

Член-корреспондент НАН РА С. О. Саркисян

Вариационный принцип типа Рейсснера моментно-мембранной теории тонких оболочек

(Представлено 15/III 2021)

Ключевые слова: *моментно-мембранная теория, тонкая оболочка, вариационный принцип типа Рейсснера.*

Введение. Известно, что исходные дифференциальные уравнения и граничные условия классической и моментной теории упругости могут быть непосредственно получены при минимизации [1-8] выражения полной потенциальной энергии системы (вариационный принцип Лагранжа) или полной дополнительной энергии деформации (вариационный принцип Кастилиано). Вариационные принципы Лагранжа и Кастилиано дают удобные методы для построения приближённых решений граничных задач об упругом равновесии тел в постановке классической или моментной теории упругости. В классической и моментной теории упругости установлены также вариационные принципы общего типа, которые стационарны, но не экстремальны. Это вариационные принципы Ху-Вашицу и Рейсснера [3, 4, 6-8], которые применяются при построении прикладных теорий упругих тонких стержней, мембран, пластин и оболочек. В [9, 10] на основе моментной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений для изучения деформаций наноматериалов построена моментно-мембранная теория оболочек, в частности пластин, при изгибе и плоского напряжённого состояния,

В данной работе для моментно-мембранной теории тонких оболочек [9,10] устанавливается вариационный принцип типа Рейсснера, на основе которого составляется вариационное уравнение и из неё естественным образом (как уравнения Эйлера) вытекают соотношения упругости, дифференциальные уравнения равновесия и граничные условия этой теории.

1. Постановка задачи. Вариационный принцип типа Рейсснера трёхмерной моментной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений. Обобщая функционал Рейсснера классической теории упругости [3], аналогичный функционал моментной теории упру-

гости с независимыми полями перемещений и вращений представим в виде

$$I = \iiint_V (\sigma_{ij} \gamma_{ij} + \mu_{ij} \chi_{ij} - W_{\sigma, \mu} - X_i v_i - c_i \omega_i) dV - \iint_{(S)_{\sigma, \mu}} (p_i^* v_i + m_i^* \omega_i) dS - \iint_{(S)_{v, \omega}} [p_i (v_i - v_i^*) + m_i (\omega_i - \omega_i^*)] dS, \quad (1.1)$$

где σ_{ij}, μ_{ij} – компоненты тензоров напряжений и моментных напряжений; γ_{ij}, χ_{ij} – компоненты тензоров деформаций и изгибов-кручений; v_i, ω_i – компоненты векторов перемещения и свободного поворота; $W_{\sigma, \mu}$ – объёмная плотность потенциальной энергии деформации, выраженной через напряжения и моментные напряжения; $p_i = \sigma_{ji} n_j, m_i = \mu_{ji} n_j$; n_i – компоненты вектора нормали к поверхности (S) тела; (V) – область тела; X_i, c_i – компоненты векторов объёмных сил и моментов; $(S)_{\sigma, \mu}$ – часть поверхности (S) , на которой заданы напряжения и моментные напряжения; $(S)_{v, \omega}$ – часть поверхности (S) , на которой заданы перемещения и поворота; $i, j = 1, 2, 3$.

Объёмная плотность потенциальной энергии деформации выражается так [8]:

$$W_{\sigma, \mu} = \frac{1}{2} [\lambda' \theta_\sigma^2 + 2\mu' (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2) + (\mu' + \alpha') (\sigma_{12}^2 + \sigma_{21}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{31}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{32}^2) + 2(\mu' - \alpha') (\sigma_{12} \sigma_{21} + \sigma_{13} \sigma_{31} + \sigma_{23} \sigma_{32}) + \beta' \theta_\mu^2 + 2\gamma' (\mu_{11}^2 + \mu_{22}^2 + \mu_{33}^2) + (\gamma' + \varepsilon') (\mu_{12}^2 + \mu_{21}^2 + \mu_{13}^2 + \mu_{31}^2 + \mu_{23}^2 + \mu_{32}^2) + 2(\gamma' - \varepsilon') (\mu_{12} \mu_{21} + \mu_{13} \mu_{31} + \mu_{23} \mu_{32})], \quad (1.2)$$

