ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր
Том
Volume

2020 № 4

МЕХАНИКА

УДК 539.3

Член-корреспондент НАН РА С. О. Саркисян

Тонкие оболочки по моментной теории упругости как деформационные модели наноматериалов

(Представлено 31/VII 2020)

Ключевые слова: *моментная теория упругости, модель оболочки, деформационная концепция «сдвиг плюс поворот», наноматериалы*.

Введение. Методы механики деформируемого твёрдого тела получили широкое распространение при моделировании и изучении деформаций наноматериалов. Нанотрубкам и графеновым слоям ставятся в соответствие классические модели упругих тонких оболочек и пластин [1, 2 и др.]. Отметим, что такой подход не совсем точен, поскольку в классических моделях упругих оболочек и пластин соответствующие компоненты тензора напряжений в толщине этих тонкостенных элементов распределяются по определённым законам, а графен или однослойная нанотрубка состоят всего из одного слоя атомов.

С другой стороны, в [3, 4] доказывается, что при наличии графена или однослойной нанотрубки необходимо в их дискретных моделях учитывать, кроме силового, также моментное взаимодействие между атомами, и устанавливается трёхмерная моментная теория упругости как континуальная модель для указанных наноматериалов. Из изложенного выше следует, что при континуальном моделировании графена и нанотрубок актуально иметь адекватные прикладные модели оболочек и пластин на основе моментной теории упругости. И ещё одно важное обстоятельство – в [5] показывается, что как на уровне мезомеханики твёрдого деформируемого тела, так и на уровне наномеханики деформация в теле происходит по схеме «сдвиг плюс поворот».

В данной работе на основе уравнений трёхмерной линейной моментной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений на базе достаточно общих гипотез построена модель тонкой оболочки, деформация которой подчиняется принципу «сдвиг плюс поворот» и частные случаи которой возможно использовать как континуальные модели нанотрубки, графена и других наноматериалов.

1. Постановка задачи. Рассмотрим трёхмерные уравнения линейной моментной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений [6] в области оболочки толщиной $2h$:

уравнения равновесия (движения)

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} = 0(\rho \ddot{\underline{V}}), \qquad \nabla \cdot \underline{\underline{\mu}} + \underline{\underline{\sigma}}_{x} = 0(I \ddot{\underline{\omega}}), \tag{1}$$

геометрические соотношения

$$\underline{\underline{\gamma}} = \nabla \underline{V} - \underline{\underline{E}} \times \underline{\omega}, \qquad \underline{\underline{\chi}} = \nabla \underline{\omega}, \tag{2}$$

физические соотношения упругости

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} &= 2\mu \underline{\underline{\gamma}}^{(S)} + 2\alpha \underline{\underline{\gamma}}^{(A)} + \lambda \underline{\underline{E}} \cdot\cdot \underline{\underline{\gamma}}, \\ \underline{\underline{\mu}} &= 2\gamma \underline{\underline{\chi}}^{(S)} + 2\varepsilon \underline{\underline{\chi}}^{(A)} + \beta \underline{\underline{E}} \cdot\cdot \underline{\underline{\chi}}. \end{aligned} \tag{3}$$

где $\underline{\underline{\sigma}}$ и $\underline{\underline{\mu}}$ — тензоры напряжений и моментных напряжений; $\underline{\underline{\gamma}}$ и $\underline{\underline{\chi}}$ –тензоры деформаций и изгиба-кручений; $\underline{V}$ и $\underline{\omega}$ – векторы перемещений и поворота; $\underline{\underline{\sigma}}_{x}$ – векторный инвариант тензора напряжений; $\underline{\underline{E}}$ – единичный тензор; ∇ – векторный дифференциальный оператор (набла-оператор); $\underline{\underline{E}} \cdot\cdot \underline{\underline{\gamma}}$ и $\underline{\underline{E}} \cdot\cdot \underline{\underline{\chi}}$ – двойное скалярное произведение указанных тензоров; $\lambda, \mu, \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ – упругие постоянные, ρ – плотность, I – мера инерции при вращении; верхним индексом (S) и (A) обозначают симметричную и антисимметричную части соответствующих тензоров.

