



$$\begin{aligned}
& \frac{\partial T_{11}}{\partial r} + \frac{1}{r}(T_{11} - T_{22}) + \frac{1}{r} \frac{\partial S_{21}}{\partial \theta} = -p_1, \quad \frac{\partial L_{11}}{\partial r} + \frac{1}{r}(L_{11} - L_{22}) + \frac{1}{r} \frac{\partial L_{21}}{\partial \theta} + N_{23} - N_{32} = -m_1, \\
& \frac{1}{r} \frac{\partial T_{22}}{\partial \theta} + \frac{\partial S_{ji}}{\partial r} + \frac{1}{r}(S_{12} + S_{21}) = -p_2, \quad \frac{\partial L_{12}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial L_{22}}{\partial \theta} + \frac{1}{r}(L_{12} + L_{21}) + N_{31} - N_{13} = -m_2, \\
& \quad \frac{\partial N_{13}}{\partial r} + \frac{1}{r} N_{13} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{23}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} T_{11} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} T_{22} + \\
& \quad + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} (S_{12} + S_{21}) + \frac{\partial w}{\partial r} \left[ \frac{\partial T_{11}}{\partial r} + \frac{1}{r} T_{11} + \frac{1}{2r} \frac{\partial (S_{12} + S_{21})}{\partial \theta} \right] + \\
& \quad + \frac{\partial w}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial T_{22}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} T_{11} + \frac{1}{2r} \frac{\partial (S_{12} + S_{21})}{\partial r} \right] = -p_3 \\
& \quad \frac{\partial L_{13}}{\partial r} + \frac{1}{r} L_{13} + \frac{1}{r} \frac{\partial L_{23}}{\partial \theta} + (S_{12} - S_{21}) = -m_3, \\
& N_{31} - \left( \frac{\partial M_{11}}{\partial r} + \frac{1}{r} (M_{11} - M_{22}) + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{21}}{\partial \theta} \right) = hp_1, \\
& N_{32} - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial M_{22}}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{12}}{\partial r} + \frac{1}{r} (M_{12} + M_{21}) \right) = hp_2, \\
& L_{33} - \frac{\partial \Lambda_{13}}{\partial r} - \frac{1}{r} \Lambda_{13} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Lambda_{23}}{\partial \theta} - (M_{12} - M_{21}) = hm_3; \tag{1}
\end{aligned}$$

физико-геометрические соотношения

$$\begin{aligned}
T_{11} &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} \left[ \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_1 + \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right) \right], \\
T_{22} &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_1 + \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 + \nu \left( \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right) \right], \\
S_{12} &= 2h \left[ (\mu + \alpha) \frac{\partial u_2}{\partial r} + (\mu - \alpha) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_2 \right) - 2\alpha \Omega_3 + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right], \\
S_{21} &= 2h \left[ (\mu + \alpha) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_2 \right) + (\mu - \alpha) \frac{\partial u_2}{\partial r} + 2\alpha \Omega_3 + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right], \\
N_{13} &= 2h \left[ (\mu + \alpha) \frac{\partial w}{\partial r} + (\mu - \alpha) \psi_1 + 2\alpha \Omega_2 \right], \quad M_{11} = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \left[ \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \psi_1 \right) \right], \\
N_{23} &= 2h \left[ (\mu + \alpha) \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + (\mu - \alpha) \psi_2 - 2\alpha \Omega_1 \right], \quad M_{22} = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \psi_1 + \nu \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \right], \\
N_{31} &= 2h \left[ (\mu + \alpha) \psi_1 + (\mu - \alpha) \frac{\partial w}{\partial r} - 2\alpha \Omega_2 \right], \quad N_{32} = 2h \left[ (\mu + \alpha) \psi_2 + (\mu - \alpha) \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + 2\alpha \Omega_1 \right], \\
M_{12} &= \frac{2h^3}{3} \left[ (\mu + \alpha) \frac{\partial \psi_2}{\partial r} + (\mu - \alpha) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \psi_2 \right) - 2\alpha i \right], \\
M_{21} &= \frac{2h^3}{3} \left[ (\mu + \alpha) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \psi_2 \right) + (\mu - \alpha) \frac{\partial \psi_2}{\partial r} + 2\alpha i \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{11} &= 2h \left[ (\beta + 2\gamma) \frac{\partial \Omega_1}{\partial r} + \beta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega_2}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \Omega_1 \right) + \beta t \right], \quad L_{13} = \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \frac{\partial \Omega_3}{\partial r} \\
L_{22} &= 2h \left[ (\beta + 2\gamma) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega_2}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \Omega_1 \right) + \beta \frac{\partial \Omega_1}{\partial r} - \beta t \right], \quad L_{23} = \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega_3}{\partial \theta}, \\
L_{12} &= 2h \left[ (\gamma + \varepsilon) \frac{\partial \Omega_2}{\partial r} + (\gamma - \varepsilon) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega_1}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \Omega_2 \right) \right], \quad \Lambda_{13} = \frac{2h^3}{3} \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \frac{\partial t}{\partial r}, \\
L_{21} &= 2h \left[ (\gamma + \varepsilon) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega_1}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \Omega_2 \right) + (\gamma - \varepsilon) \frac{\partial \Omega_2}{\partial r} \right], \quad \Lambda_{23} = \frac{2h^3}{3} \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial \theta}, \\
L_{33} &= 2h \left[ (\beta + 2\gamma)t + \beta \left( \frac{\partial \Omega_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega_2}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \Omega_1 \right) \right]; \quad (2)
\end{aligned}$$

