ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր
Том 120 2020 № 3
Volume

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3

Л. Г. Гулгазарян[1], П. Р. Амбарцумян[2]

Динамическая трёхмерная задача теории упругости двуслойной пластинки при наличии вязкого сопротивления

(Представлено академиком Л. А. Агаловяном 21/VI 2020)

Ключевые слова: *3D динамическая задача, слоистая пластинка, асимптотический метод, сейсмология, предсказание землетрясений.*

Введение. В настоящее время прогнозирование землетрясений является одной из наиболее сложных и актуальных задач. Во многих исследованиях основное внимание уделено оценке сейсмической опасности региона [1, 2], однако более актуально предсказание времени ожидаемого землетрясения. Для этого необходимо определить напряженно-деформированное состояние литосферной плиты или блока земной коры при быстротечных динамических процессах, для исследования которых необходимо решить уравнения движения и соотношения упругости при неклассических граничных условиях: лицевая поверхность свободна и заданы значения компонент вектора перемещения, гармонически зависящие от времени, на лицевой поверхности или на поверхности контакта между определенными слоями (данные измерений, полученных на сейсмостанциях, а также с применением инклинометров и других измерительных средств).

Неклассическая квазистатическая задача для однослойных и многослойных пластин с учётом влияния изменения температурного поля, когда компоненты перемещения заданы на лицевой поверхности пакета, решена в [3, 4]. Та же задача решена для слоистого пакета, когда данные измерений сняты с поверхности контакта между слоями с номерами k и (k+1) [5]. Динамическая задача для слоистого пакета решена в [6].

В данной работе решена динамическая задача для двуслойного пакета при наличии вязкого сопротивления в обоих слоях. Значения компонент вектора перемещения сняты с поверхности контакта между слоями с использованием наклономеров и других измерительных средств.

1. Постановка задачи. Рассматриваются вынужденные колебания двуслойной ортотропной пластинки (рис. 1), $D = \{(x, y, z): (x, y) \in D_0, 0 \leq z \leq h_1 + h_2, h = h_1 + h_2 \ll l\}$, при наличии вязкого сопротивления в обоих слоях, где D_0 – лицевая поверхность первого слоя, l – ее характерный тангенциальный размер (наименьший из линейных размеров поверхности D_0).

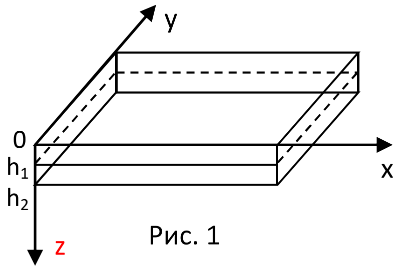

Рис. 1

Требуется найти ненулевые решения динамических уравнений пространственной задачи теории упругости для ортотропных сред при неклассических краевых условиях [7]. Имеем:
уравнения движения

$$\frac{\partial \sigma_{xx}^{(j)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(j)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}^{(j)}}{\partial z} - k_j \frac{\partial u^{(j)}}{\partial t} = \rho^{(j)} \frac{\partial^2 u^{(j)}}{\partial t^2} \tag{1.1}$$
$$(x, y, z;\ u, v, w), \quad j = I, II;$$

уравнения состояния (соотношения упругости) для ортотропного тела

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u^{(j)}}{\partial x} = a_{11}^{(j)} \sigma_{xx}^{(j)} + a_{12}^{(j)} \sigma_{yy}^{(j)} + a_{13}^{(j)} \sigma_{zz}^{(j)}, \quad \frac{\partial u^{(j)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(j)}}{\partial x} = a_{66} \sigma_{xy}^{(j)}, \\
&\frac{\partial v^{(j)}}{\partial y} = a_{12}^{(j)} \sigma_{xx}^{(j)} + a_{22}^{(j)} \sigma_{yy}^{(j)} + a_{23}^{(j)} \sigma_{zz}^{(j)}, \quad \frac{\partial w^{(j)}}{\partial x} + \frac{\partial u^{(j)}}{\partial z} = a_{55} \sigma_{xz}^{(j)}, \\
&\frac{\partial w^{(j)}}{\partial z} = a_{13}^{(j)} \sigma_{xx}^{(j)} + a_{23}^{(j)} \sigma_{yy}^{(j)} + a_{33}^{(j)} \sigma_{zz}^{(j)}, \quad \frac{\partial w^{(j)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(j)}}{\partial z} = a_{44} \sigma_{yz}^{(j)},
\end{aligned} \tag{1.2}$$

где k_j – коэффициенты вязкого сопротивления слоев, $\rho^{(j)}$ – плотности слоев, $a_{ik}^{(j)}$ – постоянные упругости ($a_{ik}^{(j)} = a_{ki}^{(j)}$), j – номер слоя.

