ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 121 2021 № 2

**МЕХАНИКА**

УДК 539.3

**Член-корреспондент НАН РА С. М. Мхитарян[1, 2], А. В. Гаспарян[1], А. С. Саргсян[1]**

# О точном решении интегрального уравнения одной контактной задачи математической теории упругости

(Представлено 25/V 2021)

**Ключевые слова**: *упругий слой, антиплоская деформация, стрингер, контактная задача, интегральное уравнение.*

**Введение**. Методы интегральных преобразований и интегральных уравнений (ИУ) в сочетании с методами ортогональных функций и ортогональных многочленов в последние десятилетия широко применяются в исследованиях по контактным и смешанным задачам математической теории упругости, механике разрушения, геомеханике, гидродинамике и других отраслях механики сплошной среды и математической физики. Эти методы позволяют построить эффективные решения определяющих ИУ и аналитически в явном виде определить важные характеристики исследуемых физических задач, а также построить точные (замкнутые) решения ИУ которые дают возможность оценивать ошибки приближенных методов и провести их сравнительный анализ. Указанные методы и многие результаты, полученные на их основании, освещены в [1-10].

В настоящей статье рассматривается контактная задача о взаимодействии стрингера конечной длины с упругим слоем, нижняя граница которого жестко защемлена, в условиях антиплоской деформации. В постановке задачи, когда стрингер деформируется в режиме предварительно заданных упругих перемещений, решение при помощи интегрального преобразования Фурье сводится к решению ИУ Фредгольма первого рода с симметрическим разностным логарифмическим ядром, содержащим гиперболический котангенс. Точное решение этого ИУ построено на основании спектральных соотношений в многочленах Чебышева с аргументом неполного эллиптического интеграла первого рода, полученного в [11]. Рассмотрен частный случай.

**Постановка задачи и вывод определяющего ИУ**. Пусть к правой прямоугольной системе координат $Oxyz$ упругий слой $\Omega = \{-\infty < x, z < \infty,$

$-H \le y \le 0\}$ высоты $H$ и модуля сдвига $G$ на своей верхней грани $y=0$ усилен ленточным в направлении оси $Oz$ стрингером $\omega = \{-a \le x \le a;$ $y=0;\ -\infty < z < \infty\}$ ширины $2a$, высоты $h$ и модуля сдвига $G_0$, а его нижняя грань $y=-H$ жестко защемлена. Верхняя грань $y=h$ стрингера $\omega$ в направлении оси $Oz$ нагружена касательными силами интенсивности $\tau_+(x)\ (-a < x < a)$, не зависящими от координаты $z$, а на кромках $x=\pm a$ стрингера вдоль линии $y=h/2$ действуют сосредоточенные силы величин $T_\pm$ соответственно, также не зависящие от координаты $z$. Предполагается, что под действием указанных касательных сил система стрингер – слой будет находиться в условиях антиполоской деформации (продольного сдвига) в направлении оси $Oz$ с базовой плоскостью $Oxy$.

В отличие от традиционной постановки задач о передаче нагрузок от стрингеров к массивным деформируемым телам [9,12], когда при заданной нагрузке на стрингер требуется определить касательные напряжения $\tau_{yz}\big|_{y=-0} = \tau_-(x)\quad (-a < x < a)$ под стрингером и осевые напряжения в его сечениях, здесь принята другая постановка. А именно, считается, что предварительно задан режим упругих перемещений точек стрингера в направлении оси $Oz$ $\quad u_z^{(0)}(x,0) = f(x)\quad (-a \le x \le a)$, где $f(x)$ – заданная на отрезке $[-a,a]$ непрерывная со своим производным до второго порядка включительно функция, т.е. $f(x) \in C_2[-a,a]$. Требуется определить касательные контактные напряжения $\tau_{yz}\big|_{y=-0} = \tau_-(x)\ (-a < x < a)$, касательные силы $\tau_+(x)$ на верхней грани стрингера $y=h$, а также сосредоточенные силы $T_\pm$ на его кромках $x=\pm a$ и осевые напряжения в сечениях стрингера, обеспечивающие заданный режим упругих перемещений.