граничные условия

$$\begin{aligned}
T_{11} &= T_{11}^0, \quad S_{12} = S_{12}^0, \quad M_{11} = M_{11}^0, \quad M_{12} = M_{12}^0, \\
T_{11} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{S_{12} + S_{21}}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + N_{13} &= N_{13}^0, \quad L_{11} = L_{11}^0, \quad L_{12} = L_{12}^0, \quad \Lambda_{13} = \Lambda_{13}^0. \quad (3)
\end{aligned}$$

Здесь  $u_1, u_2, w$  – перемещения точек срединной плоскости пластинки;  $\psi_1, \psi_2$  – полные углы поворота;  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  – свободные повороты первоначально нормального элемента;  $t$  – интенсивность свободного поворота вдоль оси  $z$ ;  $\Gamma_{ii}$  – деформации удлинений;  $\Gamma_{ij}, \Gamma_{ij}, \Gamma_{i3}, \Gamma_{3i}$  – деформации сдвигов;  $K_{ii}$  – изгибы срединной плоскости пластинки, обусловленные силовыми напряжениями;  $K_{ij}$  – кручения срединной плоскости пластинки, обусловленные силовыми напряжениями;  $\mathcal{K}_{ii}, \mathcal{K}_{33}$  – изгибы срединной плоскости пластинки, обусловленные моментными напряжениями;  $\mathcal{K}_{ij}$  – кручения срединной плоскости пластинки, обусловленные моментными напряжениями;  $l_{i3}$  – гиперсдвиги срединной плоскости пластинки, обусловленные моментными напряжениями;  $T_{ii}, S_{ij}, N_{i3}, N_{3i}$  – усилия,  $M_{ii}, H_{ij}, L_{ii}, L_{ij}, L_{i3}, L_{33}$  – моменты и  $\Lambda_{i3}$  – гипермоменты [4, 5].

Отметим, что из этой модели можно получить соответствующую геометрически линейную модель [4], отбросив нелинейные члены. Также можно получить геометрически нелинейную классическую модель типа Тимошенко, если принять  $\alpha = 0$ .

В случае осесимметричной задачи уравнения расщепляются на две отдельные системы уравнений: задачу изгиба и задачу кручения круглой пластинки.

