ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 121 2021 №3

МЕХАНИКА

УДК 62.50; 621.38

А. А. Гукасян

Об управляемости процесса многоэтапного обслуживания технологического участка манипулятора с векторным управлением

(Представлено академиком Л. А. Агаловяном 16/VIII 2021)

Ключевые слова: *многозвенный манипулятор, технологический процесс обслуживания, управляемость.*

Введение. Рассматривается технологический процесс, который состоит из подвижных или неподвижных объектов (целей) и управляемого многозвенного манипулятора с векторным управлением. Задача манипулятора состоит в обслуживании непрерывной работы объектов в зависимости от технологического назначения и критериев качества управляемого процесса. Исследуются вопросы управляемости в случае, когда движение манипулятора с векторным управлением на каждом интервале обслуживания описывается линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, а движения объектов заданы. Динамические характеристики манипулятора в зависимости от массы переносимого груза или инструмента могут изменяться в процессе обслуживания. В [1-6] приводятся математические модели процессов обслуживания манипулятором технологического процесса, а также обсуждаются различные варианты оптимизации управляемого процесса. Эти исследования являются продолжением работы [7], где рассматривается модель управляемого технологического процесса, состоящего из подвижных конвейеров, тележки с различными деталями и адаптивным манипулятором.

1. Постановка задачи обслуживания. В общем случае предполагаем, что движения объектов заданы [1-6], а динамика движения манипулятора на каждом интервале обслуживания $[t_{i-1}, t_i]$ $(i = 1, 2, ..., k)$ описывается линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами и векторным управлением

$$\dot{\mathbf{x}}^i = \mathbf{A}_i \mathbf{x}^i + \mathbf{B}_i \mathbf{u} \quad (i = 1, 2, ..., k), \tag{1.1}$$

где матрицы $\mathbf{A}_i$ и $\mathbf{B}_i$ зависят от некоторого параметра $\omega^i\left(i=1,2,...,k\right)$, входящего в систему уравнений движения манипулятора, который может изменяться после каждой встречи с объектами. В практических задачах обслуживания параметром $\omega^i\left(i=1,2,...,k\right)$ может являться масса переносимого манипулятором груза или инструмента [8, 9].

Уравнения (1.1) представим в виде

$$\left[\begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}^1=\mathbf{A}_1\mathbf{x}^1+\mathbf{B}_1\mathbf{u}, t\in\left[t_0,t_1\right] \\ \dot{\mathbf{x}}^2=\mathbf{A}_2\mathbf{x}^2+\mathbf{B}_2\mathbf{u}, t\in\left[t_1,t_2\right] \\ ---------- \\ \dot{\mathbf{x}}^{k-1}=\mathbf{A}_{k-1}\mathbf{x}^{k-1}+\mathbf{B}_{k-1}\mathbf{u}, t\in\left[t_{k-2},t_{k-1}\right] \\ \dot{\mathbf{x}}^k=\mathbf{A}_k\mathbf{x}^k+\mathbf{B}_k\mathbf{u}, t\in\left[t_{k-1},t_k=T\right] \end{array}\right. . \tag{1.2}$$

Здесь k – количество интервалов обслуживания $\left[t_{i-1},t_i\right]\left(i=1,2,...,k\right)$, $\mathbf{x}^i-n$-мерный фазовый вектор состояния манипулятора, который соответствует движению на интервале времени $\left[t_{i-1},t_i\right]$, $\mathbf{A}_i-\left(n\times n\right)$-мерная матрица с постоянными элементами $\left\{a_{l,j}^i\left(\omega^i\right)\right\}_{l,j=1}^{n,n}$ на интервале времени $\left[t_{i-1},t_i\right]$, характеризующими динамические свойства механической системы манипулятора в зависимости от параметра ω^i (здесь предполагается, что изменение параметра происходит скачкообразно в моменты времени $t_{i-1}\left(i=1,2,...,k\right)$), $\mathbf{B}_i-\left(n\times r\right)$-мерная матрица с постоянными элементами $\left\{b_{l,j}^i\right\}_{l,j=1}^{n,r}$ на интервале времени $\left[t_{i-1},t_i\right]$, характеризующими возможность системы управления манипулятора на интервале времени $\left[t_{i-1},t_i\right]$, $\mathbf{u}-r\left(r\le n\right)$-мерный вектор управления, $t\in\left[t_0,T\right]$ (t_0 – начальный, $t_k=T$ – конечный момент времени). Моменты времени $t_i\left(i=1,2,...,k\right)$ $\left(t_0<t_1<t_2<...<t_{k-1}<t_k=T\right)$ могут быть фиксированными или определяться из дополнительных условий.

