ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 120 2020 № 4

МЕХАНИКА

УДК 539.3

М. Л. Агаловян, Р. С. Геворкян, Т. В. Закарян

Об одной динамической смешанной задаче двуслойной ортотропной пластинки

(Представлено академиком Л. А. Агаловяном 17/IX 2020)

Ключевые слова: *слоистая пластинка, вынужденные колебания, асимптотическое решение.*

Введение. Для решения динамических задач теории упругости были использованы методы Фуре, интегральных преобразований и др. [1]. Для решения статических и динамических задач на основе классических и уточнённых теорий пластин и оболочек эффективным оказался также численно-аналитический метод [2, 3]. Сравнительно мало работ, посвящённых пространственным динамическим задачам пластин и оболочек. Для решения подобных задач эффективным оказался асимптотический метод [4-7].

В данной работе определено асимптотическое решение трёхмерной динамической задачи о вынужденных колебаниях ортотропной двуслойной пластинки, лежащей на жёсткой подстилке. Считается, что лицевой поверхности пакета сообщено нормальное перемещение, гармонически изменяющееся во времени. Показано, что гипотезы классической и известных уточненных теорий (Тимошенко, С. Амбарцумян) не применимы для решения подобных задач.

1. Основные уравнения и постановка задачи. Рассмотрим двуслойную ортотропную пластинку, занимающую область $D=\{(x,y,z):\ 0\le x\le a,\ 0\le y\le b, -h_2\le z\le h_1,\ \ h_1+h_2=h<<l,$ $l=\min(a,b)\}$. Требуется найти решение уравнений движения

$$\frac{\partial\sigma_{xx}^k}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}^k}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{xz}^k}{\partial z}=\rho^k\frac{\partial^2u^k}{\partial t^2},\qquad \frac{\partial\sigma_{xy}^k}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}^k}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{yz}^k}{\partial z}=\rho^k\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},\quad (1)$$

$$\frac{\partial\sigma_{xz}^k}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yz}^k}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}^k}{\partial z}=\rho^k\frac{\partial^2w^k}{\partial t^2},\ k=I,II$$

и соотношений упругости (обобщенный закон Гука) ортотропного тела

$$\frac{\partial u^k}{\partial x}=a_{11}^k\sigma_{xx}^k+a_{12}^k\sigma_{yy}^k+a_{13}^k\sigma_{zz}^k,\qquad \frac{\partial v^k}{\partial y}=a_{12}^k\sigma_{xx}^k+a_{22}^k\sigma_{yy}^k+a_{23}^k\sigma_{zz}^k,$$

$$\frac{\partial w^k}{\partial z}=a_{13}^k\sigma_{xx}^k+a_{23}^k\sigma_{yy}^k+a_{33}^k\sigma_{zz}^k,\quad \frac{\partial u^k}{\partial y}+\frac{\partial v^k}{\partial x}=a_{66}^k\sigma_{xy}^k, \tag{2}$$

$$\frac{\partial w^k}{\partial x}+\frac{\partial u^k}{\partial z}=a_{55}^k\sigma_{xz}^k,\quad \frac{\partial w^k}{\partial y}+\frac{\partial v^k}{\partial z}=a_{44}^k\sigma_{yz}^k$$

при следующих граничных условиях на лицевых поверхностях пакета:

$$\begin{gathered} W^I\left(h_1\right)=-W^+\left(\xi,\eta\right)\exp(i\Omega t),\\ \sigma_{xz}^I\left(h_1\right)=0,\quad \sigma_{yz}^I\left(h_1\right)=0, \end{gathered}\tag{3}$$

$$\begin{gathered} W(-h_2)=0,\\ \sigma_{xz}^{II}(x,y,-h_2)=f_1\sigma_{zz}^{II}(x,y,-h_2),\\ \sigma_{yz}^{II}(x,y,-h_2)=f_2\sigma_{zz}^{II}(x,y,-h_2), \end{gathered}\tag{4}$$

