{\mathbb{R}}.$$

При выполнении этого условия

$$\operatorname{Ind} W_{\mathcal{L}}(a) = \operatorname{wind}\big(\det a_{ij}\big). \tag{3.1}$$

В случае, когда $\det a$ имеет лишь конечное число разрывов, формула (3.1) может быть записана в более прозрачной форме.

Пусть $x_1 < x_2 < \cdots < x_m -$ все конечные точки разрыва функции $\det a$. Добавив к ним $x_0 := -\infty$, $x_{m+1} := +\infty$, и определим интервалы $\ell_k := [x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, \ldots, m$. Под непрерывным аргументом $\det a$ на ℓ_k мы понимаем произвольную непрерывную на ℓ_k функцию $\arg(\det a)$, удовлетворяющую на ℓ_k равенству $\det a(x) = |\det a(x)| e^{i \arg(\det a(x))}$. Очевидно, что числа

$$\operatorname{ind}_{\ell_0} a \coloneqq \arg a(x_1 - 0) - \arg a(-\infty)$$
$$\operatorname{ind}_{\ell_k} a \coloneqq \arg a(x_{k+1} - 0) - \arg a(x_k + 0)\ , \ k = 1, \dots, m-1, \text{ и}$$
$$\operatorname{ind}_{\ell_m} a \coloneqq \arg a(+\infty) - \arg a(x_m + 0)$$

не зависят от выбора непрерывных аргументов. Формула (3.1) в данном случае принимает вид

$$\operatorname{Ind} W_{\mathcal{L}}(a) = mn\nu_\infty + n\nu_0 - \sum_{k=0}^{m} \operatorname{ind}_{\ell_k}(\det a) -$$
$$- \sum_{k=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} \left\{ \nu_\infty + \frac{1}{2\pi} \arg \xi_s(x_k) \right\} - \sum_{s=1}^{n} \left\{ \nu_0 + \frac{1}{2\pi} \arg \xi_s(\infty) \right\},$$

где $\xi_1(x_k), \dots, \xi_n(x_k)$ – все собственные значения матрицы $a^{-1}(x_k - 0) a(x_k + 0)$ $(k = 1, \dots, m)$; $\xi_1(\infty), \dots, \xi_m(\infty)$ – все собственные значения матрицы $a^{-1}(\infty - 0) a(\infty + 0)$, а через $\{\eta\}$ обозначена дробная часть действительного числа η. Переформулируем теперь теорему 3.1 в случае непрерывного на $\overline{\mathbb{R}}$ символа.

Теорема 3.2. *Пусть ν – безотражательный потенциал и $a \in \left(C_{p,\rho}(\overline{\mathbb{R}})\right)^{n\times n}$. Тогда оператор $W_{\mathcal{L}}(a)$ фредгольмов в пространстве $L_p^n(\mathbb{R}_+, \rho)$ тогда и только тогда, когда $\det a_{p,\rho}(x) \neq 0$ для всех $x \in \overline{\mathbb{R}}$, а числа*

$$\nu_0 + \frac{1}{2\pi} \arg \xi_j\ , \qquad j = 1, \dots, n$$

не являются целыми ни при одном собственном значении ξ_i матрицы $a^{-1}(\infty - 0) a(\infty + 0)$.

В случае, когда оператор $W_{\mathcal{L}}(a)$ фредгольмов, справедливо равенство

$$\operatorname{Ind} W_{\mathcal{L}}(a) = \arg(\det a)(-\infty) - \arg(\det a)(+\infty) + n\nu_0$$
$$- \sum_{j=1}^{n} \left\{ \nu_0 + \frac{1}{2\pi} \arg \xi_j \right\},$$

где $arg(det\ a)$ – непрерывный на $\overline{\mathbb{R}}$ аргумент функции $det\ a$.