На лицевой поверхности $z = 0$ заданы условия:

$$\sigma_{xz}^{I}(x, y, 0, t) = 0, \quad \sigma_{yz}^{I}(x, y, 0, t) = 0, \quad \sigma_{zz}^{I}(x, y, 0, t) = 0. \tag{1.3}$$

На поверхности контакта между слоями известны значения перемещений точек поверхности контакта как данные инклинометров или других измерительных средств:

$$u^{I}(x, y, h_1, t) = u^{II}(x, y, h_1, t) = u^{+}(x, y) \sin\Omega t \quad (u, v, w), \tag{1.4}$$

где Ω – частота колебаний точек поверхности контакта между слоями пластинки.

На поверхности контакта между слоями должны выполняться условия полного контакта

$$\sigma_{xz}^{I}(x, y, h_1, t) = \sigma_{xz}^{II}(x, y, h_1, t) \quad (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}), \tag{1.5}$$
$$u^{I}(x, y, h_1, t) = u^{II}(x, y, h_1, t) \quad (u, v, w).$$

В [3] показано, что сформулированная неклассическая краевая задача всегда имеет решение, более того, всегда существует классическая краевая задача, решением которой оно является.

2. Общее асимптотическое решение задачи. В уравнениях (1.1), (1.2) перейдем к безразмерным координатам и перемещениям по формулам

$$\xi = x/l,\ \eta = y/l,\ \zeta = z/h,$$
$$U^I = u^I/l,\quad V^I = v^I/l,\quad W^I = w^I/l,\qquad (\mathrm{I,II}). \tag{2.1}$$

Решение преобразованных уравнений будем искать в виде

$$Q^{(j)}(x,y,z,t) = Q_1^{(j)}(x,y,z)\sin\Omega t + Q_2^{(j)}(x,y,z)\cos\Omega t, \tag{2.2}$$

где $Q^{(j)}$ – любое из напряжений и перемещений. В результате получается сингулярно возмущенная малым параметром $\varepsilon = h/l$ система относительно $Q_i^{(j)}$:

