ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 121 2021 № 1

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3

Академик Л. А. Агаловян

Об основных соотношениях обобщенной плоской деформации анизотропных тел

(Представлено 21/I 2021)

Ключевые слова: *анизотропное тело, плоская деформация, соотношения упругости.*

Введение. В известных монографиях по теории упругости анизотропного тела вопросы обобщенной плоской деформации рассмотрены для анизотропных тел**,** имеющих плоскость упругой симметрии [1, 2]. Возникает естественный вопрос – что будет, если анизотропия общая (21 постоянная упругости). В статье выведены соотношения упругости обобщенной плоской деформации, соответствующие телам, обладающим общей анизотропией. Обсужден вопрос их реализации.

1. Вывод основных соотношений обобщенной плоской деформации анизотропного тела. Для вывода этих соотношений воспользуемся соотношениями упругости трехмерной задачи:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= a_{11}\sigma_{xx} + a_{12}\sigma_{yy} + a_{13}\sigma_{zz} + a_{14}\sigma_{yz} + a_{15}\sigma_{xz} + a_{16}\sigma_{xy},\\
\varepsilon_{yy} &= a_{12}\sigma_{xx} + a_{22}\sigma_{yy} + a_{23}\sigma_{zz} + a_{24}\sigma_{yz} + a_{25}\sigma_{xz} + a_{26}\sigma_{xy},\\
\varepsilon_{zz} &= a_{13}\sigma_{xx} + a_{23}\sigma_{yy} + a_{33}\sigma_{zz} + a_{34}\sigma_{yz} + a_{35}\sigma_{xz} + a_{36}\sigma_{xy},\\
\varepsilon_{yz} &= a_{14}\sigma_{xx} + a_{24}\sigma_{yy} + a_{34}\sigma_{zz} + a_{44}\sigma_{yz} + a_{45}\sigma_{xz} + a_{46}\sigma_{xy},\\
\varepsilon_{xz} &= a_{15}\sigma_{xx} + a_{25}\sigma_{yy} + a_{35}\sigma_{zz} + a_{45}\sigma_{yz} + a_{55}\sigma_{xz} + a_{56}\sigma_{xy},\\
\varepsilon_{xy} &= a_{16}\sigma_{xx} + a_{26}\sigma_{yy} + a_{36}\sigma_{zz} + a_{46}\sigma_{yz} + a_{56}\sigma_{xz} + a_{66}\sigma_{xy},
\end{aligned} \tag{1}$$

где ε_{ij} – компоненты деформаций**,** σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, a_{ij} – постоянные упругости. ε_{ij} выражаются через компоненты u, v, w вектора перемещения по известным формулам

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y},\ \varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x},\ \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2}$$

При обобщенной плоской деформации считается, что

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w = \mathrm{const}. \tag{3}$$

Тогда из соотношений (2) следует

$$\varepsilon_{zz} \equiv 0, \quad \varepsilon_{yz} \equiv 0, \quad \varepsilon_{xz} \equiv 0. \tag{4}$$

Из соотношений (1) для $\varepsilon_{zz}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{xz}$ с учетом (4) напряжения $\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}$ можно выразить через $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ по формулам