Задача изгиба:

уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{dN_{13}}{dr} + \frac{1}{r}N_{13} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( rT_{11} \frac{dw}{dr} \right) &= -p_3, \quad N_{31} - \left( \frac{dM_{11}}{dr} + \frac{1}{r}(M_{11} - M_{22}) \right) = hp_1, \\ \frac{dT_{11}}{dr} + \frac{1}{r}(T_{11} - T_{22}) &= -p_1, \quad \frac{dL_{12}}{dr} + \frac{1}{r}(L_{12} + L_{21}) + N_{31} - N_{13} = -m_2; \end{aligned} \quad (4)$$

физико-геометрические соотношения

$$\begin{aligned} T_{11} &= \frac{2Eh}{1-v^2} \left[ \frac{du_1}{dr} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 + v \frac{1}{r} u_1 \right], \quad T_{22} = \frac{2Eh}{1-v^2} \left[ \frac{1}{r} u_1 + v \left( \frac{du_1}{dr} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 \right) \right], \\ M_{11} &= \frac{2Eh^3}{3(1-v^2)} \left[ \frac{d\psi_1}{dr} + v \frac{1}{r} \psi_1 \right], \quad M_{22} = \frac{2Eh^3}{3(1-v^2)} \left[ \frac{1}{r} \psi_1 + v \frac{d\psi_1}{dr} \right], \\ L_{12} &= 2h \left[ (\gamma + \varepsilon) \frac{d\Omega_2}{dr} - (\gamma - \varepsilon) \frac{1}{r} \Omega_2 \right], \quad L_{21} = 2h \left[ -(\gamma + \varepsilon) \frac{1}{r} \Omega_2 + (\gamma - \varepsilon) \frac{d\Omega_2}{dr} \right] \\ N_{13} &= 2h \left[ (\mu + \alpha) \frac{dw}{dr} + (\mu - \alpha) \psi_1 + 2\alpha\Omega_2 \right], \quad N_{31} = 2h \left[ (\mu + \alpha) \psi_1 + (\mu - \alpha) \frac{dw}{dr} - 2\alpha\Omega_2 \right]; \end{aligned} \quad (5)$$

граничные условия шарнирного опирания

$$w = 0, \quad M_{11} = 0, \quad L_{12} = 0, \quad \text{когда } r = R. \quad (6)$$

Задача кручения:

уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{dS_{12}}{dr} + \frac{1}{r}(S_{12} + S_{21}) &= -p_2, \quad \frac{dL_{13}}{dr} + \frac{1}{r}L_{13} + (S_{12} - S_{21}) = -m_3, \\ N_{32} - \left( \frac{dM_{12}}{dr} + \frac{1}{r}(M_{12} + M_{21}) \right) &= hp_2, \quad \frac{dL_{11}}{dr} + \frac{1}{r}(L_{11} - L_{22}) + N_{23} - N_{32} = -m_1, \\ L_{33} - \frac{d\Lambda_{13}}{dr} - (M_{12} - M_{21}) &= hm_3; \end{aligned} \quad (7)$$

физико-геометрические соотношения

$$\begin{aligned} M_{12} &= \frac{2h^3}{3} \left[ (\mu + \alpha) \frac{d\psi_2}{dr} - (\mu - \alpha) \frac{1}{r} \psi_2 - 2\alpha t \right], \quad N_{23} = 2h \left[ (\mu - \alpha) \psi_2 - 2\alpha\Omega_1 \right], \\ M_{21} &= \frac{2h^3}{3} \left[ -(\mu + \alpha) \frac{1}{r} \psi_2 + (\mu - \alpha) \frac{d\psi_2}{dr} + 2\alpha t \right], \quad N_{32} = 2h \left[ (\mu + \alpha) \psi_2 + 2\alpha\Omega_1 \right], \\ L_{11} &= 2h \left[ (\beta + 2\gamma) \frac{d\Omega_1}{dr} + \beta \frac{1}{r} \Omega_1 + \beta t \right], \quad L_{13} = \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \frac{d\Omega_3}{dr}, \\ L_{22} &= 2h \left[ (\beta + 2\gamma) \frac{1}{r} \Omega_1 + \beta \frac{d\Omega_1}{dr} - \beta t \right], \quad \Lambda_{13} = \frac{2h^3}{3} \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \frac{dt}{dr}, \\ L_{33} &= 2h \left[ (\beta + 2\gamma)t + \beta \left( \frac{d\Omega_1}{dr} + \frac{1}{r} \Omega_1 \right) \right], \quad S_{12} = 2h \left[ (\mu + \alpha) \frac{du_2}{dr} - (\mu - \alpha) \frac{1}{r} u_2 - 2\alpha\Omega_3 \right], \\ S_{21} &= 2h \left[ -(\mu + \alpha) \frac{1}{r} u_2 + (\mu - \alpha) \frac{du_2}{dr} + 2\alpha\Omega_3 \right]; \end{aligned} \quad (8)$$