где $\xi=x/l$, $\eta=y/l$, Ω – частота внешнего воздействия; при условиях полного контакта между слоями пакета

$$\begin{gathered} \sigma_{\alpha z}^I(x,y,0,t)=\sigma_{\alpha z}^{II}(x,y,0,t),\quad \alpha=x,y,z,\\ u^I(x,y,0,t)=u^{II}(x,y,0,t),\qquad (u,v,w). \end{gathered}\tag{5}$$

2. Асимптотическое решение задачи. Решение сформулированной пространственной задачи будем искать в виде

$$\begin{gathered} \sigma_{\alpha\beta}^k\left(x,y,z,t\right)=\sigma_{ij}^k\left(x,y,z\right)\exp\left(i\Omega t\right),\quad \alpha,\beta=x,y,z,\quad i,j=1,2,3,\ k=I,II \\ \left(u^k(x,y,z,t),v^k(x,y,z,t),w^k(x,y,z,t)\right)=\left(u_x^k(x,y,z),u_y^k(x,y,z),u_z^k(x,y,z)\right)\exp\left(i\Omega t\right), \end{gathered}\tag{6}$$

Перейдя в динамических уравнениях и соотношениях упругости (1), (2) к безразмерным координатам и перемещениям

$$\xi=x/l,\ \eta=y/l,\ \zeta=z/h,\ U=u_x/l,\ V=u_y/l,\ W=u_z/l, \tag{7}$$

получим сингулярно возмущенную малым параметром $\varepsilon=h/l$ систему:

$$\frac{\partial\sigma_{11}^k}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{12}^k}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{13}^k}{\partial\zeta}+\varepsilon^{-2}\rho^k\Omega_*^2U^k=0,\quad \frac{\partial\sigma_{12}^k}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{22}^k}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{23}^k}{\partial\zeta}+\varepsilon^{-2}\rho^k\Omega_*^2V^k=0,$$

$$\frac{\partial\sigma_{13}^k}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{23}^k}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{33}^k}{\partial\zeta}+\varepsilon^{-2}\rho^k\Omega_*^2W^k=0,\quad \frac{\partial U^k}{\partial\xi}=a_{11}^k\sigma_{11}^k+a_{12}^k\sigma_{22}^k+a_{13}^k\sigma_{33}^k,$$

$$\frac{\partial V^k}{\partial\eta}=a_{12}^k\sigma_{11}^k+a_{22}^k\sigma_{22}^k+a_{23}^k\sigma_{33}^k,\qquad \varepsilon^{-1}\frac{\partial W^k}{\partial\zeta}=a_{13}^k\sigma_{11}^k+a_{23}^k\sigma_{22}^k+a_{33}^k\sigma_{33}^k, \tag{8}$$

$$\frac{\partial V^k}{\partial\xi}+\frac{\partial U^k}{\partial\eta}=a_{66}^k\sigma_{12}^k,\quad \frac{\partial W^k}{\partial\xi}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial U^k}{\partial\zeta}=a_{55}^k\sigma_{13}^k,$$

$$\frac{\partial W^k}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial V^k}{\partial\zeta}=a_{44}^k\sigma_{23}^k,\qquad \Omega_*^2=h^2\Omega^2,\ \mathrm{k=I,II}.$$

Решение системы (8) складывается из решений внутренней задачи (I^{int}) и пограничного слоя (I_b), т.е. $I = I^{\text{int}} + I_b$. В англоязычной литературе принято использовать обозначение $I = I^{out} + I_b$, т.е. I^{int}, I^{out} – решение практически одной и той же задачи. Решение внутренней задачи будем искать в виде

$$\sigma_{ij}^{k\,\text{int}} = \varepsilon^{-1+s}\sigma_{ij}^{k(s)}(\xi,\eta,\zeta), \quad i,j=1,2,3, \quad s=\overline{0,N}$$
$$(U^{k\,\text{int}}, V^{k\,\text{int}}, W^{k\,\text{int}}) = \varepsilon^{s}(U^{k(s)}, V^{k(s)}, W^{k(s)}),\ k = I, II. \tag{9}$$