Приведённую в инвариантной форме полную систему уравнений моментной теории упругости в дальнейшем будем рассматривать в системе координат $\alpha_1, \alpha_2, z,$ где α_1, α_2 – линии главных кривизн срединной поверхности $(z = 0)$ оболочки, а прямолинейная ось z направлена по нормали к этой поверхности. Коэффициенты Ламе такой триортогональной системы координат имеют вид [7]

$$H_i = A_i \left(1 + \frac{z}{R_i} \right) \quad (i = 1,2), \quad H_3 = 1, \tag{4}$$

где A_i, R_i представляют собой соответственно коэффициенты первой квадратичной формы и главные радиусы кривизны срединной поверхности оболочки.

К системе уравнений (1)-(3) необходимо присоединить граничные условия, а в случае динамики также начальные условия.

Будем считать, что на лицевых поверхностях оболочки $z = \pm h$ заданы напряжения и моментные напряжения:

$$\sigma_{3i}\big|_{z=\pm h} = p_i^{\pm}, \quad \sigma_{33}\big|_{z=\pm h} = p_3^{\pm}, \quad \mu_{3i}\big|_{z=\pm h} = m_i^{\pm}, \quad \mu_{33}\big|_{z=\pm h} = m_3^{\pm} \quad (i=1{,}2), \tag{5}$$

а на поверхности края оболочки $\Sigma = \Sigma' + \Sigma''$ на Σ' заданы напряжения и моментные напряжения, а на Σ'' – перемещения и свободные повороты.

С помощью начальных условий при $t = t_0$ задаются компоненты векторов перемещения и поворота, а также компоненты векторов линейной и угловой скоростей.

2. Основные гипотезы. Компоненты тензоров деформаций, изгибов-кручений, напряжений и моментных напряжений. Сформулируем два довольно общих допущения, используемых при построении модели оболочек, деформация которых подчиняется принципу «сдвиг плюс независимый поворот».

1. Оболочки будем считать тонкими, если

$$\frac{h}{R} << 1, \tag{6}$$

где R – наименьший радиус кривизны срединной поверхности оболочки.

2. Будем считать, что компоненты векторов перемещений и поворота не зависят от координаты z, т.е.

$$V_i = u_i(\alpha_1, \alpha_2) \ (i=1{,}2), \ \ V_3 = w(\alpha_1, \alpha_2), \ \ \omega_k = \Omega_k(\alpha_1, \alpha_2) \ \ (k=1{,}2{,}3). \tag{7}$$

В случае динамики функции (7) будут зависеть также и от времени t.

К этим предположениям присоединим статические: пренебрегаются σ_{33} относительно σ_{ii}; σ_{3i} относительно σ_{i3} и μ_{3i} относительно μ_{i3} $\left(i=1{,}2\right)$.

В деформационные выражения (2) введём перемещения и независимые повороты (7) и, пользуясь допущением о тонкостенности оболочки

$$1+\frac{z}{R_1} \approx 1, \qquad 1+\frac{z}{R_2} = 1, \tag{8}$$

получим следующие формулы:

$$\begin{gathered}
\gamma_{ii} = \Gamma_{ii}(\alpha_1,\alpha_2), \ \gamma_{ij} = \Gamma_{ij}(\alpha_1,\alpha_2), \ \gamma_{i3} = \Gamma_{i3}(\alpha_1,\alpha_2), \\
\gamma_{33} = 0, \ \gamma_{3i} = (-1)^i \cdot \Omega_j, \ \chi_{ii} = k_{ii}(\alpha_1,\alpha_2), \\
\chi_{ij} = k_{ij}(\alpha_1,\alpha_2), \ \chi_{i3} = k_{i3}(\alpha_1,\alpha_2), \ \chi_{3i} = 0, \ \chi_{33} = 0 \ (i \neq j = 1{,}2),
\end{gathered} \tag{9}$$