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz} &= -\frac{1}{\Delta}\left(\alpha_{11}\sigma_{xx} + \alpha_{12}\sigma_{yy} + \alpha_{13}\sigma_{xy}\right),\\
\sigma_{yz} &= -\frac{1}{\Delta}\left(\alpha_{21}\sigma_{xx} + \alpha_{22}\sigma_{yy} + \alpha_{23}\sigma_{xy}\right),\\
\sigma_{xz} &= -\frac{1}{\Delta}\left(\alpha_{31}\sigma_{xx} + \alpha_{32}\sigma_{yy} + \alpha_{33}\sigma_{xy}\right),
\end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} &= a_{44}a_{55}\left(a_{13} - a_{15}\right) + a_{45}\left(a_{35}a_{14} - a_{45}a_{13}\right) + a_{34}\left(a_{15}a_{45} - a_{14}a_{55}\right),\\
\alpha_{12} &= a_{44}a_{55}\left(a_{23} - a_{25}\right) + a_{45}\left(a_{24}a_{35} - a_{23}a_{45}\right) + a_{34}\left(a_{25}a_{45} - a_{55}a_{24}\right),\\
\alpha_{13} &= a_{44}a_{55}\left(a_{36} - a_{56}\right) + a_{45}\left(a_{35}a_{46} - a_{45}a_{36}\right) + a_{34}\left(a_{45}a_{56} - a_{55}a_{46}\right),\\
\alpha_{21} &= a_{55}\left(a_{33}a_{14} - a_{43}a_{13}\right) + a_{35}\left(a_{15}a_{34} - a_{14}a_{35}\right) + a_{45}\left(a_{13}a_{35} - a_{33}a_{15}\right),\\
\alpha_{22} &= a_{55}\left(a_{33}a_{24} - a_{23}a_{34}\right) + a_{35}\left(a_{23}a_{45} - a_{24}a_{35}\right) + a_{25}\left(a_{34}a_{35} - a_{33}a_{45}\right),\\
\alpha_{23} &= a_{33}\left(a_{55}a_{46} - a_{45}a_{56}\right) + a_{35}\left(a_{34}a_{56} - a_{35}a_{46}\right) + a_{36}\left(a_{35}a_{45} - a_{55}a_{43}\right),\\
\alpha_{31} &= a_{34}\left(a_{13}a_{45} - a_{34}a_{15}\right) + a_{44}\left(a_{33}a_{15} - a_{13}a_{35}\right) + a_{14}\left(a_{34}a_{35} - a_{33}a_{45}\right),\\
\alpha_{32} &= a_{34}\left(a_{23}a_{45} - a_{25}a_{34}\right) + a_{35}\left(a_{24}a_{34} - a_{23}a_{44}\right) + a_{33}\left(a_{25}a_{44} - a_{24}a_{45}\right),\\
\alpha_{33} &= a_{34}\left(a_{45}a_{36} - a_{34}a_{56}\right) + a_{44}\left(a_{33}a_{56} - a_{35}a_{36}\right) + a_{46}\left(a_{34}a_{35} - a_{33}a_{45}\right).
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{34} & a_{44} & a_{45} \\ a_{35} & a_{45} & a_{55} \end{vmatrix}, \qquad \alpha_{ij} \neq \alpha_{ji}.$$

Подставив значения $\sigma_{zz}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}$, вычисленные по формуле (5), в соотношения упругости (1) для $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}$, получим

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \left[a_{11} - \frac{1}{\Delta}\left(a_{14}\alpha_{21} + a_{15}\alpha_{31} + a_{13}\alpha_{11} \right) \right]\sigma_{xx} + \\
&+ \left[a_{12} - \frac{1}{\Delta}\left(a_{13}\alpha_{12} + a_{14}\alpha_{22} + a_{15}\alpha_{32} \right) \right]\sigma_{yy} + \\
&+ \left[a_{16} - \frac{1}{\Delta}\left(a_{13}\alpha_{13} + a_{14}\alpha_{23} + a_{15}\alpha_{33} \right) \right]\sigma_{xy}, \\
\varepsilon_{yy} &= \left[a_{12} - \frac{1}{\Delta}\left(a_{23}\alpha_{11} + a_{24}\alpha_{21} + a_{25}\alpha_{31} \right) \right]\sigma_{xx} + \\
&+ \left[a_{22} - \frac{1}{\Delta}\left(a_{23}\alpha_{12} + a_{24}\alpha_{22} + a_{25}\alpha_{32} \right) \right]\sigma_{yy} + \\
&+ \left[a_{26} - \frac{1}{\Delta}\left(a_{23}\alpha_{13} + a_{24}\alpha_{23} + a_{25}\alpha_{33} \right) \right]\sigma_{xy}, \\
\varepsilon_{xy} &= \left[a_{16} - \frac{1}{\Delta}\left(a_{36}\alpha_{11} + a_{46}\alpha_{21} + a_{56}\alpha_{31} \right) \right]\sigma_{xx} + \\
&+ \left[a_{26} - \frac{1}{\Delta}\left(a_{36}\alpha_{12} + a_{46}\alpha_{22} + a_{56}\alpha_{32} \right) \right]\sigma_{yy} + \\
&+ \left[a_{66} - \frac{1}{\Delta}\left(a_{36}\alpha_{13} + a_{46}\alpha_{23} + a_{56}\alpha_{33} \right) \right]\sigma_{xy}, \\
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y},
\end{aligned}
\tag{7}
$$

С учетом того, что в плоской задаче все напряжения являются функциями от тангенциальных координат x, y, первые два уравнения равновесия трехмерной задачи упругости примут вид

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + X\left(x, y\right) = 0, \\
&\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + Y\left(x, y\right) = 0.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

где $X\left(x, y\right), Y\left(x, y\right)$ – компоненты массовых тел. Уравнения (8) с учетом соотношений упругости (7) составляют полную систему для определения напряжений $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}$ и перемещений u, v. Затем по формулам (5) определяются напряжения $\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}$. Однако третье уравнение равновесия трехмерной задачи в нашем случае принимает вид

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + Z(x, y) = 0. \tag{9}$$

Уравнение (9), как правило, не будет выполняться, если заранее задано $Z(x, y)$. Поскольку напряжения σ_{xz}, σ_{yz} уже известны, необходимо, чтобы

$$Z(x, y) = -\left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} \right). \tag{10}$$

Таким образом, можно констатировать, что при наличии общей анизотропии тело может находиться в состоянии обобщенной плоской деформации, если помимо тангенциальных нагрузок на него будет приложена также нормальная нагрузка, определяемая формулой (10).