$$\frac{\partial\sigma_{xx,1}^{(j)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{xy,1}^{(j)}}{\partial\eta} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{xz,1}^{(j)}}{\partial\zeta} + \varepsilon^{-2}\rho^{(j)}(\Omega_*)^2U_1^{(j)} + 2K_j\varepsilon^{-2}\Omega_*U_2^{(j)} = 0,$$
$$\frac{\partial\sigma_{xx,2}^{(j)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{xy,2}^{(j)}}{\partial\eta} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{xz,2}^{(j)}}{\partial\zeta} + \varepsilon^{-2}\rho^{(j)}(\Omega_*)^2U_2^{(j)} - 2K_j\varepsilon^{-2}\Omega_*U_1^{(j)} = 0,$$
$$\frac{\partial\sigma_{xy,1}^{(j)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{yy,1}^{(j)}}{\partial\eta} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{yz,1}^{(j)}}{\partial\zeta} + \varepsilon^{-2}\rho^{(j)}(\Omega_*)^2V_1^{(j)} + 2K_j\varepsilon^{-2}\Omega_*V_2^{(j)} = 0,$$
$$\frac{\partial\sigma_{xy,2}^{(j)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{yy,2}^{(j)}}{\partial\eta} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{yz,2}^{(j)}}{\partial\zeta} + \varepsilon^{-2}\rho^{(j)}(\Omega_*)^2V_2^{(j)} - 2K_j\varepsilon^{-2}\Omega_*V_1^{(j)} = 0,$$
$$\frac{\partial\sigma_{xz,1}^{(j)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{yz,1}^{(j)}}{\partial\eta} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{zz,1}^{(j)}}{\partial\zeta} + \varepsilon^{-2}\rho^{(j)}(\Omega_*)^2W_1^{(j)} + 2K_j\varepsilon^{-2}\Omega_*W_2^{(j)} = 0,$$
$$\frac{\partial\sigma_{xz,2}^{(j)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{yz,2}^{(j)}}{\partial\eta} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{zz,2}^{(j)}}{\partial\zeta} + \varepsilon^{-2}\rho^{(j)}(\Omega_*)^2W_2^{(j)} - 2K_j\varepsilon^{-2}\Omega_*W_1^{(j)} = 0,$$
$$\frac{\partial U_i^{(j)}}{\partial\xi} = a_{11}^{(j)}\sigma_{xx,i}^{(j)} + a_{12}^{(j)}\sigma_{yy,i}^{(j)} + a_{13}^{(j)}\sigma_{zz,i}^{(j)},\qquad \frac{\partial U_i^{(j)}}{\partial\eta} + \frac{\partial V_i^{(j)}}{\partial\xi} = a_{66}^{(j)}\sigma_{xy,i}^{(j)},$$
$$j = I, II;\quad i = 1,2, \tag{2.3}$$
$$\frac{\partial V_i^{(j)}}{\partial\eta} = a_{12}^{(j)}\sigma_{xx,i}^{(j)} + a_{22}^{(j)}\sigma_{yy,i}^{(j)} + a_{23}^{(j)}\sigma_{zz,i}^{(j)},\qquad \frac{\partial W_i^{(j)}}{\partial\xi} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial U_i^{(j)}}{\partial\zeta} = a_{55}^{(j)}\sigma_{xz,i}^{(j)},$$
$$\varepsilon^{-1}\frac{\partial W_i^{(j)}}{\partial\zeta} = a_{13}^{(j)}\sigma_{xx,i}^{(j)} + a_{23}^{(j)}\sigma_{yy,i}^{(j)} + a_{33}^{(j)}\sigma_{zz,i}^{(j)},$$
$$\frac{\partial W_i^{(j)}}{\partial\eta} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial V_i^{(j)}}{\partial\zeta} = a_{44}^{(j)}\sigma_{yz,i}^{(j)},\ \Omega_*^2 = h^2\Omega^2,\ 2K_j = k_jh.$$

Решение внешней задачи будем искать в виде асимптотического представления

$$\sigma_{\alpha\beta,i}^{(j)} = \varepsilon^{-1+s}\sigma_{\alpha\beta,i}^{(j,s)},\quad \alpha,\beta = x,y,z;\ s = \overline{0,N}, \tag{2.4}$$
$$\left(U_i^{(j)}, V_i^{(j)}, W_i^{(j)}\right) = \varepsilon^s\left(U_i^{(j,s)}, V_i^{(j,s)}, W_i^{(j,s)}\right),\quad j = I, II;\quad i = 1,2.$$

Обозначение $s = \overline{0,N}$ здесь и далее означает, что по немому (повторяющемуся) индексу s происходит суммирование в пределах целочисленных значений $0, N$.

Из асимптотики (2.4) следует, что в отличие от классической теории для данного класса задач все компоненты тензора напряжений асимптотически равноправны, равноправны также перемещения, и допущения классической теории пластин и оболочек здесь не применимы.

После подстановки (2.4) в преобразованные уравнения и соотношения упругости (2.3), компоненты тензора напряжений $\sigma_{\alpha\beta,i}^{(j,s)}$ можно выразить через $U_i^{(j,s)}, V_i^{(j,s)}, W_i^{(j,s)}$ по формулам:

$$\sigma_{xx,i}^{(j,s)} = -A_{23}^{(j)}\frac{\partial W_i^{(j,s)}}{\partial\zeta} + A_{22}^{(j)}\frac{\partial U_i^{(j,s-1)}}{\partial\xi} - A_{12}^{(j)}\frac{\partial V_i^{(j,s-1)}}{\partial\eta},$$