Матрицы $\mathbf{A}_i,\mathbf{B}_i$ и векторы $\mathbf{x}^i,\mathbf{u}$ $\left(i=1,2,...,k\right)$ имеют вид

$$\mathbf{A}_i=\begin{pmatrix} a_{11}^i & a_{12}^i & \cdots & a_{1n}^i \\ a_{21}^i & a_{22}^i & \cdots & a_{2n}^i \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1}^i & a_{n2}^i & \cdots & a_{nn}^i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_i=\begin{pmatrix} b_{11}^i & b_{12}^i & \cdots & b_{1r}^i \\ b_{21}^i & b_{22}^i & \cdots & b_{2r}^i \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1}^i & b_{n2}^i & \cdots & b_{nr}^i \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

$$\mathbf{x}^i=\left(x_1^i,x_2^i,...,x_n^i\right)^T, \mathbf{u}=\left(u_1,u_2,...,u_r\right)^T, \quad \left(i=1,2,....k\right)$$

Предполагая, что движения объектов обслуживания заданы, в каждый промежуточный момент времени $t_i\left(i=1,2,...,k\right)$ их состояние в n-мерном пространстве определим фазовым вектором $\mathbf{z}^i\left(i=1,2,...,k\right)$ $\left[2\right]$.

При сделанных предположениях краевые условия для задачи обслуживания можно сформулировать следующим образом. В пространстве состояний заданы произвольные начальные (при $t=t_0$, $i=1$) и конечные (при $t=T, i=k$) положения системы (1.2) в виде

$$\Phi_0\left(\mathbf{x}^1\left(t_0\right)\right)=0,\ \Phi_k\left(\mathbf{x}^k\left(T\right)\right)=0, \tag{1.4}$$

а в промежуточные моменты времени $t_i\left(i=1,2,...,k\right)$ фазовые векторы составных систем (1.2) удовлетворяют условиям

$$\Phi_i\left(\mathbf{x}^i\left(t_i\right),\mathbf{z}^i\left(t_i\right),\mathbf{x}^{i+1}\left(t_i\right)\right)=0,\left(i=1,2,...,k-1\right). \tag{1.5}$$

Условия (1.4) и (1.5) означают, что в начальный $\left(t=t_0\right)$, конечный $\left(t=T\right)$ и промежуточные $t_i\left(i=1,2,...,k-1\right)$ моменты времени фазовые состояния схвата манипулятора и объектов обслуживания принадлежат некоторым многообразиям. Условие (1.5) является условием преемственности и означает, что в момент времени t_i конечное состояние i-ой динамической системы (1.2) и объекта обслуживания, а также начальное состояние $\left(i+1\right)$-ой системы (1.2) принадлежат некоторой области. С математической точки зрения (1.4) и (1.5) дают возможность рассматривать обслуживание манипулятором технологического процесса как управление движением манипулятора с переменной динамикой и промежуточными состояниями [10, 11]. Время нахождения манипулятора около каждого объекта не учитывается, т.е. считается, что в момент времени t_i манипулятор обслуживает объект под номером i и мгновенно направляется к другому объекту под номером $\left(i+1\right)$ $\left[7\right]$.

В частном случае, когда начальное, конечное и промежуточные состояния заданы (фиксированы), условия (1.4) можно записать следующим образом:

$$\mathbf{x}^1\left(t_0\right)=\mathbf{x}^{1,t_0},\mathbf{x}^k\left(t_k\right)=\mathbf{x}^k\left(T\right)=\mathbf{x}^{k,T}, \tag{1.6}$$

а в промежуточные моменты времени $t_i\left(i=1,2,...,k-1\right)$ (1.5) может иметь вид

$$\mathbf{x}^i\left(t_i\right)=\mathbf{z}^i\left(t_i\right)=\mathbf{x}^{i+1}\left(t_i\right),t\in\left[t_i,t_{i+1}\right]\left(i=1,2,...,k-1\right). \tag{1.7}$$