[1]Институт механики НАН РА
[2]Институт математики НАН РА
[3]Ереванский государственный университет
e-mails: hrayrgrigor@gmail.com, kamalyan_armen@yahoo.com,
grigor.kirakosyan.99@gmail.com

Г. С. Григорян, А. Г. Камалян, Г. А. Киракосян

Операторы $\mathcal{L}$-Винера – Хопфа с кусочно-непрерывным матричным символом в лебеговых пространствах со степенным весом

Понятия операторов $\mathcal{L}$-свертки и $\mathcal{L}$-Винера – Хопфа вводится заменой преобраования Фурье в определении оператора свертки, оператором сплетающий оператор Штурма – Лиувилля с оператором умножения. Рассматривается случай когда потенциал оператора Штурма – Лиувилля является безотражательным, а символ оператора $\mathcal{L}$-Винера – Хопфа кусочно-непрерывной матрица-функцией. Получены критерии фредгольмовости и формула для индекса в лебеговых пространствах со степенным весом.

Հ. Ս. Գրիգորյան, Ա. Հ. Քամալյան, Գ. Ա. Կիրակոսյան

Կտոր առ կտոր անընդհատ մատրիցային սիմվոլով $\mathcal{L}$-Վիներ – Հոպֆի օպերատորները աստիճանային կշռով լեբեգյան տարածություններում

Փաթեթի օպերատորի սահմանման մեջ, Ֆուրիեի ձևափոխությունը փոխարինելով օպերատորով, որը միահյուսում է Շտուրմ – Լյուվիլի և բազմապատկման օպերատորները, ներմուծված է $\mathcal{L}$-փաթեթի և $\mathcal{L}$-Վիներ – Հոպֆի օպերատորների գաղափարը: Դիտարկվում է դեպք, երբ Շտուրմ – Լյուվիլի օպերատորի պոտենցիալը չանդրադարձող է, իսկ $\mathcal{L}$-Վիներ – Հոպֆի օպերատորի սիմվոլը կտոր առ կտոր անընդհատ մատրիցա-ֆունկցիա է: Աստիճանային կշռով լեբեգյան տարածություններում ստացված են ֆրեդհոլմության հայտանիշ և ինդեքսի բանաձև:

H. S. Grigoryan, A. G. Kamalyan, G. A. Kirakosyan

$\mathcal{L}$-Wiener – Hopf Operators with Piecewise Continuous Matrix-Valued Symbol on Lebesgue Spaces with Power Weight

The concepts of $\mathcal{L}$-convolution operator and $\mathcal{L}$-Wiener – Hopf operator is introduced by changing the Fourier operator in the definition of the convolution operator to the operator intertwining the Sturm – Liouville operator $\mathcal{L}$ with the multiplication operator. It is considered the case when the potential of Sturm – Liouville operator is reflectionless and the symbol of the $\mathcal{L}$-Wiener – Hopf operator is a piecewise continuous matrix-function. Fredholm criteria and index-formulas on Lebesgue spaces with power weight are obtained.

Литература

1. *Камалян А. Г., Спитковский И. М.* – Матем. заметки. 2018. Т. 104. Вып. 3. С. 407–421.
2. *Камалян А. Г., Караханян М. И., Оганесян А. О.* – Изв. НАН Армении. Математик. 2018. Т. 53. № 3. С. 21–27.
3. *Hasanyan D., Kamalyan A., Karakhanyan M., Spitkovsky I.M.* – Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. 2019. V. 291. P. 175–197.
4. *Asatryan H. A., Kamalyan A. G., Karakhanyan M. I.* – Reports NAS of Armenia. 2019. V. 119. № 1. P. 22–28.

5. *Asatryan H. A., Kamalyan A. G., Karakhanyan M. I.* – Reports NAS of Armenia. 2019. V. 119. № 2. P. 103–109.
6. *Böttcher A., Karlovich Y. I., Spitkovsky I. M.* – Convolution Operators and Factorization of Almost Periodic Matrix Functions. Basel, Birkhäuser. 2002.
7. *Schneider R.* – J. Integral Equations. 1985. V. 9. P. 135–152.
8. *Фаддеев Л. Д.* – Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы мат. 1974. Т. 3, С. 93–180.