$$\sigma_{yy,i}^{(j,s)} = -A_{13}^{(j)}\frac{\partial W_i^{(j,s)}}{\partial\zeta} - A_{12}^{(j)}\frac{\partial U_i^{(j,s-1)}}{\partial\xi} + A_{33}^{(j)}\frac{\partial V_i^{(j,s-1)}}{\partial\eta},$$

$$\sigma_{zz,i}^{(j,s)} = -A_{11}^{(j)}\frac{\partial W_i^{(j,s)}}{\partial\zeta} - A_{23}^{(j)}\frac{\partial U_i^{(j,s-1)}}{\partial\xi} - A_{13}^{(j)}\frac{\partial V_i^{j,(s-1)}}{\partial\eta}, \qquad (2.5)$$

$$\sigma_{xy,i}^{(j,s)} = \frac{1}{a_{66}^{(j)}}\left[\frac{\partial U_i^{(j,s-1)}}{\partial\eta} + \frac{\partial V_i^{(j,s-1)}}{\partial\xi}\right],\ \sigma_{xz,i}^{(j,s)} = \frac{1}{a_{55}^{(j)}}\left[\frac{\partial U_i^{(j,s)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial W_i^{(j,s-1)}}{\partial\xi}\right],$$

$$\sigma_{yz,i}^{(j,s)} = \frac{1}{a_{44}^{(j)}}\left[\frac{\partial V_i^{(j,s)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial W_i^{(j,s-1)}}{\partial\eta}\right], \qquad j = I, II;\ i = 1,2,$$

где

$$A_{11}^{(j)} = \frac{a_{11}^{(j)}a_{22}^{(j)} - a_{12}^{(j)2}}{\Delta^{(j)}},\quad A_{22}^{(j)} = \frac{a_{22}^{(j)}a_{33}^{(j)} - a_{23}^{(j)2}}{\Delta^{(j)}},\ A_{33}^{(j)} = \frac{a_{11}^{(j)}a_{33}^{(j)} - a_{13}^{(j)2}}{\Delta^{(j)}},$$

$$A_{12}^{(j)} = \frac{a_{33}^{(j)}a_{12}^{(j)} - a_{12}^{(j)}a_{23}^{(j)}}{\Delta^{(j)}},\ A_{13}^{(j)} = \frac{a_{11}^{(j)}a_{23}^{(j)} - a_{12}^{(j)}a_{13}^{(j)}}{\Delta^{(j)}},\ A_{23}^{(j)} = \frac{a_{22}^{(j)}a_{13}^{(j)} - a_{12}^{(j)}a_{23}^{(j)}}{\Delta^{(j)}},$$

$$\Delta^{(j)} = a_{11}^{(j)}a_{22}^{(j)}a_{33}^{(j)} + 2a_{12}^{(j)}a_{13}^{(j)}a_{23}^{(j)} - a_{22}^{(j)}a_{13}^{(j)\,2} - a_{11}^{(j)}a_{23}^{(j)\,2} - a_{33}^{(j)}a_{12}^{(j)\,2}.$$

Для определения функций $U_i^{(j,s)}, V_i^{(j,s)}, W_i^{(j,s)}, (j = I, II;\ i = 1,2)$ получаются уравнения:

$$\frac{\partial^2 U_1^{(j,s)}}{\partial\zeta^2} + a_{55}^{(j)}\left(\rho^{(j)}(\Omega_*)^2 U_1^{(j,s)} + 2K_j\Omega_* U_2^{(j,s)}\right) = R_{U1}^{(j,s)},$$

$$\frac{\partial^2 U_2^{(j,s)}}{\partial\zeta^2} + a_{55}^{(j)}\left(\rho^{(j)}(\Omega_*)^2 U_2^{(j,s)} - 2K_j\Omega_* U_1^{(j,s)}\right) = R_{U2}^{(j,s)},$$

$$\frac{\partial^2 V_1^{(j,s)}}{\partial\zeta^2} + a_{44}^{(j)}\left(\rho^{(j)}(\Omega_*)^2 V_1^{(j,s)} + 2K_j\Omega_* V_2^{(j,s)}\right) = R_{V1}^{(j,s)}, \qquad (2.6)$$