Поскольку на каждом интервале времени $t\in\left[t_i,t_{i+1}\right]\left(i=1,2,...,k\right)$ движение манипулятора описывается системой линейных дифференциальных уравнений (1.2), то при надлежащем выборе управляющей вектор-функции $\mathbf{u}=\left(u_1\left(t\right),u_2\left(t\right),...,u_r\left(t\right)\right)^T$ из области допустимых управлений имеем единственную траекторию движения манипулятора, удовлетворяющую условиям (1.6), (1.7). Полученные таким образом решения $\mathbf{x}(t)=\{\mathbf{x}^i(t)\}$ уравнений (1.2), где $\mathbf{x}^i(t)=\left(x_1^i(t),x_2^i(t),...,x_n^i(t)\right)^T (i=1,2,...,k)$, являются непрерывными и кусочно-дифференцируемыми, то есть всегда, кроме моментов времени $t_i(i=1,2,...,k)$, решение $\mathbf{x}(t)$ является непрерывно дифференцируемым.

2. Управляемость процесса обслуживания. Как известно $[12-15]$, каждая система из совокупности (1.2)

$$\dot{\mathbf{x}}^i=\mathbf{A}_i\mathbf{x}^i+\mathbf{B}_i\mathbf{u}\ \ (i=1,2,...,k) \tag{2.1}$$

при векторном управлении $\mathbf{u}=\left(u_1(t),u_2(t),...,u_r(t)\right)^T$ является вполне управляемой на интервале $t\in[t_i,t_{i+1}](i=1,2,...,k)$, если ранг матрицы управляемости равен n, т.е.

$$rang\left(\mathbf{B}_i\quad \mathbf{A}_i\mathbf{B}_i\quad \mathbf{A}_i^2\mathbf{B}_i\cdots\mathbf{A}_i^{n-1}\mathbf{B}_i\right)=n(i=1,2,...,k), \tag{2.2}$$

и неуправляемой на интервале $t\in[t_i,t_{i+1}](i=1,2,...,k)$, если

$$rang\left(\mathbf{B}_i\quad \mathbf{A}_i\mathbf{B}_i\quad \mathbf{A}_i^2\mathbf{B}_i\cdots\mathbf{A}_i^{n-1}\mathbf{B}_i\right)<n(i=1,2,...,k). \tag{2.3}$$

Матрица управляемости $\left(\mathbf{B}_i\quad \mathbf{A}_i\mathbf{B}_i\quad \mathbf{A}_i^2\mathbf{B}_i\cdots\mathbf{A}_i^{n-1}\mathbf{B}_i\right)$ имеет размерность $(n\times nr)$.

Следуя [13, 14], приведем определение вполне управляемости автономной динамической системы (2.1) при векторном управлении размерности $r\le n$. Автономная система (2.1) на интервале времени $[t_{i-1},t_i]$ называется вполне управляемой (обладает свойством управляемости), если для любой пары точек $\mathbf{x}^i(t_{i-1})$ и $\mathbf{x}^i(t_i)(i=1,2,...,k)$ существует ограниченное измеримое векторное управление $\mathbf{u}(t)=\left(u_1(t),u_2(t),...,u_r(t)\right)^T, t\in[t_{i-1},t_i]$, переводящее систему (2.1) из точки $\mathbf{x}^i(t_{i-1})$ в точку $\mathbf{x}^i(t_i)(i=1,2,...,k)$. Из определения вполне управляемости системы (2.1) и условий (1.6), (1.7) следует обобщенное определение вполне управляемости совокупности (1.2) на интервале времени $t\in[t_0,T]$.

Определение. Совокупность систем (1.2) на интервале времени $[t_0,T]$ является вполне управляемой (обладает свойством управляемости), если для любого начального $\mathbf{x}^1(t_0)$ и конечного $\mathbf{x}^k(T)$ состояний существует допустимое векторное управление $\mathbf{u}(t)=\left(u_1(t),u_2(t),...,u_r(t)\right)^T, t\in[t_0,T]$, переводящее (1.2) из начального состояния в конечное, с обеспечением в промежуточные моменты времени $t_i\left(t_0<t_1<t_2<...<t_{k-1}<t_k=T\right)$ условий $\mathbf{x}^i(t_i)=\mathbf{x}^{i+1}(t_i)(i=1,2,...,k-1)$. Управление при этом строится как объединение управлений $\mathbf{u}_p=\{\mathbf{u}^i(t)\}(i=1,2,...,k-1)$ манипулятором на каждом этапе обслуживания.