где

$$\theta_\sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}, \quad \theta_\mu = \mu_{11} + \mu_{22} + \mu_{33}, \quad \mu' = \frac{1}{4\mu}, \quad \alpha' = \frac{1}{4\alpha}, \quad \gamma' = \frac{1}{4\gamma}, \quad \varepsilon' = \frac{1}{4\varepsilon}, \quad (1.3)$$

$$\lambda' = -\frac{\lambda}{6\mu K}, \quad K = \lambda + \frac{2}{3}\mu, \quad \beta' = -\frac{\beta}{6\gamma\Omega}, \quad \Omega = \beta + \frac{2}{3}\gamma,$$

λ, μ – упругие постоянные Ламе, $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ – упругие постоянные.

На основе функционала Рейсснера (1.1) можно получить вариационное уравнение ($\delta I = 0$), из которого следуют уравнения равновесия, соотношения упругости, силовые граничные условия на $(S)_{\sigma, \mu}$ и геометрические граничные условия на $(S)_{v, \omega}$:
уравнения равновесия

$$\sigma_{ji,j} + X_i = 0, \quad \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} + \mu_{ji,j} + c_i = 0; \quad (1.4)$$

соотношения упругости

$$\begin{aligned} \gamma_{ii} &= \lambda' \theta_\sigma + 2\mu' \sigma_{ii}, \quad \gamma_{ij} = (\gamma' + \varepsilon') \mu_{ij} + (\gamma' - \varepsilon') \mu_{ji}, \\ \chi_{ii} &= \beta' \theta_\mu + 2\gamma' \mu_{ii}, \quad \chi_{ij} = (\gamma' + \varepsilon') \mu_{ij} + (\gamma' - \varepsilon') \mu_{ji}; \end{aligned} \quad (1.5)$$

граничные условия на $(S)_{\sigma,\mu}$

$$p_i = p_i^*, \quad m_i = m_i^*; \quad (1.6)$$

граничные условия на $(S)_{v,\omega}$

$$v_i = v_i^*, \quad \omega_i = \omega_i^*. \quad (1.7)$$

Отметим, что приведённые выше уравнения и соотношения моментной теории упругости изложены в декартовой системе координат x_i . Для установления функционала Рейсснера (инвариантное выражение) для моментно-мембранной теории оболочек, используем триортогональные координаты $\alpha_i, z (i=1,2)$, где α_1, α_2 – линии главных кривизн срединной поверхности оболочки ($z=0$), а прямолинейная ось z направлена по нормали к этой поверхности. Коэффициенты Ламе этой координатной системы имеют вид [11]

$$H_i = A_i \left(1 + \frac{z}{R_i} \right), \quad i=1,2, \quad H_3 = 1, \quad (1.8)$$

где A_i, R_i – коэффициенты первой квадратичной формы и главные радиусы кривизны срединной поверхности оболочки.

Представим вариационный функционал Рейсснера (1.1) для тела оболочки толщиной $2h$ с использованием системы координат $\alpha_i, z (i=1,2)$:

$$\begin{aligned} & \iint_{(S)^{-h}} \int_0^h (\sigma_{mn} \gamma_{mn} + \mu_{mn} \chi_{mn} - W_{\sigma,\mu}) H_1 H_2 d\alpha_1 d\alpha_2 dz - \\ & - \iint_{(S^+)} (q_n^+ v_n + m_n^+ \omega_n) H_1 H_2 |_{z=h} d\alpha_1 d\alpha_2 + \\ & + \iint_{(S^-)} (q_n^- v_n + m_n^- \omega_n) H_1 H_2 |_{z=-h} d\alpha_1 d\alpha_2 + \iint_{(\Sigma_1)} (\sigma_{2n}^* v_n + \mu_{2n}^* \omega_n) H_1 d\alpha_1 dz + \\ & + \iint_{(\Sigma_1')} [\sigma_{2n} (v_n - v_n^*) + \mu_{2n} (\omega_n - \omega_n^*)] H_1 d\alpha_1 dz - \iint_{(\Sigma_2)} (\sigma_{1n}^* v_n + \mu_{1n}^* \omega_n) H_2 d\alpha_2 dz - \\ & - \iint_{(\Sigma_2')} [\sigma_{1n} (v_n - v_n^*) + \mu_{1n} (\omega_n - \omega_n^*)] H_2 d\alpha_2 dz, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где $W_{\sigma,\mu}$ сохраняет свой вид (1.2). В (1.9) принято, что $X_n = 0, c_n = 0$ ($n=1,2,3$).