Приступая к выводу ИУ поставленной задачи, обозначим через $u_z(x,y)$ единственную отличную от нуля компоненту упругих перемещений точек упругого слоя $\Omega$ в направлении оси $Oz$, которая в базовой полосе $\omega_0 = \{-\infty < x < \infty;\ -H \le y \le 0\}$ плоскости $Oxy$ является гармонической функцией. Для этой функции в области $\omega_0$ рассмотрим следующую вспомогательную граничную задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = 0 \quad (-\infty < x < \infty,\ -H < y < 0) \\ \tau_{yz}\Big|_{y=-0} = G\dfrac{\partial u_z}{\partial y}\Big|_{y=-0} = T(x) \qquad u_z(x,y)\big|_{y=-H+0} = 0 \quad (-\infty < x < \infty) \end{cases} \tag{1}$$

где $\tau_{yz}$ – компонента касательных напряжений, а $T(x)$ – заданная функция. Решение граничной задачи (1) построим методом интегрального преобразования Фурье, вводя в рассмотрение трансформанты Фурье

$$\left\{\overline{u}_z(\lambda,y);\overline{T}(\lambda)\right\}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{u_z(x,y);T(x)\right\}e^{i\lambda x}dx,$$

где $\lambda$ – спектральный параметр Фурье. В трансформантах Фурье двухмерная граничная задача (1) перейдет в следующую одномерную граничную задачу:

$$\begin{cases}\dfrac{d^2\overline{u}_z}{dy^2}-\lambda^2\overline{u}_z=0 \quad (-H<y<0)\\ G\dfrac{d\overline{u}_z}{dy}\bigg|_{y=-0}=T(\lambda); \quad \overline{u}_z(\lambda,y)\big|_{y=-H+0}=0.\end{cases} \tag{2}$$

Решение граничной задачи (2) представляется формулой

$$\overline{u}_z(\lambda,y)=\frac{T(\lambda)}{\lambda Gch(\lambda H)}sh(\lambda(y+H)) \quad (-H\le y\le 0)..$$

По формуле обратного преобразования Фурье

$$u_z(x,y)=\frac{1}{2\pi G}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{sh(\lambda(y+H))}{\lambda ch(\lambda H)}\overline{T}(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda=\frac{1}{2\pi G}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{sh(\lambda(y+H))}{\lambda ch(\lambda H)}e^{-i\lambda x}d\lambda\int\limits_{-\infty}^{\infty}T(s)e^{i\lambda s}ds=$$

$$=\frac{1}{\pi G}\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(|x-s|,y)T(s)ds \quad (-\infty<x<\infty;\ -H\le y\le 0)$$

$$K(|x|,y)=\int\limits_{0}^{\infty}\frac{sh(\lambda(y+H))}{\lambda ch(\lambda H)}cos(\lambda x)d\lambda.$$

Отсюда, в частности, полагая $y=0;\ T(x)=\begin{cases}\tau_-(x) & (-a\le x\le a)\\ 0 & (x>a)\end{cases}$, получим

$$u_z(x,-0)=\frac{1}{\pi G}\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(|x-s|,0)T(s)ds=\frac{1}{\pi G}\int\limits_{-a}^{a}\tau_-(s)ds\int\limits_{0}^{\infty}\frac{th(\lambda H)}{\lambda}cos(\lambda(x-s))d\lambda.$$

Следовательно,

$$u_z(x,-0)=\frac{1}{\pi G}\int\limits_{-a}^{a}lncth\left|\frac{\pi(x-s)}{4H}\right|\tau_-(s)ds, \tag{3}$$

где использована известная формула для косинус-интеграла Фурье из [13] (с. 530, ф-ла 4.116.2).

При помощи (3) реализуем граничное условие поставленной задачи $u_z(x,-0)=u_z^{(0)}(x,0)=f(x)\quad (-a\le x\le a)$. В результате придем к определяющему ИУ Фредгольма первого рода с симметрическим разностным ядром

$$\frac{1}{\pi G}\int_{-a}^{a} lncth\left|\frac{\pi(x-s)}{4H}\right|\tau_-(s)ds = f(x), \qquad (4)$$

откуда определяются касательные контактные напряжения $\tau_-(x)$ $(\text{-}a < x < a)$.