$$\frac{\partial^2 V_2^{(j,s)}}{\partial\zeta^2} + a_{44}^{(j)}\left(\rho^{(j)}(\Omega_*)^2 V_2^{(j,s)} - 2K_j\Omega_* V_1^{(j,s)}\right) = R_{V2}^{(j,s)},$$

$$A_{11}^{(j)}\frac{\partial^2 W_1^{(j,s)}}{\partial\zeta^2} + \rho^{(j)}(\Omega_*)^2 W_1^{(j,s)} + 2K_j\Omega_* W_2^{(j,s)} = R_{W1}^{(j,s)},$$

$$A_{11}^{(j)}\frac{\partial^2 W_2^{(j,s)}}{\partial\zeta^2} + \rho^{(j)}(\Omega_*)^2 W_2^{(j,s)} - 2K_j\Omega_* W_1^{(j,s)} = R_{W2}^{(j,s)},$$

где

$$R_{Ui}^{(j,s)} = -\frac{\partial^2 W_i^{(j,s-1)}}{\partial\xi\partial\zeta} - a_{55}^{(j)}\left[\frac{\partial\sigma_{xx,i}^{(j,s-1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{xy,i}^{(j,s-1)}}{\partial\eta}\right],\ j = I, II;\ i = 1,2,$$

$$R_{Vi}^{(j,s)} = -\frac{\partial^2 W_j^{(s-1)}}{\partial\eta\partial\zeta} - a_{44}^{(j)}\left[\frac{\partial\sigma_{xy,i}^{(j,s-1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{yy,i}^{(j,s-1)}}{\partial\eta}\right], \qquad (2.7)$$

$$R_{Wj}^{(s)} = A_{23}^{(j)}\frac{\partial^2 U_i^{(j,s-1)}}{\partial\xi\partial\zeta} + A_{13}^{(j)}\frac{\partial^2 V_i^{(j,s-1)}}{\partial\eta\partial\zeta} - \frac{\partial\sigma_{xz,i}^{(j,s-1)}}{\partial\xi} - \frac{\partial\sigma_{yz,i}^{(j,s-1)}}{\partial\eta}.$$

Очевидно, что $R_{Ui}^{(j,0)} = R_{Vi}^{(j,0)} = R_{Wi}^{(j,0)} = 0$; $(j = I, II;\ i = 1,2)$.

Из (2.6) следуют

$$U_2^{(j,s)} = -\frac{1}{2K_j\Omega_* a_{55}^{(j)}}\left(\frac{\partial^2 U_1^{(j,s)}}{\partial\zeta^2} + a_{55}^{(j)}\rho^{(j)}(\Omega_*)^2 U_1^{(j,s)} - R_{U1}^{(j,s)}\right),$$

$$V_2^{(j,s)} = -\frac{1}{2K_j\Omega_* a_{44}^{(j)}}\left(\frac{\partial^2 V_1^{(j,s)}}{\partial\zeta^2} + a_{44}^{(j)}\rho^{(j)}(\Omega_*)^2 V_1^{(j,s)} - R_{V1}^{(j,s)}\right), \qquad (2.8)$$

$$W_2^{(j,s)} = -\frac{1}{2K_j\Omega_*}\left(A_{11}^{(j)}\frac{\partial^2 W_1^{(j,s)}}{\partial\zeta^2} + \rho^{(j)}(\Omega_*)^2 W_1^{(j,s)} - R_{Wi}^{(j,s)}\right),$$

а также уравнения

$$\frac{\partial^4 U_1^{(j,s)}}{\partial\zeta^4} + 2a_{55}^{(j)}\rho^{(j)}(\Omega_*)^2\frac{\partial^2 U_1^{(j,s)}}{\partial\zeta^2} + a_{55}^{(j)\,2}\left(\rho^{(j)\,2}(\Omega_*)^2 + 4K_j^2\right)(\Omega_*)^2 U_1^{(j,s)} =$$
$$\frac{\partial^2 R_{U1}^{(j,s)}}{\partial\zeta^2} + a_{55}^{(j)}\rho^{(j)}(\Omega_*)^2 R_{U1}^{(j,s)} - 2K_j a_{55}^{(j)}\Omega_* R_{U2}^{(j,s)},$$

