ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 121 2021 №3

МЕХАНИКА

УДК 539.3

Член-корреспондент НАН РА С. О. Саркисян

Статико-геометрическая аналогия и введение комплексного преобразования в моментно-мембранную теорию упругих тонких оболочек

(Представлено 8/VI 2021)

Ключевые слова: *моментно-мембранная теория, тонкая оболочка, статико-геометрическая аналогия, комплексное преобразование.*

Введение. Аналогия между статическими и геометрическими соотношениями в общей классической линейной теории тонких оболочек Кирхгофа – Лява установлена в [1]. Наиболее последовательно это свойство основных соотношений классической линейной теории оболочек было использовано в [2, 3] при выводе уравнений общей теории оболочек посредством введения комплексных неизвестных, попарно составленных из величин-аналогов. В [4] установлена статико-геометрическая аналогия и осуществлено комплексное преобразование в общей линейной теории оболочек типа Тимошенко, а в [5] эти вопросы решены в общей линейной теории термоупругости оболочек.

В [6-8] на основе моментной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений с применением метода гипотез, которые соответствуют качественным результатам применения асимптотического метода интегрирования граничной задачи трехмерной теории в области тонкой оболочки, построена линейная моментная модель тонких оболочек, подчиняющаяся деформационной концепции «сдвиг плюс поворот» (иначе моментно-мембранная теория упругих тонких оболочек). Для указанной теории установлены уравнения неразрывности деформаций срединной поверхности оболочки, а также доказаны соответствующие энергетические теоремы и вариационные принципы.

В данной работе обнаружено полное сходство структуры левых частей уравнения равновесия и уравнения совместности деформаций срединной поверхности оболочки по моментно-мембранной теории, называемое в теории оболочек статико-геометрической аналогией. Выполнено также комплексное преобразование, снизившее порядок разрешающей системы дифференциальных уравнений этой теории вдвое, путем записи их в комплексной форме.

1. Основные уравнения статики моментно-мембранной теории упругих тонких оболочек. Рассмотрим трехмерную оболочку на основе трехмерной моментной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений [9]; будем считать ее макроскопической однородной изотропной средой. Отнесем срединную поверхность оболочки к ортогональным гауссовым координатам $\alpha_i \left(i=1,2\right)$; координату, направленную по нормали к срединной поверхности, обозначим через z.

Согласно прикладной моментно-мембранной теории упругих тонких оболочек [6] перемещения и свободные повороты не изменяются по толщине оболочки, т.е. не зависят от z:

$$V_i = u_i\left(\alpha_1,\alpha_2\right),\ V_3 = w\left(\alpha_1,\alpha_2\right),\ \omega_k = \Omega_k\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\ \left(i=1,2;k=1,2,3\right). \quad (1.1)$$

Подставляя (1.1) в соответствующие выражения для деформаций и изгибов-кручений в моментной теории упругости, получим эти выражения для моментно-мембранной прикладной теории упругих тонких оболочек. Далее, подставляя найденные выражения деформаций и изгибов-кручений в физические соотношения моментной теории упругости, получим для моментно-мембранной прикладной теории выражения для напряжений и моментных напряжений.

Принимая вариационный принцип типа Ху – Вашицу [9] для трехмерной теории моментной упругости с независимыми полями перемещений и вращений и используя вышеопределенные формулы для перемещений и поворотов, деформаций и изгибов-кручений, напряжений и моментных напряжений, приходим к вариационному принципу типа Ху – Вашицу для прикладной моментно-мембранной теории упругих тонких оболочек [8], из которого в качестве уравнений Эйлера следуют основные уравнения этой теории:

уравнения равновесия

$$\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial\left(A_jT_{ii}\right)}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial\left(A_iS_{ji}\right)}{\partial\alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}S_{ij}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}T_{jj}+\frac{N_{i3}}{R_i}=-\left(p_i^+-p_i^-\right),$$

$$\frac{T_{11}}{R_1}+\frac{T_{22}}{R_2}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_2N_{13}\right)}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_1N_{23}\right)}{\partial\alpha_2}=\left(p_3^+-p_3^-\right),$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial\left(A_jL_{ii}\right)}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial\left(A_iL_{ji}\right)}{\partial\alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}L_{ij}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}L_{ii}+\frac{L_{i3}}{R_i}+\left(-1\right)^jN_{j3}=\\ =-\left(m_i^+-m_i^-\right)+\left(-1\right)^jh\left(p_i^++p_j^-\right),\end{gathered}$$

$$\frac{L_{11}}{R_1}+\frac{L_{22}}{R_2}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_2L_{13}\right)}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_1L_{23}\right)}{\partial\alpha_2}-\left(S_{12}-S_{21}\right)=\left(m_3^+-m_3^-\right); \quad (1.2)$$