Здесь $s=\overline{0,N}$ (обозначение Эйнштейна) означает, что в (9) по повторяющемуся индексу s происходит суммирование от нуля до числа приближений N. Считается, что в (8) $\sigma_{ij}^{k(s)}, U^{k(s)}, V^{k(s)}, W^{k(s)}$ порядка единицы. Уравнениями (8) можно воспользоватся и при высокочастотных колебаниях. Например, если $\Omega_*^2 = O(\varepsilon^{-1})$, можно опять воспользоваться системой (8), если $\rho^k\Omega_*^2$ формально заменить на $\rho^k lh\Omega^2$, а при $\Omega_*^2 = O(\varepsilon^{-2})$ – на $\rho^k l^2\Omega^2$ [4].

Подставив (9) в (8) и приравняв в каждом уравнении коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим следующую непротиворечивую систему для определения коэффициентов $\sigma_{ij}^{k(s)}, U^{k(s)}, V^{k(s)}, W^{k(s)}$:

$$\frac{\partial\sigma_{11}^{k(s-1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{12}^{k(s-1)}}{\partial\eta} + \frac{\partial\sigma_{13}^{k(s)}}{\partial\zeta} + \rho^k\Omega_*^2 U^{k(s)} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_{12}^{k(s-1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{22}^{k(s-1)}}{\partial\eta} + \frac{\partial\sigma_{23}^{k(s)}}{\partial\zeta} + \rho^k\Omega_*^2 V^{k(s)} = 0,$$

$$\frac{\partial\sigma_{13}^{k(s-1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{23}^{k(s-1)}}{\partial\eta} + \frac{\partial\sigma_{33}^{k(s)}}{\partial\zeta} + \rho^k\Omega_*^2 W^{k(s)} = 0, \quad \frac{\partial U^{k(s-1)}}{\partial\xi} = a_{11}^k\sigma_{11}^{k(s)} + a_{12}^k\sigma_{22}^{k(s)} + a_{13}^k\sigma_{33}^{k(s)},$$
$$\frac{\partial V^{k(s-1)}}{\partial\eta} = a_{12}^k\sigma_{11}^{k(s)} + a_{22}^k\sigma_{22}^{k(s)} + a_{23}^k\sigma_{33}^{k(s)}, \quad \frac{\partial W^{k(s)}}{\partial\zeta} = a_{13}^k\sigma_{11}^{k(s)} + a_{23}^k\sigma_{22}^{k(s)} + a_{33}^k\sigma_{33}^{k(s)}, \tag{10}$$
$$\frac{\partial V^{k(s-1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial U^{k(s-1)}}{\partial\eta} = a_{66}^k\sigma_{12}^{k(s)}, \quad \frac{\partial W^{k(s-1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial U^{k(s)}}{\partial\zeta} = a_{55}^k\sigma_{13}^{k(s)}, \quad \frac{\partial W^{k(s-1)}}{\partial\eta} + \frac{\partial V^{k(s)}}{\partial\zeta} = a_{44}^k\sigma_{23}^{k(s)}.$$

Из системы (10) все напряжения можно выразить через перемещения по формулам

$$\sigma_{13}^{k(s)} = \frac{1}{a_{55}^k}\left(\frac{\partial U^{k(s)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial W^{k(s-1)}}{\partial\xi}\right), \quad \sigma_{23}^{k(s)} = \frac{1}{a_{44}^k}\left(\frac{\partial V^{k(s)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial W^{k(s-1)}}{\partial\eta}\right),$$