2. Основные гипотезы. Перемещения и повороты. Деформации и изгибы-кручения, напряжения и моментные напряжения. В основе моментно-мембраной теории оболочек лежат две гипотезы:

1) Кинематическая гипотеза—это предположение о постоянстве всех компонент вектора перемещения и вектора свободного поворота по толщине оболочки, т.е. по координате z :

$$v_i = u_i(\alpha_1, \alpha_2), \quad v_3 = w(\alpha_1, \alpha_2), \quad \omega_k = \Omega_k(\alpha_1, \alpha_2) \quad (i=1,2; k=1,2,3). \quad (2.1)$$

2) Статической гипотезой в физических соотношениях моментной теории упругости пренебрегается: σ_{33} — относительно σ_{ii} ; μ_{33} — относительно μ_{ii} ; σ_{3i} — относительно σ_{i3} ; μ_{3i} — относительно μ_{i3} ($i=1,2$).

Здесь считаем, что оболочка тонкая, т.е. $\frac{h}{R_o}$ (R_o — меньший из главных радиусов кривизны срединной поверхности оболочки) значительно меньше единицы.

Отметим, что принятые гипотезы соответствуют исходному приближению асимптотического метода интегрирования граничной задачи моментной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений [12, 13].

На основе принятых гипотез, используя геометрические и физические соотношения моментной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений [3], для деформаций, изгибов кручений, напряжений и моментных напряжений, получим:
для деформаций и изгибов-кручений

$$\begin{aligned} \gamma_{ii} &= \Gamma_{ii}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \gamma_{ij} = \Gamma_{ij}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \gamma_{i3} = \Gamma_{i3}(\alpha_1, \alpha_2), \\ \gamma_{3i} &= \Gamma_{3i}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \gamma_{33} = 0, \quad \chi_{ii} = k_{ii}(\alpha_1, \alpha_2), \\ \chi_{ij} &= k_{ij}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \chi_{i3} = k_{i3}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \chi_{3i} = 0, \quad \chi_{33} = 0, \quad (i \neq j = 1, 2), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_{ii} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_j + \frac{w}{R_i}, \quad \Gamma_{i3} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial w_i}{\partial \alpha_i} - \frac{u_i}{R_i} + (-1)^j \Omega_j, \\ \Gamma_{ij} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_i + (-1)^j \Omega_3, \quad \Gamma_{3i} = (-1)^j \Omega_j, \\ k_{ii} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \Omega_j + \frac{\Omega_3}{R_i}, \quad k_{ij} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \Omega_i, \\ k_{i3} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_3}{\partial \alpha_i} - \frac{\Omega_i}{R_i} \quad (i \neq j = 1, 2); \end{aligned} \quad (2.3)$$

для напряжений и моментных напряжений

$$\begin{aligned}
\sigma_{ii} &= \frac{E}{1-\nu^2}(\Gamma_{ii} + \nu\Gamma_{jj}), \quad \sigma_{ij} = (\mu + \alpha)\Gamma_{ij} + (\mu - \alpha)\Gamma_{ji}, \\
\sigma_{i3} &= G^*\Gamma_{i3}, \quad G^* = \frac{4\mu\alpha}{\mu + \alpha}, \\
\mu_{ii} &= \frac{2\gamma}{\beta + 2\gamma} [2(\beta + \gamma)k_{ii} + \beta k_{jj}], \quad \mu_{ij} = (\gamma + \varepsilon)k_{ij} + (\gamma - \varepsilon)k_{ji}, \\
\mu_{i3} &= Bk_{i3}, \quad B = \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