граничные условия шарнирного опирания

$$\Omega_1 = 0, \quad \psi_2 = 0, \quad \Lambda_{13} = 0, \quad \text{когда } r = R. \quad (9)$$

**3. Задача изгиба микрополярной гибкой круглой пластинки.** Рассмотрим деформацию шарнирно опертой микрополярной упругой тонкой круглой пластинки под действием равномерно распределенной нормальной нагрузки интенсивности  $q$ . Решение задачи кручения (7) – (9) будет нулевым, а задачу изгиба (4) – (6) будем решать по методу Галеркина.

Граничные условия шарнирного опирания имеют вид (6). Зададим решение в следующем виде:

$$u_1(r) = C_1 \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \frac{r}{R}, \quad w(r) = C_2 \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right),$$

$$\psi_1(r) = C_3 \left(1 - \frac{1+\nu}{3+\nu} \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \frac{r}{R}, \quad \Omega_2(r) = C_4 \left(1 - \frac{\varepsilon}{\gamma + 2\varepsilon} \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \frac{r}{R}. \quad (10)$$

Поставив эти представления в физико-геометрические соотношения (5), получим выражения для усилий, моментов и гипермоментов. Применяя метод Галеркина для систем уравнений равновесия (4), имеем:

$$\int_0^R \left( \frac{dT_{11}}{dr} + \frac{1}{r} (T_{11} - T_{22}) \right) \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \frac{r}{R} r dr = 0,$$

$$\int_0^R \left( \frac{dN_{13}}{dr} + \frac{1}{r} N_{13} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r T_{11} \frac{dw}{dr} \right) - q \right) \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) r dr = 0,$$

$$\int_0^R \left( \frac{dL_{12}}{dr} + \frac{1}{r} (L_{12} + L_{21}) + N_{31} - N_{13} \right) \left(1 - \frac{\varepsilon}{\gamma + 2\varepsilon} \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \frac{r}{R} r dr = 0,$$

$$\int_0^R \left( N_{31} - \left( \frac{dM_{11}}{dr} + \frac{1}{r} (M_{11} - M_{22}) \right) \right) \left(1 - \frac{1+\nu}{3+\nu} \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \frac{r}{R} r dr = 0. \quad (11)$$

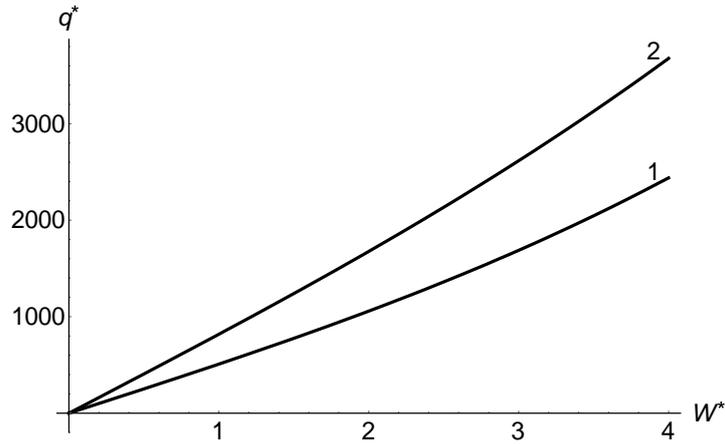


Рис. 1

Выполнив интегрирование, получим систему нелинейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $C_1, C_2, C_3, C_4$ . Из указанной системы можно получить зависимость  $q$  от  $W$ .

Численные расчеты выполнены для круглой пластинки, когда  $R = 0.005$  м, а для относительной толщины принято:  $\delta = \frac{h}{R} = \frac{1}{100}$ . Для физических постоянных приняты следующие значения [7]:  $E = 2,768 * 10^9$ ;  $\gamma = 4.1$ ;  $\alpha = 0.85 * 10^9$ ;  $\mu = 1.033 * 10^9$ ;  $\epsilon = 0.13$ ;  $\nu = 0.34$ .