$$\sigma_{12}^{k(s)} = \frac{1}{a_{66}^k}\left(\frac{\partial U^{k(s-1)}}{\partial\eta} + \frac{\partial V^{k(s-1)}}{\partial\xi}\right), \quad \sigma_{11}^{k(s)} = \frac{1}{\Delta^k}\left(-A_{23}^k\frac{\partial W^{k(s)}}{\partial\zeta} + A_{22}^k\frac{\partial U^{k(s-1)}}{\partial\xi} - A_{12}^k\frac{\partial V^{k(s-1)}}{\partial\eta}\right),$$
$$\sigma_{22}^{k(s)} = \frac{1}{\Delta^k}\left(-A_{13}^k\frac{\partial W^{k(s)}}{\partial\zeta} - A_{12}^k\frac{\partial U^{k(s-1)}}{\partial\xi} + A_{33}^k\frac{\partial V^{k(s-1)}}{\partial\eta}\right), \tag{11}$$
$$\sigma_{33}^{k(s)} = \frac{1}{\Delta^k}\left(A_{11}^k\frac{\partial W^{k(s)}}{\partial\zeta} - A_{23}^k\frac{\partial U^{k(s-1)}}{\partial\xi} - A_{13}^k\frac{\partial V^{k(s-1)}}{\partial\eta}\right),$$

где

$$A_{11}^k = a_{11}^k a_{22}^k - \left(a_{12}^k\right)^2, \quad A_{12}^k = a_{12}^k a_{33}^k - a_{23}^k a_{13}^k, \quad A_{13}^k = a_{11}^k a_{23}^k - a_{13}^k a_{12}^k,$$
$$A_{22}^k = a_{22}^k a_{33}^k - \left(a_{23}^k\right)^2, \quad A_{23}^k = a_{13}^k a_{22}^k - a_{12}^k a_{23}^k, \quad A_{33}^k = a_{11}^k a_{33}^k - \left(a_{13}^k\right)^2, \tag{12}$$
$$\Delta^k = a_{11}^k A_{22}^k - a_{12}^k A_{12}^k - a_{13}^k A_{23}^k, \quad Q^{k(m)} \equiv 0, \text{ при } m<0,$$

а для определения $U^{k(s)}, V^{k(s)}, W^{k(s)}$ получим уравнения

$$\frac{\partial^2 U^{k(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55}^k \rho^k \Omega_*^2 U^{k(s)} = R_U^{k(s)}, \quad R_U^{k(s)} = -a_{55}^k \left(\frac{\partial \sigma_{11}^{k(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}^{k(s-1)}}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial^2 W^{k(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta}, \tag{13}$$

$$\frac{\partial^2 V^{k(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{44}^k \rho^k \Omega_*^2 V^{k(s)} = R_V^{k(s)}, \quad R_V^{k(s)} = -a_{44}^k \left(\frac{\partial \sigma_{12}^{k(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22}^{k(s-1)}}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial^2 W^{k(s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta}, \tag{14}$$

$$A_{11}^k \frac{\partial^2 W^{k(s)}}{\partial \zeta^2} + \Delta^k \rho^k \Omega_*^2 W^{k(s)} = R_W^{k(s)},$$
$$R_W^{k(s)} = -\Delta^k \left(\frac{\partial \sigma_{13}^{k(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{23}^{k(s-1)}}{\partial \eta} \right) + A_{23}^k \frac{\partial^2 U^{k(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} + A_{13}^k \frac{\partial^2 V^{k(s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta}. \tag{15}$$

Решениями этих уравнений являются

$$U^{k(s)} = C_1^{k(s)}(\xi,\eta) \sin \gamma_1^k \zeta + C_2^{k(s)}(\xi,\eta) \cos \gamma_1^k \zeta + U_\tau^{k(s)}(\xi,\eta,\zeta), \quad \gamma_1^k = \Omega_* \sqrt{\rho^k a_{55}^k},$$
$$V^{k(s)} = C_3^{k(s)}(\xi,\eta) \sin \gamma_2^k \zeta + C_4^{k(s)}(\xi,\eta) \cos \gamma_2^k \zeta + V_\tau^{k(s)}(\xi,\eta,\zeta), \quad \gamma_2^k = \Omega_* \sqrt{\rho^k a_{44}^k}, \tag{16}$$
$$W^{k(s)} = C_5^{k(s)}(\xi,\eta) \sin \gamma_3^k \zeta + C_6^{k(s)}(\xi,\eta) \cos \gamma_3^k \zeta + W_\tau^{k(s)}(\xi,\eta,\zeta), \quad \gamma_3^k = \Omega_* \sqrt{\rho^k \Delta^k / A_{11}^k},$$

где $U_\tau^{k(s)}, V_\tau^{k(s)}, W_\tau^{k(s)}$ – частные решения уравнений.