2. Частные случаи упругой симметрии. а) ***Рассмотрим случай наличия плоскости упругой симметрии.*** Направляя ось $0Z$ нормально к этой плоскости, а две другие в нее, заключаем, что 8 постоянных упругости равны нулю [1-3]:

$$a_{14} = a_{24} = a_{34} = a_{15} = a_{25} = a_{35} = a_{46} = a_{56} = 0. \tag{11}$$

Согласно формулам (6), (11) имеем

$$\alpha_{11} = \left(a_{44} a_{55} - a_{45}^2 \right) a_{13}, \quad \alpha_{12} = \left(a_{44} a_{55} - a_{45}^2 \right) a_{23},$$

$$\alpha_{13} = \left(a_{44} a_{55} - a_{45}^2 \right) a_{23}, \quad \alpha_{21} = \alpha_{23} = \alpha_{22} = 0, \; \alpha_{31} = \alpha_{32} = \alpha_{33} = 0, \tag{12}$$

$$\Delta = a_{33} \left(a_{44} a_{55} - a_{45}^2 \right).$$

Согласно (5), (12)

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= -\frac{1}{a_{33}} \left(a_{13} \sigma_{xx} + a_{23} \sigma_{yy} + a_{36} \sigma_{xy} \right), \\ \sigma_{xz} &= 0, \sigma_{yz} = 0, \end{aligned} \tag{13}$$

а согласно (7)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \beta_{11} \sigma_{xx} + \beta_{12} \sigma_{yy} + \beta_{16} \sigma_{xy}, \\ \varepsilon_{yy} &= \beta_{12} \sigma_{xx} + \beta_{22} \sigma_{yy} + \beta_{26} \sigma_{xy}, \\ \varepsilon_{xy} &= \beta_{16} \sigma_{xx} + \beta_{26} \sigma_{yy} + \beta_{66} \sigma_{xy}, \end{aligned} \tag{14}$$

$$\beta_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i3}a_{j3}}{a_{33}}, \quad i, j = 1, 2, 6.$$

Соотношения (14) совпадают с соотношениями упругости, приводимыми С. Г. Лехницким [1]. Если тело имеет плоскость упругой симметрии, для решения обобщенной плоской задачи необходимо решить уравнения равновесия (8) при соотношениях упругости (14) и соответствующих граничных условиях.

б) Ортотропное тело (три плоскости упругой симметрии). Помимо (11) равны нулю также $a_{16} = a_{26} = a_{36} = a_{45} = 0$. Согласно (14) имеем

$$\beta_{16} = \beta_{26} = 0,\ \beta_{66} = a_{66},\ \beta_{11} = \left(a_{11}a_{33} - a_{13}^2\right)/a_{33},$$

$$\beta_{22} = \left(a_{22}a_{33} - a_{23}^2\right)/a_{33},\quad \beta_{12} = \left(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{23}\right)/a_{33}. \tag{15}$$

Соотношения упругости будут иметь вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \beta_{11}\sigma_{xx} + \beta_{12}\sigma_{yy}, \\ \varepsilon_{yy} &= \beta_{12}\sigma_{xx} + \beta_{22}\sigma_{yy}, \\ \varepsilon_{xy} &= a_{66}\sigma_{xy}. \end{aligned} \tag{16}$$

Эти же соотношения имеют место для кристаллов ромбической системы [3], а также для кристаллов кубической системы с той лишь разницей, что для последних $a_{44} = a_{55} = a_{66}$.

в) Монотропное или трансверсиально-изотропное тело (наличие плоскости изотропии). Помимо (11) имеют место

$$a_{16} = a_{26} = a_{36} = a_{45} = 0,$$

$$a_{11} = a_{22},\ a_{13} = a_{23},\ a_{44} = a_{55},\ a_{66} = 2\left(a_{11} - a_{12}\right). \tag{17}$$

Для таких тел

$$\begin{aligned} &\beta_{11} = \beta_{22} = \left(a_{11}a_{33} - a_{13}^2\right)/a_{33}, \\ &\beta_{12} = \left(a_{12}a_{33} - a_{13}^2\right)/a_{33}, \beta_{66} = a_{66} = 2\left(a_{11} - a_{12}\right). \end{aligned} \tag{18}$$

Соотношениями упругости являются

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \beta_{11}\sigma_{xx} + \beta_{12}\sigma_{yy}, \\ \varepsilon_{yy} &= \beta_{12}\sigma_{xx} + \beta_{11}\sigma_{yy}, \\ \varepsilon_{xy} &= 2\left(a_{11} - a_{12}\right)\sigma_{xy}. \end{aligned} \tag{19}$$