Как следует из определения, управляемость технологического процесса в целом зависит от управляемости на каждом интервале обслуживания, и нетрудно убедиться, что процесс обслуживания является управляемым, если он вполне управляем на каждом этапе, и неуправляемым, если хотя бы одна из систем (1.2) не вполне управляема на своем интервале определения.

Для доказательства этого утверждения по аналогии с $[1-5]$ предполагаем, что на интервале времени $[t_0, T]$ имеется только один промежуточный момент t_1, где происходит изменение динамических характеристик механической системы манипулятора (1.1), движение которого на каждом интервале $[t_0, t_1], [t_1, T] (k = 2)$ с векторными управлениями описывается уравнениями

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}^1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}^1 + \mathbf{B}_1 \mathbf{u}, t_0 \le t \le t_1 \\ \dot{\mathbf{x}}^2 = \mathbf{A}_2 \mathbf{x}^1 + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}, t_1 \le t \le t_2 = T \end{bmatrix}, \tag{2.4}$$

где начальные и конечные условия, а также условия преемственности имеют вид

$$\mathbf{x}^1(t_0) = \mathbf{x}^1_{t_0}, \mathbf{x}^1(t_1) = \mathbf{z}^1(t_1) = \mathbf{x}^2(t_1), \mathbf{x}^2(t_2) = \mathbf{x}^2_T. \tag{2.5}$$

Для удобства дальнейшего исследования вопросов о вполне управляемости на всем промежутке времени $[t_0, T]$ формально расширим размеры пространства состояний в два раза и введем $2n$-мерный вектор состояния манипулятора $\mathbf{y}$

$$\mathbf{y} = \left(x_1^1, x_2^1, ..., x_n^1, x_1^2, x_2^2, ..., x_n^2\right)^T, t \in [t_0, t_2], \tag{2.6}$$

где

$$\mathbf{y}^1 = \left(x_1^1, x_2^1, ..., x_n^1, 0, 0, ..., 0\right)^T, t \in [t_0, t_1] \tag{2.7}$$

$$\mathbf{y}^2 = \left(0, 0, ..., 0, x_1^2, x_2^2, ..., x_n^2\right)^T, t \in [t_1, t_2]. \tag{2.8}$$

Условия преемственности в момент времени t_1, то есть $\mathbf{x}^1(t_1) = \mathbf{z}^1(t_1) = \mathbf{x}^2(t_1)$ для переменных (2.6)-(2.8), можно представить в виде

$$\left|\mathbf{y}^1(t_1)\right| = \left|\mathbf{y}^2(t_1)\right| \left(x_i^1(t_1) = x_i^2(t_1), i = 1, 2, ..., n\right).$$

Введем матрицы $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ с размерностями $(2n \times 2n)$ $(2n \times r)$, соответственно,

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{pmatrix}, \tag{2.9}$$

где матрицы $\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i$ определяются из (1.3) ($\mathbf{C}$ – блочная матрица).

В соответствии с (2.6)-(2.9) матрицы $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ можно представить в виде суммы матриц

$$\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \; \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix}, \tag{2.10}$$

$$\mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \; \mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_2 \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

(матрицы $\mathbf{0}$ с нулевыми элементами в (2.10) имеют размерности $(n \times n)$, а в (2.11) – $(n \times r)$).

С учетом (2.6)-(2.11) системы уравнений (2.4) в общем случае можно представить в виде

$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{y}^1 = \mathbf{C}_1 \mathbf{y}^1 + \mathbf{D}_1 \mathbf{u}, t \in [t_0, t_1] \\ \mathbf{y}^2 = \mathbf{C}_2 \mathbf{y}^2 + \mathbf{D}_2 \mathbf{u}, t \in [t_1, t_2] \end{array} \right. . \tag{2.12}$$

Из (2.6)-(2.11) следует, что первую систему уравнений в (2.12) можно рассматривать на всем промежутке времени $[t_0, t_2]$ с нулевыми элементами в $[t_1, t_2]$ (с нулевым продолжением), а вторую систему – в $[t_0, t_2]$ с нулевыми элементами в $[t_0, t_1]$.