Подставив значения $U^{k(s)}, V^{k(s)}, W^{k(s)}$ в формулы (11), для напряжений $\sigma_{13}^{k(s)}, \sigma_{23}^{k(s)}, \sigma_{33}^{k(s)}$ будем иметь

$$\sigma_{13}^{k(s)} = \Omega_* \sqrt{\rho^k / a_{55}^k} \left(C_1^{k(s)}(\xi,\eta) \cos \gamma_1^k \zeta - C_2^{k(s)}(\xi,\eta) \sin \gamma_1^k \zeta \right) + f_{13}^{k(s)}(\xi,\eta,\zeta),$$
$$\sigma_{23}^{k(s)} = \Omega_* \sqrt{\rho^k / a_{44}^k} \left(C_3^{k(s)}(\xi,\eta) \cos \gamma_2^k \zeta - C_4^{k(s)}(\xi,\eta) \sin \gamma_2^k \zeta \right) + f_{23}^{k(s)}(\xi,\eta,\zeta), \tag{17}$$
$$\sigma_{33}^{k(s)} = \Omega_* \sqrt{\rho^k A_{11}^k / \Delta^k} \left(C_5^{k(s)}(\xi,\eta) \cos \gamma_3^k \zeta - C_6^{k(s)}(\xi,\eta) \sin \gamma_3^k \zeta \right) + f_{33}^{k(s)}(\xi,\eta,\zeta),$$

где

$$f_{13}^{k(s)} = \frac{1}{a_{55}^k} \left(\frac{\partial U_\tau^{k(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W^{k(s-1)}}{\partial \xi} \right), \qquad f_{23}^{k(s)} = \frac{1}{a_{44}^k} \frac{\partial V_\tau^{k(s)}}{\partial \zeta} + \frac{1}{a_{55}^k} \frac{\partial W^{k(s-1)}}{\partial \eta},$$
$$f_{33}^{k(s)} = \frac{A_{11}^k}{\Delta^k} \frac{\partial W_\tau^{k(s)}}{\partial \zeta} - \frac{1}{\Delta^k} \left(A_{23}^k \frac{\partial U^{k(s-1)}}{\partial \xi} + A_{13}^k \frac{\partial V^{k(s-1)}}{\partial \eta} \right). \tag{18}$$

Используя формулы (16), (17), удовлетворив граничным условиям (3), (4) и условиям полного контакта между слоями (5), определим значения функций $C_i^{k(s)}(\xi,\eta),\ i=1,...,6,\ k=I,II$

$$C_1^{I(s)} = b_1 C_1^{II(s)} + d_1^{(s)}, \quad C_2^{I(s)} = C_2^{II(s)} + a_1^{(s)}, \quad C_3^{I(s)} = b_2 C_3^{II(s)} + d_2^{(s)},$$
$$C_4^{I(s)} = C_4^{II(s)} + a_2^{(s)}, \quad C_5^{I(s)} = b_3 C_5^{II(s)} + d_3^{(s)}, \quad C_6^{I(s)} = C_6^{II(s)} + a_3^{(s)},$$