Обратимся далее к рассмотрению деформации стрингера. В рамках модели Мелана [12] дифференциальное уравнение его деформирования имеет вид [14]

$$G_0 h\frac{d^2u_z^{(0)}}{dx^2} = \tau_+(x) - \tau_-(x) \quad (\text{-}a < x < a). \qquad (5)$$

После того как решено ИУ (4) и, следовательно, определена функция $\tau_-(x)$, из (5) находим

$$\tau_+(x) = \tau_-(x) + G_0 hf''(x) \quad (\text{-}a < x < a). \qquad (6)$$

Определим также силовые факторы $T_\pm$. Предполагая, что касательные напряжения $\tau_{xz}$ в сечении $x$ по высоте стрингера равномерно распределены, имеем $S(x) = \tau_{xz}h$, где $S(x)$ – результирующее касательное усилие в сечении $x$. Так как $\tau_{xz} = G_0\frac{du_z^{(0)}}{dx}$ и, следовательно, $S(x) = G_0 h\frac{du_z^{(0)}}{dx}$, то согласно (5) $S(x)$ определяется из граничной задачи

$$\frac{dS}{dx} = \tau_+(x) - \tau_-(x) \quad S(\pm a) = T_\pm, \qquad (7)$$

причем $S(x)$ однозначно определяется из (7) только одним граничным условием, а другое граничное условие дает условие равновесия стрингера. Действительно, из (7)

$$S(x) = \int_{-a}^{x}\left[\tau_+(s) - \tau_-(s)\right]ds + T_- \quad (-a \le x \le a). \qquad (8)$$

Отсюда $S(a) = T_+ = \int_{-a}^{a}\left[\tau_+(s) - \tau_-(s)\right]ds + T_-$, и, следовательно, условие равновесия стрингера имеет вид

$$\int_{-a}^{a}\tau_-(s)ds = Q_-; \quad Q_- = T_- - T_+ + Q_+; \quad Q_+ = \int_{-a}^{a}\tau_+(s)ds. \qquad (9)$$

Очевидно, что вместо (8) можем записать

$$S(x)=\frac{1}{2}\left\{\int_{-a}^{a} sgn(x-s)\left[\tau_+(s)-\tau_-(s)\right]ds+T_+ +T_-\right\}\quad (-a\le x\le a).$$

Так как $S(x)=G_0h\frac{du_z^{(0)}}{dx}$, то сразу находим

$$T_\pm = G_0hf'(\pm a). \tag{10}$$

Таким образом, после решения определяющего ИУ (4) действующие на стрингер силы будут определяться по формулам (6) и (10).

Далее в (4) и (9) введем безразмерные величины, полагая

$$\xi=x/a;\ \ \eta=s/a;\ \ \alpha=\pi a/H;\ \ \tau(\xi)=\tau(a\xi)/G;\ \ g(\xi)=f(a\xi)/a;\ \ Q=Q_-/aG\ .$$

В результате ИУ (4) перейдет в следующее ИУ:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} ln\left|cth\left(\frac{\xi-\eta}{4}\right)\right|\tau(\eta)d\eta=g(\xi)\quad(-\alpha<\xi<\alpha), \tag{11}$$

а условие (9) – в следующее условие:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\tau(\eta)d\eta=Q. \tag{12}$$

**Решение определяющего ИУ(11)-(12)** в квадратурах ранее было получено М. Г. Крейном [15, 16] методом, основанным на идеях обратных задач спектральной теории дифференциальных операторов и порождённых ими формулах обобщенного преобразования Фурье. Наряду с этим в приложениях для использования часто проще решение в виде быстро сходящегося ряда. С этой целью здесь решение ИУ (11)-(12) представляется в форме бесконечного ряда по многочленам Чебышева первого рода с видоизменённым аргументом.

Предварительно преобразуем ядро ИУ (11)

$$ln\left|cth\left(\frac{\xi-\eta}{4}\right)\right|=ln\left|\frac{ch\left(\frac{\xi-\eta}{4}\right)}{sh\left(\frac{\xi-\eta}{4}\right)}\right|=ln\left|\frac{e^{\frac{\xi-\eta}{4}}+e^{-\frac{\xi-\eta}{4}}}{e^{\frac{\xi-\eta}{4}}-e^{-\frac{\xi-\eta}{4}}}\right|=ln\left|\frac{e^{-\frac{\xi+\eta}{4}}\left(e^{\frac{\xi}{2}}+e^{\frac{\eta}{2}}\right)}{e^{-\frac{\xi+\eta}{4}}\left(e^{\frac{\xi}{2}}-e^{\frac{\eta}{2}}\right)}\right|=ln\frac{e^{\frac{\xi}{2}}+e^{\frac{\eta}{2}}}{\left|e^{\frac{\xi}{2}}-e^{\frac{\eta}{2}}\right|}.$$