Начальными и конечными условиями для задач управления (2.12), соответственно, являются

$$\begin{array}{l} \mathbf{y}^1(t_0) = \left(x_1^1(t_0), x_2^1(t_0), ..., x_n^1(t_0), 0, 0, ..., 0\right)^T, \mathbf{y}^1(t_1) = \left(x_1^1(t_1), x_2^1(t_1), ..., x_n^1(t_1), 0, 0, ..., 0\right)^T \\ \mathbf{y}^2(t_1) = \left(0, 0, ..., 0, x_1^2(t_1), x_2^2(t_1), ..., x_n^2(t_1)\right)^T, \mathbf{y}^2(t_2) = \left(0, 0, ..., 0, x_1^2(t_2), x_2^2(t_2), ..., x_n^2(t_2)\right)^T \\ \left|\mathbf{y}^1(t_1)\right| = \left|\mathbf{y}^2(t_1)\right|, \left(x_i^1(t_1) = x_i^2(t_1), i = 1, 2, ..., n\right) \end{array} \tag{2.13}$$

Объединяя системы (2.12) с учетом (2.6)-(2.13), процесс обслуживания формально можно описать уравнением

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\mathbf{y} + \mathbf{D}\mathbf{u}, t \in [t_0, t_2], \tag{2.14}$$

где вектор $\mathbf{y}$ и матрицы $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ определяются из (2.6)-(2.8) и (2.9)-(2.11), соответственно.

Поскольку в каждый момент времени $t \in [t_0, t_2]$ (2.14) совпадает либо с первым уравнением из (2.12), либо со вторым, то для переменных и параметров (2.6)-(2.13) матрицы управляемости (2.2) для (2.12) имеют следующие структуры, соответственно:

$$\mathbf{M}_1 = \left(\mathbf{D}_1 \quad \mathbf{C}_1\mathbf{D}_1 \quad \mathbf{C}_1^2\mathbf{D}_1 \cdots \mathbf{C}_1^{n-1}\mathbf{D}_1\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1^2\mathbf{B}_1 & \ldots & \mathbf{A}_1^{n-1}\mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \text{ при } t \in [t_0, t_1] \tag{2.15}$$

и

$$\mathbf{M}_2=\left(\mathbf{D}_2\quad \mathbf{C}_2\mathbf{D}_2\quad \mathbf{C}_2^2\mathbf{D}2\cdots\mathbf{C}_2^{n-1}\mathbf{D}_2\right)=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2^2\mathbf{B}_2 & \dots & \mathbf{A}_2^{n-1}\mathbf{B}_2\end{pmatrix},\ \text{при}\ t\in[t_1,t_2]. \tag{2.16}$$

Здесь матрицы $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ имеют размерности $(2n\times nr)$, соответственно.

С учетом (2.2), (2.3, (2.15), (2.16) $rang\mathbf{M}_i\ (i=1,2)$ совпадает с (2.2) и (2.3) при $i=1,2$.

Объединяя матрицы (2.15), (2.16), получим

$$\mathbf{M}^1=\{\mathbf{M}_1,\mathbf{M}_2\}=\left\{\left(\mathbf{D}_1\quad \mathbf{C}_1\mathbf{D}_1\quad \mathbf{C}_1^2\mathbf{D}_1\cdots\mathbf{C}_1^{n-1}\mathbf{D}_1\right),\left(\mathbf{D}_2\quad \mathbf{C}_2\mathbf{D}_2\quad \mathbf{C}_2^2\mathbf{D}_2\cdots\mathbf{C}_2^{n-1}\mathbf{D}_2\right)\right\}=$$
$$=\begin{pmatrix}\mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1^2\mathbf{B}_1 & \cdots & \mathbf{A}_1^{n-1}\mathbf{B}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2^2\mathbf{B}_1 & \cdots & \mathbf{A}_2^{n-1}\mathbf{B}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{M}_{11} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{22}\end{pmatrix} \tag{2.17}$$