соотношения упругости

$$T_{ii}=\frac{2Eh}{1-\nu^2}\left(\Gamma_{ii}+\nu\Gamma_{jj}\right),\quad S_{ij}=2h\left[\left(\mu+\alpha\right)\Gamma_{ij}+\left(\mu-\alpha\right)\Gamma_{ji}\right],$$

$$N_{i3}=2G_*h\Gamma_{i3},\quad L_{ii}=2h\frac{2\gamma}{\beta+2\gamma}\left[2\left(\beta+\gamma\right)k_{ii}+\beta k_{jj}\right],\tag{1.3}$$

$$L_{ij}=2h\left[\left(\gamma+\varepsilon\right)k_{ij}+\left(\gamma-\varepsilon\right)k_{ji}\right],\quad L_{i3}=2Bhk_{i3};$$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_j+\frac{w}{R_i},\quad \Gamma_{i3}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial w}{\partial\alpha_i}-\frac{u_i}{R_i}+\left(-1\right)^j\Omega_j,$$

$$\Gamma_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_i+\left(-1\right)^i\Omega_3,\quad k_{i3}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_3}{\partial\alpha_i}-\frac{\Omega_i}{R_i},\tag{1.4}$$

$$k_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_j+\frac{\Omega_3}{R_i},\quad k_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_i,$$

$$i\neq j=1,2.$$

Из указанного вариационного уравнения следуют также естественные граничные условия на контуре срединной поверхности оболочки [8].

Здесь $u_i, w_j, \Omega_i, \Omega_3$ – смещения и свободные повороты точек срединной поверхности; T_{ii}, S_{ij}, N_{i3} – компоненты тангенциальных и поперечных усилий; L_{ii}, L_{ij}, L_{i3} – моменты от моментных напряжений; Γ_{ii}, Γ_{ij} – тангенциальные деформации, Γ_{i3} – сдвиги; k_{ii}, k_{ij}, k_{i3} – изгибы-кручения срединной поверхности; $p_i^{\pm}, p_3^{\pm}, m_i^{\pm}, m_3^{\pm}$ – компоненты заданных поверхностных напряжений и моментных напряжений, которые приложены на лицевых поверхностях оболочки.

2. Соотношения неразрывности деформаций срединной поверхности оболочки для моментно-мембранной теории упругих тонких оболочек. Эти соотношения в [7] получены из условий сплошности и непрерывности: $\frac{\partial^2\vec{V}}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}=\frac{\partial^2\vec{V}}{\partial\alpha_2\partial\alpha_1}$, $\frac{\partial^2\vec{\Omega}}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}=\frac{\partial^2\vec{\Omega}}{\partial\alpha_2\partial\alpha_1}$ деформаций эквидистантной поверхности оболочки. Соотношения неразрывности деформаций срединной поверхности оболочки нами получены также на основе вариационного принципа типа Кастилиано для моментно-мембранной теории упругих тонких оболочек.

Уравнения неразрывности деформаций срединной поверхности моментно-мембранной теории упругих тонких оболочек выражаются следующим образом [7]:

$$\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial(A_i\Gamma_{ii})}{\partial\alpha_j}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial(A_j\Gamma_{ji})}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\Gamma_{ij}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Gamma_{ji}+\frac{\Gamma_{j3}}{R_i}+(-1)^j k_{i3}=0,$$

$$\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial(A_2\Gamma_{23})}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial(A_1\Gamma_{13})}{\partial\alpha_2}-\frac{\Gamma_{21}}{R_1}+\frac{\Gamma_{12}}{R_2}+k_{11}+k_{22}=0,$$

$$\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial(A_ik_{ii})}{\partial\alpha_j}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial(A_jk_{ji})}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}k_{ij}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}k_{ji}-\frac{k_{j3}}{R_i}=0,$$

$$\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial(A_2k_{23})}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial(A_1k_{13})}{\partial\alpha_2}-\frac{k_{21}}{R_1}+\frac{k_{12}}{R_2}=0,\quad i\neq j=1,2.$$