где $\Gamma_{ii}, \Gamma_{ij}, \Gamma_{i3}, k_{ii}, k_{ij}, k_{i3}$ равны:

$$\Gamma_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_j+\frac{w}{R_i},$$

$$\Gamma_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_i+(-1)^i\Omega_3,\quad \Gamma_{i3}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial w}{\partial\alpha_i}-\frac{u_i}{R_i}+(-1)^j\Omega_j,$$

$$k_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_j+\frac{\Omega_3}{R_i}, \tag{10}$$

$$k_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_i,\quad k_{i3}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_3}{\partial\alpha_i}-\frac{\Omega_i}{R_i}\quad (i\neq j=1{,}2).$$

Напряжения и деформации, а также моментные напряжения и изгибы-кручения связаны физическими соотношениями. Имея в виду формулы (2) и (9), получим

$$\sigma_{ii}=\frac{E}{1-\nu^2}(\Gamma_{ii}+\nu\Gamma_{jj}),\ \sigma_{ij}=(\mu+\alpha)\Gamma_{ij}+(\mu-\alpha)\Gamma_{ji},\ \sigma_{i3}=G^*\Gamma_{i3},$$

$$\mu_{ii}=\frac{2\gamma}{\beta+2\gamma}[2(\beta+\gamma)k_{ii}+\beta k_{jj}], \tag{11}$$

$$\mu_{ij}=(\gamma+\varepsilon)k_{ij}+(\gamma-\varepsilon)k_{ji},\ \mu_{i3}=Bk_{i3}\ \ (i\neq j=1{,}2),$$

где $G^*=\dfrac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}, B=\dfrac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}.$ (12)

Как видно из формул (11), напряжения $\sigma_{ii},\ \sigma_{ij},\ \sigma_{i3},$ а также моментные напряжения $\mu_{ii},\mu_{ij},\mu_{i3}(i\neq j=1{,}2)$ представляют собой функции только от α_1,α_2. Остальные компоненты тензоров напряжений и моментных напряжений ($\sigma_{3i},\sigma_{33},\mu_{3i},\mu_{33},i=1{,}2$) будут определяться из уравнений равновесия (движения) с учётом условий (8) о тонкостенности оболочки:

$$\sigma_{3i}=z\left[-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial(A_j\sigma_{ii})}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial(A_i\sigma_{ji})}{\partial\alpha_j}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\sigma_{ij}-\frac{\sigma_{i3}}{R_i}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\sigma_{jj}+\underline{\rho\frac{\partial^2u_i}{\partial t^2}}\right]+\frac{p_i^++p_i^-}{2},$$

$$\sigma_{33}=z\left[\left(\frac{\sigma_{11}}{R_1}+\frac{\sigma_{22}}{R_2}\right)-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial(A_2\sigma_{13})}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial(A_1\sigma_{23})}{\partial\alpha_2}+\underline{\rho\frac{\partial^2w}{\partial t^2}}\right]+$$

$$+\frac{p_3^++p_3^-}{2}, \tag{13}$$

$$\mu_{3i}=z\left[-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial(A_j\mu_{ii})}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial(A_i\mu_{ji})}{\partial\alpha_j}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\mu_{ij}-\frac{\mu_{i3}}{R_i}+\right.$$

$$+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\mu_{jj}-(-1)^j\sigma_{j3}+\underline{I\frac{\partial^2\Omega_i}{\partial t^2}}\Bigg]+(-1)^j\int_0^z\sigma_{3j}dz+\frac{m_i^+ + m_i^-}{2}\quad(i\neq j=1{,}2),$$

$$\mu_{33}=z\Bigg[\left(\frac{\mu_{11}}{R_1}+\frac{\mu_{22}}{R_2}\right)-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial(A_2\mu_{13})}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial(A_1\mu_{23})}{\partial\alpha_2}-$$

$$-(\sigma_{12}-\sigma_{21})+\underline{I\frac{\partial^2\Omega_3}{\partial t^2}}\Bigg]+\frac{m_3^+ + m_3^-}{2}.$$

Формулы (13) приведены для случая динамической задачи, в случае статики необходимо пропустить подчёркнутые члены.