Блочная диагональная матрица $\mathbf{M}^1$ имеет размерность $(2n\times 2nr)$, где $\mathbf{M}_{11}=\left(\mathbf{B}_1\quad \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1\quad \mathbf{A}_1^2\mathbf{B}_1\cdots\mathbf{A}_1^{n-1}\mathbf{B}_1\right)$ совпадает с матрицей управляемости первой системы совокупности (2.12), а $\mathbf{M}_{22}=\left(\mathbf{B}_2\quad \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2\quad \mathbf{A}_2^2\mathbf{B}_2\cdots\mathbf{A}_2^{n-1}\mathbf{B}_2\right)$ – с матрицей управляемости второй системы. В рассматриваемом случае (2.15)-(2.17) имеем $[16]$

$$rang\mathbf{M}^1=rang\mathbf{M}_{11}+rang\mathbf{M}_{22}. \tag{2.18}$$

В частном случае при $r=1$ (управление манипулятора – скалярная функция) матрица $\mathbf{M}^1$ квадратичная, имеет размерность $(2n\times 2n)$ и подробно исследована в работе $[2]$, согласно которой имеем

$$\det\mathbf{M}^1=\det\begin{pmatrix}\mathbf{M}_{11} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{22}\end{pmatrix}=\det\left(\mathbf{M}_{11}\times\mathbf{M}_{22}\right)=\det\mathbf{M}_{11}\times\det\mathbf{M}_{22}\,. \tag{2.19}$$

Если $\det\mathbf{M}^1\neq 0,$ то $rang\mathbf{M}^1=rang\mathbf{M}_{11}+rang\mathbf{M}_{22}=2n$ и за матрицу управляемости для объединения (2.12) при $r=1$ на всем промежутке времени можно принять матрицу $\mathbf{M}^1$.

Из (2.19) следует, что процесс обслуживания вполне управляем на интервале времени $t\in[t_0,T]$ тогда и только тогда, когда обе системы в (2.12) при $r=1$ и при (2.5) вполне управляемы на интервалах времени $[t_0,t_1]$ и $[t_1,t_2]$, соответственно, и не управляемы, если одна из систем в (2.12) не вполне управляема на своем интервале определения, т.е. $\det\mathbf{M}^1=\det\mathbf{M}_{11}\times\det\mathbf{M}_{22}=0$, если $rang\mathbf{M}_{11}$ или $rang\mathbf{M}_{22}$ меньше, чем n. Эти результаты совпадают с результатами исследования $[2]$.

При $1<r\le n$ для рассматриваемого случая имеем (2.17). Если системы в (2.4) при (2.5) вполне управляемы на своих интервалах движений $[t_0,t_1]$ и $[t_1,t_2]$, то $rang\mathbf{M}_{11}=n$ и $rang\mathbf{M}_{22}=n$ $(rang\mathbf{M}_{11}<n,$ или $rang\mathbf{M}_{22}<n$ в противном случае). По аналогии с $[2]$ в качестве матрицы управляемости для объединения (2.4) на промежутке времени $[t_0,t_2]$ можно принять матрицу $\mathbf{M}^1$. Следовательно, процесс обслуживания вполне управляем, если

$$rang\mathbf{M}_{11}=n,\ rang\mathbf{M}_{22}=n \text{ и } rang\mathbf{M}^1=rang\mathbf{M}_{11}+rang\mathbf{M}_{22}=2n \tag{2.20}$$

и не вполне управляем на интервале времени $[t_0,t_2]$, если

$$rang\mathbf{M}^1<2n\ (rang\mathbf{M}_{11}<n, \text{ или } rang\mathbf{M}_{22}<n\ ) \tag{2.21}$$

Нетрудно убедиться, что утверждение об управляемости верно, когда процесс обслуживания технологического процесса состоит из k участков (k – ограниченное число), где происходит изменение динамических характеристик манипулятора и динамика движения описывается объединением систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (1.2) с условиями (1.6), (1.7).

Матрица управляемости для объединения систем (1.2) определяется следующим образом:

$$\mathbf{M}^k=\begin{pmatrix}\mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 & \cdots & \mathbf{M}_i & \cdots & \mathbf{M}_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{M}_{11} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{22} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{M}_{ii} & \cdots & \mathbf{0}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \mathbf{0} & \ddots & \vdots\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{M}_{kk}\end{pmatrix}, t\in[t_0,T], \tag{2.22}$$

где матрица $\mathbf{M}^k$ имеет размерность $(nk\times nkr)$.

Здесь $\mathbf{M}_{ii}=\begin{pmatrix}\mathbf{B}_i & \mathbf{A}_i\mathbf{B}_i & \mathbf{A}_i^2\mathbf{B}_i & \cdots & \mathbf{A}_i^{n-1}\mathbf{B}_i\end{pmatrix}$ совпадает с матрицей управляемости процесса обслуживания на интервале времени $t\in[t_{i-1},t_i](i=1,2,...,k)$.