3. Статико-геометрические аналогии. Анализ представленных геометрических (2.1) и статических (1.2) соотношений моментно-мембранной теории упругих тонких оболочек позволяет установить определенное соответствие между физическими и геометрическими величинами:

$$\begin{gathered}L_{11}\leftrightarrow\Gamma_{21},\ L_{21}\leftrightarrow-\Gamma_{11},\ L_{12}\leftrightarrow\Gamma_{22},\ L_{22}\leftrightarrow-\Gamma_{12},\\ L_{13}\leftrightarrow\Gamma_{23},\ L_{23}\leftrightarrow-\Gamma_{13},\ N_{23}\leftrightarrow-k_{13},\ N_{13}\leftrightarrow k_{23},\\ S_{21}\leftrightarrow-k_{11},\ S_{12}\leftrightarrow k_{22},\ T_{11}\leftrightarrow k_{21},\ T_{22}\leftrightarrow-k_{12}.\end{gathered}\tag{3.1}$$

С помощью такой аналогии можно ввести понятие так называемых сопряженных задач для рассматриваемой модели оболочек и сформулировать комплексные уравнения этой модели.

4. Комплексное преобразование основных уравнений. Как было установлено выражениями (3.1), уравнения неразрывности и равновесия подобны и могут быть получены из других уравнений простой заменой

$$T_{11},\ T_{22},\ S_{12},\ S_{21},\ N_{13},\ N_{23},\ L_{11},\ L_{22},\ L_{12},\ L_{21},\ L_{13},\ L_{23},$$

величинами

$$k_{21},\ -k_{12},\ k_{22},\ -k_{11},\ k_{23},\ -k_{13},\ \Gamma_{21},\ -\Gamma_{12},\ \Gamma_{22},-\Gamma_{11},\ \Gamma_{23},-\Gamma_{13}.$$

Подвергнем исходные уравнения моментно-мембранной теории упругих тонких оболочек комплексному преобразованию аналогично тому, как это сделано в работах [2, 3] в рамках классической теории оболочек.

На основании установленной статико-геометрической аналогии (3.1) введем в рассмотрение комплексные усилия и моменты, обозначив их волной:

$$\begin{aligned}&\tilde{T}_{11}=T_{11}+i2Ehck_{21},\quad &&\tilde{L}_{11}=L_{11}+i2Ehc\Gamma_{21},\\ &\tilde{T}_{22}=T_{22}-i2Ehck_{12},\quad &&\tilde{L}_{22}=L_{22}-i2Ehc\Gamma_{12},\\ &\tilde{S}_{12}=S_{12}+i2Ehck_{22},\quad &&\tilde{L}_{12}=L_{12}+i2Ehc\Gamma_{22},\\ &\tilde{S}_{21}=S_{21}-i2Ehck_{11},\quad &&\tilde{L}_{21}=L_{21}-i2Ehc\Gamma_{11},\end{aligned}\tag{4.1}$$

$$\tilde{N}_{13} = N_{13} + i2Ehck_{23}, \qquad \tilde{L}_{13} = L_{13} + i2Ehc\Gamma_{23},$$
$$\tilde{N}_{23} = N_{23} - i2Ehck_{13}, \qquad \tilde{L}_{23} = L_{23} - i2Ehc\Gamma_{13},$$
где $i = \sqrt{-1}$, $c = h\sqrt{1-\nu^2}$.

Очевидно при этом

$$\begin{aligned}&\left\{T_{11}, T_{22}, S_{12}, S_{21}, N_{13}, N_{23}, L_{11}, L_{22}, L_{12}, L_{21}, L_{13}, L_{23}\right\} = \\ &\mathrm{Re}\left\{\tilde{T}_{11}, \tilde{T}_{22}, \tilde{S}_{12}, \tilde{S}_{21}, \tilde{N}_{13}, \tilde{N}_{23}, \tilde{L}_{11}, \tilde{L}_{22}, \tilde{L}_{12}, \tilde{L}_{21}, \tilde{L}_{13}, \tilde{L}_{23}\right\}.\end{aligned} \tag{4.2}$$

Умножив каждое из уравнений неразрывности (2.1) на $-2iEhc$ и сложив их с уравнениями равновесия (1.2), получим, что на основе (4.1) системы уравнений равновесия (1.2) и неразрывности (2.1) можно заменить одной системой уравнений в комплексных усилиях и моментах:

$$\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_2\tilde{T}_{11}\right)}{\partial\alpha_1} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_1\tilde{S}_{21}\right)}{\partial\alpha_2} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\tilde{S}_{12} - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\tilde{T}_{22} + \frac{\tilde{N}_{13}}{R_1} = -\left(p_1^+ - p_1^-\right),$$