3. Интегралные характеристики-усилия и моменты. Уравнения равновесия (движения) оболочки. Введём вместо напряжений и моментных напряжений интегральные характеристики по толщине тонкой (т.е. с учётом условий (8)) оболочки – усилия и моменты, отнесённые к единице длины координатных линий и приложенные к срединной поверхности оболочки:

$$T_{ii}=\int_{-h}^{h}\sigma_{ii}dz=2\sigma_{ii}h,\quad S_{ij}=\int_{-h}^{h}\sigma_{ij}dz=2\sigma_{ij}h,$$

$$N_{i3}=\int_{-h}^{h}\sigma_{i3}dz=2\sigma_{i3}h,\quad L_{ii}=\int_{-h}^{h}\mu_{ii}dz=2\mu_{ii}h,\tag{14}$$

$$L_{ij}=\int_{-h}^{h}\mu_{ij}dz=2\mu_{ij}h,\quad L_{i3}=\int_{-h}^{h}\mu_{i3}dz=2\mu_{i3}h\quad(i\neq j=1{,}2),$$

где T_{ii} – нормальные усилия; S_{ij} – касательные усилия; N_{i3} – перерезывающие усилия; L_{ij} – изгибающие моменты; L_{ii} и L_{i3} – крутящие моменты.

Из соотношений (14) получим формулы для определения напряжений $\sigma_{ii},\sigma_{ij},\sigma_{i3}$ и моментных напряжений $\mu_{ii},\mu_{ij},\mu_{i3}$ через усилия и моменты:

$$\sigma_{ii}=\frac{T_{ii}}{2h},\ \sigma_{ij}=\frac{S_{ij}}{2h},\ \sigma_{i3}=\frac{N_{i3}}{2h},$$
$$\mu_{ii}=\frac{L_{ii}}{2h},\ \mu_{ij}=\frac{L_{ij}}{2h},\ \mu_{i3}=\frac{L_{i3}}{2h}.\tag{15}$$

На основе формул (13) для $\sigma_{3i},\sigma_{33},\mu_{3i},\mu_{33}$, удовлетворяя граничным условиям (5) на $z=\pm h$, с учётом выражений (15), придем к дифференциальным уравнениям равновесия (движения):

$$\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial(A_jT_{ii})}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial(A_iS_{ji})}{\partial\alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}S_{ij}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}T_{jj}+\frac{N_{i3}}{R_i}=$$

$$=-(p_i^+ - p_i^-), \quad \left(2\rho h \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\right)$$

$$\left(\frac{T_{11}}{R_1}+\frac{T_{22}}{R_2}\right)-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial(A_2N_{13})}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial(A_1N_{23})}{\partial\alpha_2}=p_3^+ - p_3^-, \left(-2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)$$

$$\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial(A_jL_{ii})}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial(A_iL_{ji})}{\partial\alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}L_{ij}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}L_{jj}+ \qquad (16)$$

$$+\frac{L_{i3}}{R_i}+(-1)^j N_{j3}=-(m_i^+ - m_i^-)+(-1)^j h(p_j^+ + p_j^-), \quad \left(2Ih\frac{\partial^2\Omega_i}{\partial t^2}\right),$$

$$\frac{L_{11}}{R_1}+\frac{L_{22}}{R_2}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial(A_2L_{13})}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial(A_1L_{23})}{\partial\alpha_2}-(S_{12}-S_{21})=$$

$$=(m_3^+ - m_3^-), \quad \left(-2Ih\frac{\partial^2\Omega_3}{\partial t^2}\right),$$

где $i \neq j = 1{,}2$.

Подставив выражения для напряжений и моментных напряжений (15) в формулы (11), приходим к соотношениям упругости тонких оболочек по моментной теории упругости:

$$T_{ii}=\frac{2Eh}{1-\nu^2}(\Gamma_{ii}+\nu\Gamma_{jj}), \; S_{ij}=2h\left[(\mu+\alpha)\Gamma_{ij}+(\mu-\alpha)\Gamma_{ji}\right], \; N_{i3}=2G^*h\Gamma_{i3},$$

$$L_{ii}=2h\frac{2\gamma}{\beta+2\gamma}[2(\beta+\gamma)k_{ii}+\beta k_{jj}], \qquad (17)$$

$$L_{ij}=2h\left[(\gamma+\varepsilon)k_{ij}+(\gamma-\varepsilon)k_{ji}\right], \; L_{i3}=Bk_{i3} \;\; (i\neq j=1{,}2).$$