г) Изотропное тело. Помимо (11), (17) имеем

$$a_{12} = a_{13} = a_{23},\ a_{11} = a_{22} = a_{23},\ \mathrm{E}_1 = \mathrm{E}_2 = \mathrm{E}_3 = \mathrm{E}. \tag{20}$$

В результате

$$\beta_{11}=\beta_{22}=\frac{1-\upsilon^2}{E},\beta_{12}=-\frac{\upsilon(1+\upsilon)}{E},a_{66}=\frac{2(1+\upsilon)}{E}=\frac{1}{G}, \tag{21}$$

где E,G – модуль Юнга и сдвига, υ – коэффициент Пуассона.

Соотношениями упругости будут

$$\begin{aligned}&\varepsilon_{xx}=\frac{1-\upsilon^2}{E}\left(\sigma_{xx}-\frac{\upsilon}{1-\upsilon}\sigma_{yy}\right),\varepsilon_{yy}=\frac{1-\upsilon^2}{E}\left(\sigma_{yy}-\frac{\upsilon}{1-\upsilon}\sigma_{xx}\right),\\&\varepsilon_{xy}=\frac{1}{G}\sigma_{xy}=\frac{2(1+\upsilon)}{E}\sigma_{xy}.\end{aligned} \tag{22}$$

которые совпадают с классическими соотношениями упругости обобщенной плоской деформации изотропного тела [4].

Во всех рассмотренных частных случаях третье уравнение равновесия трехмерной задачи выполняется автоматически в силу (13), если нормальная составляющая $Z(x,y)$ объемной нагрузки отсутствует, т.е. всегда можно реализовать плоское деформированное состояние.

Институт механики НАН РА
e-mail: lagal @sci.am

Академик Л. А. Агаловян

Об основных соотношениях обобщенной плоской деформации анизотропных тел

На основе соотношений упругости пространственной задачи теории упругости анизотропного тела (21 постоянная упругости) выведены основные соотношения обобщенной плоской деформации. Установлены условия осуществления этого состояния. Показано, что в случае общей анизотропии обобщенное плоское деформированное состояние не всегда может быть реализовано, в частности, помимо того, что все нагрузки должны быть в основном тангенциальными, к телу должна быть приложена специальная нормальная нагрузка, зависящая от тангенциальных координат. Единым подходом выведены соотношения обобщенной плоской деформации для частных случаев упругой симметрии, часть которых совпадает с уже известными соотношениями.

Ակադեմիկոս Լ. Ա. Աղալովյան

Անիզոտրոպ մարմինների ընդհանրացված հարթ դեֆորմացիայի հիմնական առնչությունների մասին

Անիզոտրոպ մարմնի (առաձգականության 21 հաստատուն) տարածական խնդրի առնչություններից արտածվում են ընդհանրացված հարթ դեֆորմացիայի խնդրի հիմնական առնչությունները: Բացահայտված են այդ վիճակի իրականացման պայմանները: Ցույց է տրված, որ ընդհանուր անիզոտրոպիայի դեպքում ընդհանրացված հարթ դեֆորմացիոն վիճակը ոչ միշտ կարող է իրագործվել: Մասնավորապես, երբ բոլոր բեռները պետք է լինեն հիմնականում տանգենցիալ, մարմնին պետք է կիրառվի հատուկ տիպի նորմալ բեռ՝ կախված տանգենցիալ կոորդինատներից: Առաձգական սիմետրիայի մասնավոր դեպքերի համար միասնական մոտեցմամբ արտածված են ընդհանրացված հարթ դեֆորմացիայի առնչությունները, որոնց մի մասը համընկնում է արդեն հայտնի առնչությունների հետ:

Academician L. A. Aghalovyan

On Main Relations of Generalized Plane Deformation of Anisotropic Bodies

On the basis of the elasticity relations of the spatial problem of the elasticity theory of an anisotropic body (21 elasticity constants), the main relations of the generalized plane deformation were derived. The conditions for the implementation of this state were established. It is shown that in the case of general anisotropy, the generalized plane strained state cannot always be realized, in particular, in additiont that all loads must be mainly tangential, a special normal load must be applied to the body, which depend on the tangential coordinates. Using a unified approach, the relations of generalized plane deformation were derived for particular cases of elastic symmetry, part of which coincide with the already known relations.

Литература

1. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М. Наука. 1977. 416 с.
2. *Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Гетерс Г. А.* Сопротивление полимерных и композитных материалов. Рига. Зинанте. 1980. 572 с.
3. *Дьелесан Э., Руайе Д.* Упругие волны в твердых телах. М. Наука. 1982. 424 с.
4. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М. Наука. 1979. 560 с.