Здесь введены безразмерные величины:  $W^* = \frac{W}{h}$ ,  $q^* = \frac{q}{E\delta^4}$ .

На рис. 1 приведены зависимости прогиб  $W^*$  – нагрузка  $q^*$ . Линия 1 соответствует классической нелинейной теории, линия 2 – микрополярной нелинейной теории. При  $q^* = 1500$  по микрополярной модели получаем  $W^* = 1.8$ , а по классической модели  $W^* = 2.72$ . Как видно из графиков, при указанной модели пластинки каждому значению интенсивности нагрузки отвечает одно, вполне определенное равновесное состояние. По нелинейной теории при всех остальных равных условиях микрополярность материала довольно значительно повышает жесткость пластинки.

**4. Заключение.** На основе геометрически нелинейной модели микрополярных упругих тонких круглых пластин с независимыми полями перемещений и вращений решена конкретная задача об изгибной деформации круглой пластинки. Сделан анализ полученных численных результатов и установлены повышенные жесткостные свойства микрополярных пластин по сравнению с классическими случаями.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта 18Т-2С263.

Ширакский государственный университет им. М. Налбандяна  
e-mail: armenuhis@mail.ru

**А. А. Саркисян**

#### **Поведение микрополярной гибкой круглой пластинки при изгибе**

Рассматривается геометрически нелинейная прикладная модель микрополярных упругих тонких гибких пластин с независимыми полями перемещений и вращений. На основе этой прикладной модели решена конкретная задача для микрополярных упругих гибких круглых пластин при равномерно распределенной нагрузке, когда края пластинки шарнирно оперты. На основе численного анализа устанавливаются некоторые эффективные проявления микрополярного материала по сравнению с соответствующим классическим материалом.

Ա. Ն. Սարգսյան

**Միկրոպոլյար ճկուն շրջանային սալի վարքը  
ծռման ժամանակ**

Դիտարկվում է միկրոպոլյար առաձգական բարակ ճկուն սալերի տեղափոխությունների և պտույտների անկախ դաշտերով երկրաչափորեն ոչ գծային կիրառական մոդելը: Այդ կիրառական մոդելի հիման վրա լուծվում է որոշակի խնդիր միկրոպոլյար առաձգական ճկուն շրջանային սալերի համար հավասարաչափ բաշխված բեռի դեպքում, երբ սալի եզրերը հողակապորեն հենված են: Թվային անալիզի հիման վրա հաստատվում են միկրոպոլյար նյութի որոշ արդյունավետ դրսևորումներ համեմատած համապատասխան դասական նյութի հետ:

A. H. Sargsyan

**Behavior of Micropolar Flexible Round  
Plate in Bending Problem**

Geometrically nonlinear applied model of micropolar elastic thin flexible plates with independent fields of displacement and rotation is considered. On the basis of this applied model, specific problem for micropolar elastic flexible round plates with uniformly distributed load is solved, when its edges are hinge supported. On the basis of numerical analysis, some effective manifestations of micropolar material are established in comparison with the corresponding classical material.

**Литература**

1. *Karman Th.* Collected works. V. 1. London. 1956. 530 p.
2. *Вольмир А. С.* Гибкие пластинки и оболочки. М. Гостехиздат. 1956. 420 с.
3. *Տարկսյան Ս. Օ.* – Прикладная механика и техническая физика. 2012. № 2. С. 148-155.
4. *Sargsyan A. H., Sargsyan S. H.* – Journal of Sound and Vibration. 2014. V. 333. Issue 18. P. 4354-4375.
5. *Տարկսյան Ա. Ա.* – Ученые записки ГГПИ. 2014. № 1. С. 91-103.
6. *Տարկսյան Ա. Ա., Տարկսյան Ս. Օ.* В кн.: Современные проблемы механики сплошной среды. Тр. XVIII междунар. конф. Ростов-на-Дону, 7-10 ноября, 2016. Т. 2. Ростов-на-Дону. Изд-во ЮФУ. С. 180-184.
7. *Lakes R.* In: Continuum models for materials with microstructure. Ed. by H. Muhlhaus. Ch. 1. N. Y. J. Wiley and Sons, Ltd. 1995. P. 1-22.