$$
\begin{aligned}
C_1^{II(s)} &= \frac{1}{B_{22}}\left[b_4(B_{26}C_5^{II(s)} + B_{25}C_6^{II(s)}) + d_5^{(s)} - B_{21}C_2^{II(s)}\right],\\
C_2^{II(s)} &= \frac{1}{b_1B_{21}B_{12} + B_{22}B_{11}}\left[\left(b_4(B_{26}C_5^{II(s)} + B_{25}C_6^{II(s)}) + d_5^{(s)}\right)B_{12}b_1 - B_{22}(d_8^{(s)} - B_{12}d_1^{(s)} + B_{11}a_1^{(s)})\right],\\
C_3^{II(s)} &= \frac{1}{B_{24}}\left[b_5(B_{26}C_5^{II(s)} + B_{25}C_6^{II(s)}) + d_6^{(s)} - B_{26}C_4^{II(s)}\right],\\
C_4^{II(s)} &= \frac{1}{b_2B_{26}B_{13} + B_{24}B_{14}}\left[\left(b_5(B_{26}C_5^{II(s)} + B_{25}C_6^{II(s)}) + d_6^{(s)}\right)B_{13}b_2 - B_{24}(d_9^{(s)} - B_{13}d_2^{(s)} + B_{14}a_2^{(s)})\right],\\
C_5^{II(s)} &= \frac{1}{b_3B_{26}B_{15} + B_{16}B_5}\left[B_{26}(d_7^{(s)} - B_{15}d_3^{(s)} - B_{16}a_3^{(s)}) - B_{16}d_4^{(s)}\right],\\
C_6^{II(s)} &= \frac{1}{B_{26}}\left[d_4^{(s)} + B_{25}C_5^{II(s)}\right],
\end{aligned}
\tag{19}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&a_1^{(s)} = U_\tau^{II(s)}(\xi,\eta,0) - U_\tau^{I(s)}(\xi,\eta,0), \qquad a_2^{(s)} = V_\tau^{II(s)}(\xi,\eta,0) - V_\tau^{I(s)}(\xi,\eta,0),\\
&a_3^{(s)} = W_\tau^{II(s)}(\xi,\eta,0) - W_\tau^{I(s)}(\xi,\eta,0), \quad d_1^{(s)} = \frac{1}{\Omega_*\sqrt{\rho^I/a_{55}^I}}\left(f_{13}^{II(s)}(\xi,\eta,0) - f_{13}^{I(s)}(\xi,\eta,0)\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_2^{(s)} &= \frac{1}{\Omega_*\sqrt{\rho^I/a_{44}^I}}\left(f_{23}^{II(s)}(\xi,\eta,0) - f_{23}^{I(s)}(\xi,\eta,0)\right),\\
d_3^{(s)} &= \frac{1}{\Omega_*\sqrt{\rho^I A_{11}^I/\Delta^I}}\left(f_{33}^{II(s)}(\xi,\eta,0) - f_{33}^{I(s)}(\xi,\eta,0)\right), \qquad d_4^{(s)} = -W_\tau^{II(s)}(\xi,\eta,-\zeta_2),\\
d_5^{(s)} &= \frac{1}{\Omega_*\sqrt{\rho^{II}/a_{55}^{II}}}\left(f_1\cdot f_{33}^{II(s)}(\xi,\eta,-\zeta_2) - f_{13}^{II(s)}(\xi,\eta,-\zeta_2)\right),\\
d_6^{(s)} &= \frac{1}{\Omega_*\sqrt{\rho^{II}/a_{44}^{II}}}\left(f_2\cdot f_{33}^{II(s)}(\xi,\eta,-\zeta_2) - f_{23}^{II(s)}(\xi,\eta,-\zeta_2)\right),\\
d_7^{(s)} &= -W^{+(s)}(\xi,\eta) - W_\tau^{I(s)}(\xi,\eta,\zeta_1), \quad W^{+(0)} = W^+/l, \quad W^{+(s)} = 0, s\neq 0\\
d_8^{(s)} &= -\frac{f_{13}^{I(s)}(\xi,\eta,\zeta_1)}{\Omega_*\sqrt{\rho^I/a_{55}^I}},\\
d_9^{(s)} &= -\frac{f_{23}^{I(s)}(\xi,\eta,\zeta_1)}{\Omega_*\sqrt{\rho^I/a_{44}^I}},
\end{aligned}
\tag{20}
$$