По аналогии с (2.18) имеем $rang\mathbf{M}^k=\sum\limits_{i=1}^{k}rang\mathbf{M}_{ii}$.

Если процесс обслуживания на каждом этапе является вполне управляемым, т.е.

$$rang\mathbf{M}_{ii}=n(i=1,2,...,k), \text{ то } rang\mathbf{M}^k=kn. \tag{2.23}$$

Из (2.23) следует, что весь процесс обслуживания является вполне управляемым.

В случае, когда одна из систем (1.2) на своем интервале движения является не вполне управляемой,

$$rang\mathbf{M}^k<kn. \tag{2.24}$$

Из (2.24) следует, что процесс обслуживания манипулятором технологического процесса на всем интервале времени $[t_0,T]$ не вполне управляем, если одна из систем (1.2) не вполне управляема.

В частном случае, когда $r=1$ (скалярное управление манипулятором) и при k промежуточных моментах изменений динамических характеристик манипулятора, матрица управляемости $\mathbf{M}^k$ (2.22) имеет квадратную структуру с размерностью $(kn \times kn)$ [2], где

$$\det\mathbf{M}^k = \det\left(\mathbf{M}_{11} \times \mathbf{M}_{22} \times \ldots \times \mathbf{M}_{k-1k-1} \times \mathbf{M}_{kk}\right) = \det\mathbf{M}_{11} \times \det\mathbf{M}_{22} \times \ldots \times \det\mathbf{M}_{k-1k-1} \times \det\mathbf{M}_{kk} \tag{2.25}$$

Здесь матрица $\mathbf{M}_{ii}\left(i=1,2,\ldots,k\right)$ является матрицей управляемости системы под номером $i\left(i=1,2,\ldots,k\right)$ из (1.2) при $r=1$ на интервале времени $t \in \left[t_{i-1}, t_i\right]$ и имеет размерность $(n \times n)$.

Из $\det\mathbf{M}^k \neq 0$ следует, что все матрицы $\mathbf{M}_{jj}\left(j=1,2,\ldots,k\right)$ имеют максимальный $rang$, равный n, и $rang\mathbf{M}^k = kn$, тогда процесс обслуживания на каждом этапе является вполне управляемым. Из чего следует, что весь процесс обслуживания на промежутке $\left[t_0, T\right]$ является вполне управляемым. Если хотя бы одна система из (1.2) не вполне управляема на своем интервале определения, то $rang\mathbf{M}^k < kn$ и весь процесс обслуживания на интервале $\left[t_0, T\right]$ не вполне управляем.

Следовательно, управляемость процесса обслуживания манипулятором технологического участка при скалярном и векторном управлении на всем интервале времени $\left[t_0, T\right]$ зависит от управляемости на каждом этапе обслуживания и процесс является вполне управляемым, если он на каждом этапе $\left[t_{i-1}, t_i\right]\left(i=1,2,\ldots,k\right)$ вполне управляем, и неуправляемым, если хотя бы на одном интервале обслуживания он не вполне управляем. Определена матрица управляемости технологического процесса при векторном управлении манипулятора и проведены сравнения со скалярным управлением.

Институт механики НАН РА,
Горисский государственный университет
e-mail: ghukasyan10@yandex.com

А. А. Гукасян

Об управляемости процесса многоэтапного обслуживания технологического участка манипулятора с векторным управлением

Приведена математическая модель технологического участка, которая состоит из подвижных или неподвижных объектов (целей) и управляемого многозвенного манипулятора с векторным управлением. Исследуются вопросы управляемости технологического процесса в случае, когда движение манипулятора на каждом интервале обслуживания описывается линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, а движения объектов заданы. Показано, что весь процесс обслуживания при скалярном и векторном

управлении манипулятора является вполне управляемым, если процесс обслуживания на каждом этапе вполне управляем, и неуправляемым в противном случае. Определена матрица управляемости.