В теории оболочек вместо напряжений и моментных напряжений удобно оперировать статически эквивалентными им внутренними усилиями и моментами, отнесёнными к единице длины соответствующей координатной линии α_1, α_2 срединной поверхности. Так как по формулам (2.4)

$\sigma_{ii}, \sigma_{ij}, \sigma_{i3}, \mu_{ii}, \mu_{ij}, \mu_{i3}$ не зависят от z , имеем

$$\begin{aligned}
T_{ii} &= \int_{-h}^h \sigma_{ii} dz = 2\sigma_{ii}h, \quad S_{ij} = \int_{-h}^h \sigma_{ij} dz = 2\sigma_{ij}h, \quad N_{i3} = \int_{-h}^h \sigma_{i3} dz = 2\sigma_{i3}h, \\
L_{ii} &= \int_{-h}^h \mu_{ii} dz = 2\mu_{ii}h, \quad L_{ij} = \int_{-h}^h \mu_{ij} dz = 2\mu_{ij}h, \quad L_{i3} = \int_{-h}^h \mu_{i3} dz = 2\mu_{i3}h.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

3. Вариационный принцип типа Рейсснера моментно-мембранной теории тонких оболочек. Если принять за основу функционал Рейсснера (1.9) моментной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений, подставляя в него перемещения и повороты (2.1), деформации и изгибы-кручения (2.2), напряжения и моментные напряжения (2.4), после выполнения интегрирования по z от $-h$ до $+h$, придем к функционалу Рейсснера моментно-мембранной теории оболочек:

$$\begin{aligned}
I_0 &= \iint_{(S)} (T_{11}\Gamma_{11} + T_{22}\Gamma_{22} + S_{12}\Gamma_{12} + S_{21}\Gamma_{21} + N_{13}\Gamma_{13} + N_{23}\Gamma_{23} + L_{11}k_{11} + L_{22}k_{22} + \\
&\quad + L_{12}k_{12} + L_{21}k_{21} + L_{13}k_{11} + L_{23}k_{23} - W_0) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 - \\
&- \iint_{(S)} \{ (q_1^+ - q_1^-) \mu_1 + (q_2^+ - q_2^-) \mu_2 + (q_3^+ - q_3^-) w + [(m_1^+ - m_1^-) + h(p_2^+ + p_2^-)] \Omega_1 + \\
&\quad + [(m_2^+ - m_2^-) - h(p_1^+ + p_1^-)] \Omega_2 + (m_3^+ - m_3^-) \Omega_3 \} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\
&+ \int_{\Gamma_1^*} (S_{21}^* u_1 + T_{22}^* u_2 + N_{23}^* w + L_{21}^* \Omega_1 + L_{22}^* \Omega_2 + L_{23}^* \Omega_3) A_1 d\alpha_1 + \\
&+ \int_{\Gamma_1^*} [S_{21}^* (u_1 - u_1^*) + T_{22}^* (u_2 - u_2^*) + N_{23}^* (w - w^*) + L_{21}^* (\Omega_1 - \Omega_1^*) +
\end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}
& + L_{22}^*(\Omega_2 - \Omega_2^*) + L_{23}^*(\Omega_3 - \Omega_3^*) \Big] A_1 d\alpha_1 - \\
& - \int_{\Gamma_2'} (T_{11}^* u_1 + S_{12}^* u_2 + N_{13}^* w + L_{11}^* \Omega_1 + L_{12}^* \Omega_2 + L_{13}^* \Omega_3) A_2 d\alpha_2 - \\
& - \int_{\Gamma_2''} [T_{11}^* (u_1 - u_1^*) + S_{12}^* (u_2 - u_2^*) + N_{13}^* (w - w^*) + L_{11}^* (\Omega_1 - \Omega_1^*) + \\
& + L_{12}^* (\Omega_2 - \Omega_2^*) + L_{13}^* (\Omega_3 - \Omega_3^*)] A_2 d\alpha_2,
\end{aligned}$$