$$
\begin{aligned}
&b_1 = \sqrt{\rho^{II}a_{55}^I/\rho^I a_{55}^{II}}, \quad b_2 = \sqrt{\rho^{II}a_{44}^I/\rho^I a_{44}^{II}}, \quad b_3 = \sqrt{\rho^{II}A_{11}^{II}\Delta^I/\rho^I A_{11}^I\Delta^{II}},\\
&b_4 = f_1\sqrt{A_{11}^{II}a_{55}^{II}/\Delta^{II}}, \quad b_5 = \sqrt{A_{11}^{II}a_{44}^{II}/\Delta^{II}},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&B_{11} = \sin\gamma_1^I\zeta_1, \; B_{21} = \sin\gamma_1^{II}\zeta_2, \; B_{12} = \cos\gamma_1^I\zeta_1, \; B_{22} = \cos\gamma_1^{II}\zeta_2,\\
&B_{13} = \sin\gamma_2^I\zeta_1, \; B_{23} = \sin\gamma_2^{II}\zeta_2, \; B_{14} = \cos\gamma_2^I\zeta_1, \; B_{24} = \cos\gamma_2^{II}\zeta_2,\\
&B_{15} = \sin\gamma_3^I\zeta_1, \; B_{25} = \sin\gamma_3^{II}\zeta_2, \; B_{16} = \cos\gamma_3^I\zeta_1, \; B_{26} = \cos\gamma_3^{II}\zeta_2.
\end{aligned}
$$

Если функция W^+ является многочленом от (ξ,η), итерация обрывается, и в результате получим математически точное решение во внутренней задаче. В частности, при $W^+ = \text{const}$ итерация обрывается на исходном приближении, и для неизвестных $C_i^{k(s)}(\xi,\eta),\ i=1,...,6,\ k=I,II$ имеем значения:

$$C_1^{I(0)} = b_1 C_1^{II(0)},\quad C_2^{I(0)} = C_2^{II(0)},\quad C_3^{I(0)} = b_2 C_3^{II(0)},\quad C_4^{I(0)} = C_4^{II(0)},$$

$$\begin{gathered}
C_5^{I(0)} = b_3 C_5^{II(0)},\quad C_6^{I(0)} = C_6^{II(0)},\quad C_1^{II(0)} = \frac{1}{B_{22}}\left[b_4(B_{26}C_5^{II(0)} + B_{25}C_6^{II(0)}) - B_{21}C_2^{II(0)}\right],\\
C_2^{II(0)} = \frac{B_{12}b_1b_4}{b_1B_{21}B_{12} + B_{22}B_{11}}(B_{26}C_5^{II(0)} + B_{25}C_6^{II(0)}),\quad C_3^{II(0)} = \frac{1}{B_{24}}\left[b_5(B_{26}C_5^{II(0)} + B_{25}C_6^{II(0)}) - B_{26}C_4^{II(0)}\right],\\
C_4^{II(0)} = \frac{B_{13}b_2b_5}{b_2B_{26}B_{13} + B_{24}B_{14}}(B_{26}C_5^{II(0)} + B_{25}C_6^{II(0)}),\quad C_5^{II(0)} = \frac{B_{26}d_7^{(0)}}{b_3B_{26}B_{15} + B_{16}B_5},\quad C_6^{II(0)} = \frac{B_{25}C_5^{II(0)}}{B_{26}},\\
a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, a_3^{(0)}, d_1^{(0)}, d_2^{(0)}, d_3^{(0)}, d_4^{(0)}, d_5^{(0)}, d_6^{(0)}, d_8^{(0)}, d_9^{(0)} \equiv 0,\quad d_7^{(0)} = -W^+/l
\end{gathered} \tag{21}$$