В результате ИУ преобразуется к виду

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} ln\frac{e^{\frac{\xi}{2}}+e^{\frac{\eta}{2}}}{\left|e^{\frac{\xi}{2}}-e^{\frac{\eta}{2}}\right|}\tau(\eta)d\eta=g(\xi).$$

Далее положим

$$t=e^{\xi/2};\ \ u=e^{\eta/2};\ \ \ c=e^{\alpha/2};\ \ \tau_0(u)=\frac{2}{u}\tau\left(2lnu\right);\ \ g_0(t)=g\left(2lnt\right);\ Q=Q_0.$$

Тогда исходное ИУ (11) примет вид

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{c^{-1}}^{c} ln\frac{t+u}{|t-u|}\tau_0(u)du=g_0(t)\quad \left(c^{-1}<t<c\right), \tag{13}$$

а условие (12) – вид

$$\int\limits_{c^{-1}}^{c}\tau_0(u)du=Q_0. \tag{14}$$

Для решения ИУ (13)-(14) воспользуемся спектральными соотно-шениями [11]

$$\begin{gathered}\frac{1}{\pi}\int\limits_{b}^{a} ln\frac{t+u}{|t-u|}\frac{T_n(Y)du}{\sqrt{\left(a^2-u^2\right)\left(u^2-b^2\right)}}=\lambda nT_n(X)\quad \left(n=0,1,2,...\right)\\ X=cos\theta,\ \theta=\frac{\pi}{K'}\int\limits_{1}^{t/b}\frac{ds}{\sqrt{\left(s^2-1\right)\left(1-s^2k^2\right)}};\ Y=cos\varphi,\ \varphi=\frac{\pi}{K'}\int\limits_{1}^{u/b}\frac{ds}{\sqrt{\left(s^2-1\right)\left(1-s^2k^2\right)}};\\ \lambda_n=\left(\pi an\right)^{-1}K'\left(\pi nK\big/K'\right)\ \left(n=1,2,...\right);\ \ \lambda_0=K/a;\ \ k=\frac{b}{a}.\end{gathered} \tag{15}$$

Здесь $T_n(X)$ –многочлен Чебышева первого рода, $K=K(k)$ – пол-ный эллиптический интеграл первого рода модуля $k$, а $K'=K(k')$, где $k'=\sqrt{1-k^2}$. Отметим, что $\theta$ и $\varphi$ можно выразить через неполный эллиптический интеграл первого рода. Действительно, так как заменой переменных $t=at_1$, $u=au_1$ интервал $\left(b,a\right)$ преобразуется в интервал $\left(k,1\right)$, то во всех формулах (15) можем считать $b=k$, $a=1$. Тогда, например, в выражении $\theta$, где $b=k$, перейдем к новой переменной $\tau=1/t$. Будем иметь

$$\theta=\frac{\pi}{K'}\int\limits_{t/k}^{1}\frac{d\tau}{\sqrt{\left(1-\tau^2\right)\left(\tau^2-k^2\right)}}.$$

Далее воспользуемся выражением этого интеграла из ([13], с. 260, ф-ла 10). В итоге

$$\theta=\frac{\pi}{K'}F\left(arcsin\left(\frac{\sqrt{t^2-k^2}}{tk'}\right),k'\right), \tag{16}$$

где $F(\alpha,k)$ – неполный эллиптический интеграл первого рода ([13], с. 918, ф-ла 8.111.2). Теперь решение ИУ (13) представим в форме бесконечного ряда

$$\tau_0(t)=\frac{1}{\sqrt{\left(c^2-t^2\right)\left(t^2-c^{-2}\right)}}\sum_{n=0}^{\infty}x_nT_n(X)\quad\left(c^{-1}<t<c\right)\tag{17}$$

с неизвестными коэффициентами $x_n$, причем в соответствии с (13) во всех формулах (15) и (16) положим $b=c^{-1}=e^{-\alpha/2}$; $a=c=e^{\alpha/2}$; $k=e^{-\alpha}$; $k'=\sqrt{1-e^{-2\alpha}}$. Подставляя (17) в первую часть ИУ(13) и в условие (14), а затем меняя порядок интегрирования и суммирования, на основании (15) получим

$$\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_nx_nT_n(X)=g_0(t)\quad\left(c^{-1}<t<c\right);\qquad\sum_{n=0}^{\infty}x_n\int_{c^{-1}}^{c}\frac{T_n(X)\,dt}{\sqrt{\left(c^2-t^2\right)\left(t^2-c^{-2}\right)}}=Q_0.\tag{18}$$