Уравнения равновесия (движения) (16), соотношения упругости (17) и геометрические соотношения (10) представляют собой систему основных уравнений тонких оболочек по моментной теории упругости. К этой системе уравнений следует добавить граничные условия. На той части (Γ') границы области срединной поверхности оболочки, где заданы усилия и моменты (например, для края, совпадающего с координатной линией α_2), граничные условия будут иметь вид:

$$T_{11}=T_{11}^*, \; S_{12}=S_{12}^*, \; N_{13}=N_{13}^*, L_{11}=L_{11}^*, L_{12}=L_{12}^*, L_{13}=L_{13}^*. \qquad (18)$$

На той части (Γ'') границы области срединной поверхности оболочки, где заданы перемещения и свободные повороты, граничные условия будут выражаться так:

$$u_1=u_1^*, \; u_2=u_2^*, \; w=w^*, \; \Omega_1=\Omega_1^*, \; \Omega_2=\Omega_2^*, \; \Omega_3=\Omega_3^*. \qquad (19)$$

В случае динамической задачи необходимо задавать и начальные условия. При $t = t_0$ задаются значения u_i, w, $\frac{\partial u_i}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$, Ω_k, $\frac{\partial \Omega_k}{\partial t}$ $(i = 1,2; k = 1,2,3)$.

Таким образом, модель тонких оболочек на основе моментной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений с деформационной концепцией «сдвиг плюс свободный поворот» построена. В случае задачи статики система уравнений (16), (17), (10) представляет собой систему дифференциальных уравнений двенадцатого порядка, при этом на каждом из торцов оболочки имеются по шесть граничных условий ((18) или (19)). В случае динамической задачи указанная система уравнений является системой гиперболического типа.

Отметим, что из общих уравнений и граничных условий для оболочек можно получить все зависимости для пластин и стержней как частные случаи.

В декартовой системе координат система уравнений (16), (17), (10) и граничные условия (18) или (19) распадаются на две независимые друг от друга граничные задачи для пластинки:

1) плоское напряжённое состояние в срединной плоскости пластинки,

2) изгиб пластинки от срединной её плоскости.

В [8, 9] деформации графена изучаются начиная с атомного уровня. Установлено, что деформация графена в континуальном описании представляет собой плоское напряжённое состояние в своей плоскости и изгиб от своей плоскости, причём определяющие системы этих деформаций совпадают с соответствующими системами уравнений пластинки по моментной теории упругости (т.е. с уравнениями (16), (17), (10) при $\frac{1}{R_i} = 0, i = 1,2$).

Понятно, что система уравнений (16), (17), (10) и граничные условия (18) или (19) в цилиндрической системе координат представляют континуальную модель нанотрубок.

4. Закон сохранения энергии. Энергетические теоремы. Если уравнения равновесия (движения) (16) умножить соответственно на u_i, w, Ω_i, Ω_3 $(i = 1,2)$ (на $\frac{\partial u_i}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$, $\frac{\partial \Omega_i}{\partial t}$, $\frac{\partial \Omega_3}{\partial t}$), сложить их и интегрировать по области (S) срединной поверхности оболочки, после некоторых преобразований придем к закону сохранения энергии в рамках построенной модели. В случае задач статики имеем

$$U_0 = \frac{1}{2}A, \quad U_0 = \iint\limits_{(S)} W_0 A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2, \tag{20}$$

$$A=\iint\limits_{(S)}\Big\{(p_1^+-p_1^-)\cdot u_1+(p_2^+-p_2^-)\cdot u_2+(p_3^+-p_3^-)\cdot w+$$

$$+[(m_1^+-m_1^-)-h(p_2^++p_2^-)]\cdot\Omega_1+[(m_2^+-m_2^-)+h(p_1^++p_1^-)]\cdot\Omega_2+$$