и следующее окончательное решение:

$$\begin{gathered}
u^k = lU^{k(0)}\exp(i\Omega t),\ v^k = lV^{k(0)}\exp(i\Omega t),\ w^k = lW^{k(0)}\exp(i\Omega t),\\
\sigma_{\alpha\beta}^k = \varepsilon^{-1}\sigma_{\alpha\beta}^{k(0)}\exp(i\Omega t),\ \alpha,\beta = x,y,z,\ k=I,II.
\end{gathered}$$

Институт механики НАН РА
e-mails: mheraghalovyan@rambler.ru, gevorgyanrs@mail.ru,
zaqaryantatevik@mail.ru

М. Л. Агаловян, Р. С. Геворкян, Т. В. Закарян

Об одной динамической смешанной задаче двуслойной ортотропной пластинки

Решена трёхмерная динамическая задача о вынужденных колебаниях ортотропной двуслойной пластинки, лежащей на жёсткой подстилке. Считается, что между подошвой пластинки и жёстким основанием существует трение, которое пропорционально нормальному напряжению. Асимптотическим методом определены все компоненты тензора напряжений и вектора перемещения, когда лицевой поверхности двуслойного пакета сообщено нормальное перемещение, гармонически изменяющееся во времени. Доказано, что для этого класса задач гипотезы классической и известных уточнённых теорий не применимы.

Մ. Լ. Աղալովյան, Ռ. Ս. Գևորգյան, Տ. Վ. Զաքարյան

Երկշերտ օրթոտրոպ սալի մի խառը դինամիկական խնդրի մասին

Լուծված է կոշտ հենարանի վրա հենված երկշերտ օրթոտրոպ սալի ստիպողական տատանումների եռաչափ դինամիկական խնդիրը: Սալի հիմքի և կոշտ հիմնատակի միջև առկա է շփում, որը համեմատական է նորմալ ճնշմանը: Ասիմպտոտիկ մեթոդով որոշված են լարումների թենզորի և տեղափոխման վեկտորի բոլոր բաղադրիչները, երբ երկշերտ փաթեթի դիմային մակերևույթին հաղորդված է, ըստ ժամանակի, հարմոնիկ փոփոխվող նորմալ տեղափոխություն: Ապացուցված է, որ այս դասի խնդիրների համար սալերի դասական և ճշգրիտ տեսությունների վարկածները կիրառելի չեն:

M. L. Aghalovyan, R. S. Gevorgyan, T. V. Zakaryan

On One Dynamic Mixed Problem of a Two-Layer Orthotropic Plate

A three-dimensional dynamic problem of forced vibrations of an orthotropic two-layer plate lying on a rigid litter is solved. It is assumed that there is friction between the sole of the plate and the rigid base, which is proportional to the normal stress. All components of the stress tensor and the displacement vector are determined by the asymptotic method, when the facial surface of the two-layer package is imparted with normal displacement, harmonically changing in time. It is proved that for this class of problems the hypotheses of the classical and well-known refined theories are not applicable.

Литература

1. *Поручиков В. Б.* Методы динамической теории упругости. М. Наука. 1986. 328 с.
2. *Григоренко Я. М., Григоренко А. Я.* В кн.: Современные проблемы механики. Киев. ЛиТеча ЛТД. 2017. Т. 2. С. 311-378.
3. *Луговой П. З., Мейш В. Ф.* – Прикладная механика. 2017. № 5. С. 3-65.
4. *Aghalovyan L. A.* Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells. Singapore. World Scientific Publishing. 2015. 376 p. (Русское издание: *Агаловян Л. А.* Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М. Наука, Физматлит. 1997. 414 с.).
5. *Агаловян Л. А.* – Изв. вузов РФ. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. 2000. № 3. С. 8-11.
6. *Aghalovyan L. A., Aghalovyan M. L.* In: Modern Problems of Deformable Bodies Mechanics. Yerevan. Gitutyun NAS RA. 2005. V. 1. P. 8-19.
7. *Агаловян Л. А., Агаловян М. Л., Закарян Т.В.* – ПММ. 2020. Т. 84. Вып. 1. С. 91-101.