Для определения коэффициентов $x_n$ воспользуемся условиями ортогональности многочленов $T_n(X)$

$$\int_{c^{-1}}^{c}T_m(X)T_n(X)\frac{dt}{\sqrt{\left(c^2-t^2\right)\left(t^2-c^{-2}\right)}}=\begin{cases}K'/c & (m=n=0);\\ K'/2c & (m=n\neq 0);\\ 0 & (m\neq n);\end{cases}$$

которые легко получим из соответствующих условий для обычных многочленов Чебышева. В итоге из (18) находим

$$x_n=2cG_n/\lambda_nK'\quad(n=0,1,2,...);\qquad G_n=\int_{c^{-1}}^{c}\frac{g_0(t)T_n(X)\,dt}{\sqrt{\left(c^2-t^2\right)\left(t^2-c^{-2}\right)}};\qquad x_0=cQ_0/K'.\tag{19}$$

Рассмотрим частный случай абсолютно жёсткого стрингера, когда только в центре его верхней грани действует направленная по оси $Oz$ сосредоточенная сила $T_+$. Пусть $\Delta$ – жесткое смещение стрингера по оси $Oz$. Тогда $Q_-=T_+,$ $Q=Q_0=T_+/aG$, $f(x)=\Delta=const$ и, следовательно, $g_0(t)=\Delta_0$ $\left(\Delta_0=\Delta/a\right)$. В этом случае из (19) имеем

$$x_0=\frac{2c^2G_0}{KK'};\quad G_0=\frac{KQ_0}{2c};\quad x_0=\frac{cQ_0}{K'},$$

откуда вытекает, что между безразмерным жестким смещением $\Delta_0$ и действующей на стрингер безразмерной силой $Q_0$ существует зависимость

$$\Delta_0=\frac{K}{2K'}Q_0.$$

В заключение отметим, что спектральные соотношения, полученные их дифференцированием, позволяют построить точные решения ряда задач механики трещин, описываемых гиперсингулярными интегральными уравнениями [17, 18].

[1] Институт механики НАН РА
[2] Национальный университет архитектуры и строительства Армении
e-mail: smkhitaryan39@rambler.ru

**Член-корреспондент НАН РА С. М. Мхитарян,**
**А. В. Гаспарян, А. С. Саргсян**

**О точном решении интегрального уравнения одной контактной задачи математической теории упругости**

Рассматривается задача о контактном взаимодействии стрингера конечной длины с упругим слоем, нижняя граница которого жестко защемлена, при антиплоской деформации. Для стрингера принята модель Мелана в случае антиплоской деформации, описываемая простейшим дифференциальным уравнением второго порядка. В отличие от традиционной постановки задач о передаче нагрузок от стрингеров к массивным деформируемым телам принята другая постановка задачи, когда предварительно задаются упругие перемещения точек стрингера, а затем определяются действующие на стрингер силовые факторы, обеспечивающие заданный режим упругих перемещений. В такой постановке решение задачи сведено к решению ИУ Фредгольма первого рода с симметрическим разностным от гиперболического котангенса логарифмическим ядром. Точное решение этого уравнения построено при помощи спектральных соотношений, содержащих многочлены Чебышева первого рода с аргументом в виде неполной эллиптической функции первого рода. Рассмотрен частный случай абсолютно жесткого стрингера и установлена зависимость между жестким перемещением стрингера и действующей на его центре осевой сосредоточенной силой.

ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ս. Մ. Մխիթարյան,
Ա. Վ. Գասպարյան, Ա. Ս. Սարգսյան

**Առաձգականության մաթեմատիկական տեսության մի կոնտակտային խնդրի ինտեգրալ հավասարման ճշգրիտ լուծման մասին**

Հակահարթ դեֆորմացիայի պայմաններում դիտարկվում է ստորին նիստը կոշտ ամրակցված տարածական շերտի և վերջավոր երկարության վերադիրի կոնտակտային փոխազդեցության խնդիրը: Վերադիրի համար ընդունված է հակահարթ դեֆորմացիայի ժամանակ Մելանի մոդելը, որը նկարագրվում է երկրորդ կարգի պարզագույն դիֆերենցիալ հավասարումով: Այստեղ, ի տարբերություն վերադիրներից դեֆորմացող հոծ մարմիններին ուժերի փոխանցման խնդիրների ավանդական դրվածքի, ընդունված է խնդրի ուրիշ դրվածք, երբ նախապես տրվում են վերադիրի կետերի առաձգական տեղափոխությունները, իսկ այնուհետև որոշվում են տեղափոխությունների տրված ռեժիմն ապահովող վերադիրի վրա ազդող ուժային գործոնները: Այս-