$$+(m_3^+-m_3^-)\cdot\Omega_3\Big\}A_1A_2d\alpha_1d\alpha_2+ \tag{21}$$

$$\oint\limits_{\Gamma}(T_{11}u_1+S_{12}u_2+N_{13}w+L_{11}\Omega_1+L_{12}\Omega_2+L_{13}\Omega_3)A_2d\alpha_2-$$

$$(S_{21}u_1+T_{22}u_2+N_{23}w+L_{21}\Omega_1+L_{22}\Omega_2+L_{23}\Omega_3)A_1d\alpha_1,$$

$$W_0=\frac{1}{2}\Big[\frac{2Eh}{1-\nu^2}(\Gamma_{11}^2+\Gamma_{22}^2+2\nu\Gamma_{11}\Gamma_{22})+2h(\mu+\alpha)(\Gamma_{12}^2+\Gamma_{21}^2)+4h(\mu-\alpha)\Gamma_{12}\Gamma_{21}+$$

$$+2hG^*(\Gamma_{13}^2+\Gamma_{23}^2)+2h\frac{4\gamma(\beta+\gamma)}{\beta+2\gamma}(k_{11}^2+k_{22}^2)+2h\frac{4\gamma\beta}{\beta+2\gamma}k_{11}k_{22}+ \tag{22}$$

$$+2h(\gamma+\varepsilon)(k_{12}^2+k_{21}^2)+4h(\gamma-\varepsilon)k_{12}k_{21}+2hB(k_{13}^2+k_{23}^2)\Big].$$

Здесь W_0 – поверхностная плотность потенциальной энергии деформации оболочки; U_0 – полная потенциальная энергия деформации оболочки; $\frac{1}{2}A$ – работа внешних усилий и моментов, приложенных к оболочке.

В случае динамической задачи получим уравнение сохранения мощностей:

$$\frac{d}{dt}(K_0+U_0)=\iint\limits_{(S)}\Big\{(p_1^+-p_1^-)\frac{\partial u_1}{\partial t}+(p_2^+-p_2^-)\frac{\partial u_2}{\partial t}+(p_3^+-p_3^-)\frac{\partial w}{\partial t}+$$

$$+[(m_1^+-m_1^-)-h(p_2^++p_2^-)]\frac{\partial\Omega_1}{\partial t}+[(m_2^+-m_2^-)+h(p_1^++p_1^-)]\frac{\partial\Omega_2}{\partial t}+$$

$$+(m_3^+-m_3^-)\frac{\partial\Omega_3}{\partial t}\Big\}A_1A_2d\alpha_1d\alpha_2+\int\limits_{\Gamma}(T_{11}\frac{\partial u_1}{\partial t}+S_{12}\frac{\partial u_2}{\partial t}+N_{13}\frac{\partial w}{\partial t}+L_{11}\frac{\partial\Omega_1}{\partial t}+ \tag{23}$$

$$+L_{12}\frac{\partial\Omega_2}{\partial t}+L_{13}\frac{\partial\Omega_3}{\partial t})A_2d\alpha_2-(S_{21}\frac{\partial u_1}{\partial t}+T_{22}\frac{\partial u_2}{\partial t}+N_{23}\frac{\partial w}{\partial t}+L_{21}\frac{\partial\Omega_1}{\partial t}+$$

$$+L_{22}\frac{\partial\Omega_2}{\partial t}+L_{23}\frac{\partial\Omega_3}{\partial t})A_1d\alpha_1,$$

где K_0 – полная кинетическая энергия движения оболочки:

$$K_0=\frac{1}{2}\iint\limits_{(S)}\Big[2\rho h\Big(\frac{\partial u_1}{\partial t}\Big)^2+2\rho h\Big(\frac{\partial u_2}{\partial t}\Big)^2+2\rho h\Big(\frac{\partial w}{\partial t}\Big)^2+2Ih\Big(\frac{\partial\Omega_1}{\partial t}\Big)^2+$$

$$+2Ih\Big(\frac{\partial\Omega_2}{\partial t}\Big)^2+2Ih\Big(\frac{\partial\Omega_3}{\partial t}\Big)^2\Big]A_1A_2d\alpha_1d\alpha_2. \tag{24}$$

Уравнения сохранения энергий (20) или (23) можно использовать для доказательства теоремы единственности как для краевой задачи статики оболочек, так и для начально-краевой задачи в случае динамики оболочек.