Ա. Ա. Ղուկասյան

Տեխնոլոգիական տեղամասի բազմէտապ մատակարարման պրոցեսի ղեկավարելիության մասին մանիպուլյատորի վեկտորական ղեկավարմամբ

Բերված է տեխնոլոգիական տեղամասի մաթեմատիկական մոդել, որը բաղկացած է շարժական կամ անշարժ օբյեկտներից (նպատակներից) և ղեկավարվող բազմօղակ մանիպուլյատորից վեկտորական ղեկավարմամբ: Ուսումնասիրվում են տեխնոլոգիական պրոցեսի ղեկավարելիության հարցերը, երբ մանիպուլյատորի շարժումը մատակարարման յուրաքանչյուր էտապում նկարագրվում է հաստատուն գործակիցներով գծային դիֆերենցիալ հավասարումների միջոցով, իսկ օբյեկտների շարժումը տրված է: Ցույց է տրված, որ մատակարարման ամբողջ պրոցեսը մանիպուլյատորի վեկտորական և սկալյար ղեկավարման դեպքում լրիվ ղեկավարելի է, եթե մատակարարման պրոցեսը յուրաքանչյուր էտապում լրիվ ղեկավարելի է և չղեկավարվող հակառակ դեպքում: Որոշված է ղեկավարելիության մատրիցան:

A. A. Ghukasyan

On the Controllability of the Process of the Multi-Stage Maintenance of the Technological Section of the Manipulator with Vector Control

The paper presents a mathematical model of a technological section, which consists of either mobile or stationary objects (targets) and controlled multi-link manipulator with vector control. The issues of the controllability of the technological process,,in the case when the movement of the manipulator at each service interval is described by linear differential equations with constant coefficients, and the movements of the objects are given, are also investigated. It is shown that the entire service process under scalar and vector control of the manipulator is completely controllable if the service process at each stage is completely controllable and not controllable otherwise. The matrix of controllability has been determined as well.

Литература

1. *Гукасян А. А.* В: Сб. науч. трудов междунар. конф. «Экстремальная робототехника (ЭР-2016)». СПб. 2016. С. 153-159.
2. *Гукасян А. А.* – Изв. НАН РА. Механика. 2017. Т. 70. № 3. С. 26-38.
3. *Ghukasyan A., Ordyan A. Ya.* In: IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 991 (2018) 012026 doi: 10.1088/1742-6596/991/1/01202; 5th International Conference on Topical Problems of Continuum Mechanics with a Special Session in Honor of Alexander Manzhirov's 60th Birthday, 2–7 October 2017, Tsakhkadzor, Armenia: Accepted papers received: 15 March 2018 Published online: 13 April 2018.

4. *Гукасян А. А., Ордян А. Я.* В: Сб. науч. трудов междунар. конф. «Актуальные проблемы механики сплошной среды». Цахкадзор, Армения, 2017, октябрь 2-7. С. 75-76.
5. *Гукасян А. А., Ордян А. Я.* В: Сб. науч. трудов 9-й междунар. конф. «Актуальные проблемы механики сплошной среды» Горис, Армения, 2018, октябрь 1-6. С. 143-147.
6. *Гукасян А. А., Ордян А. Я.* В: Сб. науч. трудов 6-й междунар. конф. «Актуальные проблемы механики сплошной среды». Дилижан, Армения, 2019, октябрь 1-6. С. 124-128.
7. *Гукасян А. А.* – Изв. АН АрмССР. Механика. 1986. Т. 39. № 6. С. 39-49.
8. *Гукасян А. А., Матевосян А. Г.* – Изв. НАН РА. Механика. 2002. Т. 55. № 1. С. 75-81.
9. *Гукасян А. А., Матевосян А. Г.* В: Сб. науч. трудов «Математический анализ и его приложени» АГПУ им. Х. Абовяна. Ереван. 2003. Вып. 3. С. 29-40.
10. *Величенко В. В.* – ДАН СССР. 1967. Т. 176. № 4. С. 754-756.
11. *Величенко В. В.* – ДАН СССР. 1967. Т. 174. № 5. С. 1011-1013.
12. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В. и др.* Математическая теория оптимальных процессов. М. Наука. 1983. 392 с.
13. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М. Наука.1968. 475 с.
14. *Ройтенберг Я. Н.* Автоматическое управление. М. Наука. 1978. 551 с.
15. *Ли Э. Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М. Наука. 1972. 574 с.
16. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М. Физматлит. 2004. 560 с.
17. *Гукасян А. А.* – Межвуз. сб. науч. трудов. 1988. Вып. 7. Изд-во ЕГУ. С. 86-105.