где W_0 – поверхностная плотность потенциальной энергии деформации оболочки

$$\begin{aligned}
W_0 = & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2h} [\lambda'(T_{11} + T_{22})^2 + 2\mu'(T_{11}^2 + T_{22}^2) + \\
& + (\mu' + \alpha')(S_{12}^2 + S_{21}^2 + N_{13}^2 + N_{23}^2) + \\
& + 2(\mu' - \alpha')S_{12}S_{21} + \beta'(L_{11} + L_{22})^2 + 2\gamma'(L_{11}^2 + L_{22}^2) + \\
& + (\gamma' + \varepsilon')(L_{12}^2 + L_{21}^2 + L_{13}^2 + L_{23}^2) + 2(\gamma' - \varepsilon')L_{12}L_{21}]
\end{aligned} \quad (3.2)$$

На основе функционала Рейсснера можно получить вариационное уравнение, варьируя (3.1) по всем 18 функциональным аргументам: $\delta u_1, \delta u_2, \delta w, \delta \Omega_1, \delta \Omega_2, \delta \Omega_3, \delta T_{11}, \delta T_{22}, \delta S_{12}, \delta S_{21}, \delta N_{13}, \delta N_{23}, \delta L_{11}, \delta L_{22}, \delta L_{12}, \delta L_{21}, \delta L_{13}, \delta L_{23}$, и утверждать, что равенство $\delta I_0 = 0$ справедливо лишь при условии равенства нулю коэффициентов при этих вариациях. Приравнявая нулю выражения в скобках при вариациях $\delta u_1, \dots, \delta L_{23}$, получим физические соотношения упругости и уравнения равновесия моментно-мембранной теории оболочек во всех точках срединной поверхности (S), а также граничные условия, справедливые на Γ_1' и Γ_1'' ; Γ_2' и Γ_2'' :
физические соотношения упругости

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ii} = & \frac{1}{2h} \frac{1}{E} (T_{ii} - \nu T_{jj}), \Gamma_{ij} = -\frac{1}{2h} \left(\frac{\mu + \alpha}{4\mu\alpha} S_{ij} - \frac{\mu - \alpha}{4\mu\alpha} S_{ji} \right), \\
\Gamma_{i3} = & \frac{1}{2G^*h} N_{i3}, G^* = \frac{4\mu\alpha}{\mu + \alpha}, \\
k_{ii} = & \frac{1}{2h} \frac{1}{2\gamma(3\beta + 2\gamma)} [2(\beta + \gamma)L_{ii} - \beta L_{jj}], k_{ij} = \frac{1}{2h} \left(\frac{\gamma + \varepsilon}{4\gamma\varepsilon} L_{ij} - \frac{\gamma - \varepsilon}{4\gamma\varepsilon} L_{ji} \right), \\
k_{i3} = & \frac{1}{2Bh} L_{i3}, B = \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon};
\end{aligned} \quad (3.3)$$

дифференциальные уравнения равновесия

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial(A_j T_{ii})}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial(A_i S_{ji})}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} S_{ij} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} T_{jj} + \frac{N_{i3}}{R_i} = \\
& \quad = -(p_i^+ - p_i^-), \\
& \quad \frac{T_{11}}{R_1} + \frac{T_{22}}{R_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial(A_2 N_{13})}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial(A_1 N_{23})}{\partial \alpha_2} = (p_3^+ - p_3^-), \\
& \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial(A_i L_{ii})}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial(A_i L_{ji})}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} L_{ij} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} L_{jj} + \frac{L_{i3}}{R_i} + \\
& \quad + (-1)^j N_{j3} = -(m_i^+ - m_i^-) + (-1)^j h(p_j^+ + p_j^-), \\
& \frac{L_{11}}{R_1} + \frac{L_{22}}{R_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial(A_2 L_{13})}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial(A_1 L_{23})}{\partial \alpha_2} - (S_{12} - S_{21}) = \\
& \quad = (m_3^+ - m_3^-), \quad i \neq j = 1, 2;
\end{aligned} \tag{3.4}$$