Отметим, что поверхностную плотность потенциальной энергии деформации оболочки можем выразить и через усилия-моменты $(W_0^* = W_0)$. Легко убедиться, что для построенной модели оболочек имеют место как формулы типа Грина $(T_{11} = \frac{\partial W_0}{\partial \Gamma_{11}},...)$, так и формулы типа Кастилиано $(\Gamma_{11} = \frac{\partial W_0^*}{\partial T_{11}},...)$.

Используя ход преобразований при получении уравнений сохранения энергии, аналогичными преобразованиями можем доказать теорему взаимности работ $(A_{12} = A_{21})$ для построенной модели оболочек.

Отметим также, что для построенной модели оболочек устанавливаются вариационные принципы типа Лагранжа, Кастилиано, Ху-Вашицу и Гамильтона.

Ширакский государственный университет им М. Налбандяна
e-mail: s_sargsyan@yahoo.com

Член-корреспондент НАН РА С. О. Саркисян

Тонкие оболочки по моментной теории упругости как деформационные модели наноматериалов

На основе уравнений трёхмерной моментной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений на базе достаточно общих гипотез построена прикладная модель тонких оболочек, подчиняющаяся деформационному принципу «сдвиг плюс независимый поворот». Доказываются энергетические теоремы для указанной модели и устанавливаются вариационные принципы. Модели тонких пластин и стержней получены как частные случаи модели оболочек.

ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ս. Հ. Սարգսյան

Առաձգականության մոմենտային տեսությամբ բարակ թաղանթների՝ որպես նանոնյութերի դեֆորմացիոն մոդելներ

Աշխատանքում տեղափոխությունների և պտույտների անկախ դաշտերով առաձգականության եռաչափ տեսության հիման վրա, բավական ընդհանուր բնույթի

վարկածների օգնությամբ, կառուցվում է բարակ թաղանթների կիրառական մոդելը, որն արտահայտում է «սահք գումարած անկախ պտույտ» դեֆորմացիոն սկզբունքը: Այս մոդելի համար ապացուցվում են էներգետիկ թեորեմները, և հիմնավորվում վարիացիոն սկզբունքները: Բարակ սալերի և ձողերի մոդելները ստացվում են թաղանթի մոդելից որպես մասնավոր դեպքեր:

Corresponding member of NAS RA S. H. Sargsyan

Thin Shells According to the Moment Theory of Elasticity as Deformation Models of Nanomaterials

In this paper, on the basis of the equations of the three-dimensional moment theory of elasticity with independent fields of displacements and rotations, through the help of some rather general hypotheses, an applied model of thin shells is constructed that obeys the deformation principle of «shear plus independent rotation». For this model, energy theorems are proved and variational principles are established. Models of thin plates and beams are obtained as special cases of the shell model.

Литература

1. *Yakobson B. I., Brabec C. J., Bernholc J.* – Physical Review Letters. 1996. V. 75. № 14. P. 2511-2514.
2. *Ru C. Q.* – Physical Review B. 2000. V. 62. № 15. P. 9973-9976.
3. *Иванова Е. А., Кривцов А. М., Морозов Н. Ф. и др.* – Доклады Академии наук России. 2008. Т. 391. № 6. С. 764-768.
4. *Кривцов А. М.* Теоретическая механика. Упругие свойства одноатомных и двухатомных кристаллов. СПб. Изд-во Политехн. ун-та. 2009. 127 с.
5. *Панин В. Е.* – Физическая мезомеханика. 1998. Т. 1. № 1. С. 5-22.
6. *Nowacki W.* Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford. Pergamon. 1986. 383 p.
7. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М. Наука. 1976. 512 с.
8. *Саркисян С. О.* – Физическая мезомеханика. 2019. Т. 22. № 5. С. 28-33.
9. *Саркисян С. О.* – Доклады НАН РА. 2020. Т. 120. № 2. С. 124-135.