պիսի դրվածքով խնդրի լուծումը բերվել է արգումենտների տարբերությունից կախված և հիպերբոլական կոտանգենս պարունակող սիմետրիկ լոգարիթմական կորիզով Ֆրեդհոլմի առաջին սեռի ինտեգրալ հավասարման լուծման: Այս հավասարման ճշգրիտ լուծումը կառուցված է առաջին սեռի ոչ լրիվ էլիպտական ֆունկցիան արգումենտ ունեցող, Չեբիշևի առաջին սեռի բազմանդամներ պարունակող սպեկտրալ առնչությունների օգնությամբ: Դիտարկվել է բացարձակ կոշտ վերադիրի մասնավոր դեպքը, և ստացված է առնչություն վերադիրի կոշտ տեղափոխության և վերադիրի կենտրոնում կիրառված առանցքային կենտրոնացված ուժի միջև:

**Corresponding member of NAS RA S. M. Mkhitaryan,**
**A. V. Gasparyan, A. S. Sargsyan**

## On the Precise Solution of Integral Equation of One Contact Problem of the Mathematical Theory of Elasticity

The paper is devoted to the consideration of the problem on contact interaction between a finite length stringer and an elastic layer with a rigidly fastened lower boundary under anti-plain deformation. For the stringer, Melan's model for anti-plain deformation is accepted, which can be described by simplest second order differential equation. Here, as opposed to the traditional formulation of problems on load transmission from stringers to deformable massive solids, the authors adopted a different formulation of the problem, where elastic displacements of the stringer points are given in advance, whereas force factors acting on the stringer and stipulating the given pattern of elastic displacements are determined afterwards. Under such formulation, solving the problem reduces to Fredholm integral equation of the first kind with a symmetrical logarithmic kernel which depends on the difference of the arguments and contains the hyperbolic cotangent. The precise solution of the equation is constructed with the help of spectral relationships, which contain Chebishev polynomials of the first kind with the argument in form of incomplete elliptic function of the first kind. Private case of an absolutely rigid stringer is investigated and dependence is obtained between the rigid displacement of the stringer and axial concentrated force applied at its center.

## Литература

1. Развитие теории контактных задач в СССР. М. Наука. 1976. 493 с.
2. Механика контактных взаимодействий. Под ред. И. И. Воровича, В. М. Александрова. М. Физматлит. 2001. 670 с.
3. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. М. – Л. Гостехиздат. 1949. 270 с.
4. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М. Наука. 1980. 394 с.
5. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические контактные задачи теории упругости. М. Наука. 1974. 456 с.
6. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. М. Мир. 1989. 521с.
7. *Попов Г. Я.* Избранные труды. Одесса. Изд-во «ВМВ». Т. 1. 2007. 440 с.; Т. 2. 2007. 516 с.

8. *Панасюк В. В., Андрейкив А. Е., Партон В. З.* Основы механики разрушения материалов. Механика разрушения и прочность материалов. Справочное пособие в 4-х томах. Киев. Наукова думка. Т. 1. 1988. 488 с.
9. *Александров В. М., Мхитарян С. М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М. Наука. 1983. 488 с.
10. *Акопян В. Н.* Смешанные граничные задачи о взаимодействии сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. Ереван. Гитутюн. 2014. 322 с.
11. *Мхитарян С. М.* – Изв. АН АрмССР. Механика. 1982. Т. 35. № 6. С. 3-18.
12. *Melan E.* Ingr. Arch. 1932. Bd 3. No2. 123-129.
13. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М. Наука. 1971. 1108 с.
14. *Мхитарян С.М.* В сб.: Механика деформируемого твердого тела. Ереван. Изд-во НАН Армении. 1993. С. 129-143.
15. *Крейн М. Г.* – ДАН АН СССР. 1995. Т. 100. С. 413-416.
16. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. М. Наука. 1967. 508 с.
17. *Mkhitaryan S. M., Mkrtchyan M. S., Kanetsyan E. G.* – The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. 2020. V. 73. № 1. P. 51-75.
18. *Мхитарян С.М.* – Изв. вузов. Северокавказский регион. Серия: Естественные науки. 2020. № 2. С. 72-83.