граничные условия

$$\begin{aligned}
& \text{на } \Gamma_1': S_{21} = S_{21}^*, T_{22} = T_{22}^*, N_{23} = N_{23}^*, L_{21} = L_{21}^*, L_{22} = L_{22}^*, L_{23} = L_{23}^*, \\
& \text{на } \Gamma_1'': u_1 = u_1^*, u_2 = u_2^*, w = w^*, \Omega_1 = \Omega_1^*, \Omega_2 = \Omega_2^*, \Omega_3 = \Omega_3^*, \\
& \text{на } \Gamma_2': T_{11} = T_{11}^*, S_{12} = S_{12}^*, N_{13} = N_{13}^*, L_{11} = L_{11}^*, L_{12} = L_{12}^*, L_{13} = L_{13}^*, \\
& \text{на } \Gamma_2'': u_1 = u_1^*, u_2 = u_2^*, w = w^*, \Omega_1 = \Omega_1^*, \Omega_2 = \Omega_2^*, \Omega_3 = \Omega_3^*.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Таким образом, доказана

Теорема. Вариационное уравнение $\delta I_0 = 0$ содержит в качестве (дифференциальных) уравнений Эйлера соотношения упругости и условия равновесия, а в качестве естественных граничных условий – статические (на Γ_1', Γ_2') и геометрические (на Γ_1'', Γ_2'') условия.

Ширакский государственный университет им М. Налбандяна
e-mail: s_sargsyan@yahoo.com

Член-корреспондент НАН РА С. О. Саркисян

Вариационный принцип типа Рейсснера моментно-мембранной теории тонких оболочек

На основе принятых предположений устанавливается вариационный принцип типа Рейсснера моментно-мембранной теории тонких оболочек, созданной для изучения деформаций наноматериалов. Выводятся соотношения упругости, уравнения равновесия, статические и геометрические граничные условия этой теории.

ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ս. Հ. Սարգսյան

Բարակ թաղանթների մոմենտամեմբրանային տեսության Ռեյսների տիպի վարիացիոն սկզբունքը

Կատարված ընդունելությունների հիման վրա հաստատվում է բարակ թաղանթների մոմենտամեմբրանային տեսության Ռեյսների տիպի վարիացիոն սկզբունքը նանոնյութերի դեֆորմացիաների ուսումնասիրության համար: Դուրս են բերվում այս տեսության առաձգական առընչությունները, հավասարակշռության հավասարումները, ստատիկական և երկրաչափական եզրային պայմանները:

Corresponding member of NAS RA S. H. Sargsyan

The Variation Principle of Reissner Type of Moment-Membrane Theory of Thin Shells

On the basis of the accepted assumptions, a Reissner-type variation principle of the moment-membrane theory of shells is established, to study the deformation of nanomaterials. Elastic relations, equilibrium equations, static and geometric boundary conditions of this theory are derived.

Литература

1. *Панкович П. Ф.* Теория упругости. Киев. Оборонгиз. 1939. 640 с.
2. *Лейбензон Л. С.* Курс теории упругости. М. – Л. ГИТТЛ. 1947. 464 с.
3. *Новацкий В.* Теория упругости. М. Мир. 1975. 872 с.
4. *Колтунов М. А., Васильев Ю. Н., Черных В. А.* Упругость и прочность цилиндрических тел. М. Высшая школа. 1975. 526 с.
5. *Образцов И. Ф., Булычев Л. А., Васильев В. В. и др.* Строительная механика летательных аппаратов. М. Машиностроение. 1986. 536 с.
6. *Пелех Б. Л.* Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев. Наукова думка. 1973. 247 с.
7. *Подстригач Я. С., Швец Р. Н.* Термоупругость тонких оболочек. Киев. Наукова думка. 1978. 344 с.
8. *Nowacki W.* Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford. Pergamon. 1986. 383 p.
9. *Саркисян С. О.* – Физическая мезомеханика. 2020. Т. 23. № 4. С. 13-19.
10. *Саркисян С. О.* – Доклады НАН Армении. 2020. Т. 120. № 4. С. 239-249.
11. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М. ГИТТЛ. 1953. 544 с.
12. *Саркисян С. О.* – Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72. Вып. 1. С. 129-147.
13. *Саркисян С. О.* – Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76. Вып. 2. С. 325-343.