$$\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_2\tilde{S}_{12}\right)}{\partial\alpha_1} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_1\tilde{T}_{22}\right)}{\partial\alpha_2} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\tilde{S}_{21} - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\tilde{T}_{11} + \frac{\tilde{N}_{23}}{R_2} = -\left(p_2^+ - p_2^-\right),$$

$$\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_2\tilde{N}_{13}\right)}{\partial\alpha_1} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_1\tilde{N}_{23}\right)}{\partial\alpha_2} - \frac{\tilde{T}_{11}}{R_1} - \frac{\tilde{T}_{22}}{R_2} = -\left(p_3^+ - p_3^-\right),$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_2\tilde{L}_{11}\right)}{\partial\alpha_1} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_1\tilde{L}_{21}\right)}{\partial\alpha_2} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\tilde{L}_{12} - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\tilde{L}_{22} + \frac{\tilde{L}_{13}}{R_1} + \tilde{N}_{23} = \\ &= -\left(m_1^+ - m_1^-\right) + h\left(p_2^+ + p_2^-\right),\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_2\tilde{L}_{12}\right)}{\partial\alpha_1} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_1\tilde{L}_{22}\right)}{\partial\alpha_2} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\tilde{L}_{21} - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\tilde{L}_{11} + \frac{\tilde{L}_{23}}{R_2} - \tilde{N}_{13} = \\ &= -\left(m_2^+ - m_2^-\right) - h\left(p_1^+ + p_1^-\right),\end{aligned}$$

$$\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_2\tilde{L}_{13}\right)}{\partial\alpha_1} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_1\tilde{L}_{23}\right)}{\partial\alpha_2} - \frac{\tilde{L}_{11}}{R_1} - \frac{\tilde{L}_{22}}{R_2} + \left(\tilde{S}_{12} - \tilde{S}_{21}\right) = -\left(m_3^+ - m_3^-\right).$$

Полученная система (4.3), по виду совпадающая с обычными уравнениями равновесия (1.2), может быть положена в основу исследования задач моментно-мембранной теории упругих тонких оболочек. Ее главным достоинством, как и достоинством комплексного метода в целом, является сокращение вдвое порядка разрешающих уравнений.

Ширакский государственный университет им. М. Налбандяна
e-mail: s_sargsyan@yahoo.com

Член-корреспондент НАН РА С. О. Саркисян

Статико-геометрическая аналогия и введение комплексного преобразования в моментно-мембранную теорию упругих тонких оболочек

Установлена статико-геометрическая аналогия для моментно-мембранной теории упругих тонких оболочек, исходя из которой основные уравнения этой теории записаны через комплексные неизвестные, попарно составленные из величин-аналогов.

ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ս. Հ. Սարգսյան

Առաձգական բարակ թաղանթների մոմենտամեմբրանային տեսության ստատիկաերկրաչափական անալոգիան և կոմպլեքս ձևափոխությունների իրականացումը

Առաձգական բարակ թաղանթների մոմենտամեմբրանային տեսության համար հաստատվում են ստատիկաերկրաչափական անալոգիաները, և նրանց հիման վրա այս տեսության հիմնական հավասարումները ներկայացվում են կոմպլեքս անհայտների միջոցով, որոնք կազմվում են անալոգ-մեծությունների օգնությամբ:

Corresponding member of NAS RA S. H. Sargsyan

Static-Geometric Analogy and the Introduction of a Complex Transformation in the Moment-Membrane Theory of Elastic Thin Shells

In the present work a static-geometric analogy is established for the moment-membrane theory of elastic thin shells, on the basis of which the basic equations of this theory are written in terms of complex unknowns, composed of pairs of analog-values.

Литература

1. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М. ГИТТЛ. 1953. 544 с.
2. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. Л. ГИСУ. 1951. 344 с.
3. *Новожилов В. В.* В кн.: Труды IV Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Ереван, 24-31 октября 1962 г. Ереван. Изд-во АН АрмССР. 1963. С. 107-115.
4. *Пелех Б. Л.* Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев. Наукова думка. 1973. 248 с.
5. *Подстригач Я. С., Швец Р. Н.* Термоупругость тонких оболочек. Киев. Наукова думка.1978. 344 с.
6. *Саркисян С. О.* – Физическая мезомеханика. 2020. Т. 23. № 4. С. 13-19.
7. *Саркисян С. О.* – Изв. НАН Армении. Механика. 2020. Т. 73. № 4. С. 48-57.
8. *Саркисян С. О.* – Изв. НАН Армении. Механика. 2021. Т. 74. № 1. С. 58-68.
9. *Nowacki W.* Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford. New York. Toronto. Sydney. Paris. Frankfurt. Pergamon Press. 1986. 383 p.