$$\frac{\partial^4 V_1^{(j,s)}}{\partial\zeta^4} + 2a_{44}^{(j)}(\Omega_*)^2\frac{\partial^2 V_1^{(j,s)}}{\partial\zeta^2} + a_{44}^{(j)\,2}\left(\rho^{(j)\,2}(\Omega_*)^2 + 4K_j^2\right)(\Omega_*)^2 V_1^{(j,s)} =$$
$$\frac{\partial^2 R_{V1}^{(j,s)}}{\partial\zeta^2} + a_{44}^{(j)}\rho^{(j)}(\Omega_*)^2 R_{V1}^{j,(s)} - 2K_j a_{44}^{(j)}\Omega_* R_{V2}^{(j,s)}, \qquad (2.9)$$

$$\frac{\partial^4 W_1^{(j,s)}}{\partial\zeta^4} + \frac{2\,\rho^{(j)}(\Omega_*)^2}{A_{11}^{(j)}}\frac{\partial^2 W_1^{(j,s)}}{\partial\zeta^2} + \frac{1}{A_{11}^{(j)\,2}}\left(\rho^{(j)\,2}(\Omega_*)^2 + 4K_j^2\right)(\Omega_*)^2 W_1^{(j,s)} =$$
$$\frac{1}{A_{11}^{(j)}}\frac{\partial^2 R_{W1}^{(j,s)}}{\partial\zeta^2} + \frac{\rho^{(j)}(\Omega_*)^2}{A_{11}^{(j)\,2}} R_{W1}^{(j,s)} - \frac{2K_j\Omega_*}{A_{11}^{(j)\,2}} R_{W2}^{(j,s)}.$$

Решениями уравнений (2.9) являются:

$$U_1^{(j,s)} = U_{1о}^{(j,s)}(\xi,\eta,\zeta) + U_{1ч}^{(j,s)}(\xi,\eta,\zeta) \quad (U,V,W), \qquad (2.10)$$

где величины с индексом “о” – решения однородных, а с индексом “ч” – частных неоднородных уравнений (2.9).

Решениями однородных уравнений являются:

$$U_{1о}^{(j,s)}(\xi,\eta,\zeta) = C_{U1}^{(j,s)}(\xi,\eta)\varphi_{1U}^{(j)} + C_{U2}^{(j,s)}(\xi,\eta)\varphi_{2U}^{(j)} + C_{U3}^{(j,s)}(\xi,\eta)\varphi_{3U}^{(j)}$$
$$+C_{U4}^{(j,s)}(\xi,\eta)\varphi_{4U}^{(j)}, \qquad (U,V,W), \qquad (2.11)$$

где

$$\varphi_{1U}^{(j)} = ch\,\gamma_U^j\zeta\cos\delta_U^j\zeta, \quad \varphi_{2U}^{(j)} = sh\gamma_U^j\zeta\sin\delta_U^j\zeta,$$
$$\varphi_{3U}^{(j)} = ch\,\gamma_U^j\zeta\,\sin\delta_U^j\zeta, \quad \varphi_{4U}^{(j)} = sh\,\gamma_U^j\zeta\cos\delta_U^j\zeta,$$

$$\gamma_U^j = \sqrt{\frac{a_{55}^{(j)}\Omega_*}{2}\left(\sqrt{\rho^{(j)\,2}(\Omega_*)^2 + 4K_j^2} - \rho^{(j)}\Omega_*\right)},$$

$$\delta_U^j = \sqrt{\frac{a_{55}^{(j)}\Omega_*}{2}\left(\sqrt{\rho^{(j)\,2}(\Omega_*)^2 + 4K_j^2} + \rho^{(j)}\Omega_*\right)},$$

$$(U,V,W;a_{55},a_{44},1/A_{11}).$$

Одновременно имеем

$$U_2^{(j,s)} = U_{2о}^{(j,s)}(\xi,\eta,\zeta) + U_{2ч}^{(j,s)}(\xi,\eta,\zeta) \qquad (U,V,W),$$

$$U_{2о}^{(j,s)}(\xi,\eta,\zeta) = -C_{U1}^{(j,s)}(\xi,\eta)\varphi_{2U}^{(j)} + C_{U2}^{(j,s)}(\xi,\eta)\varphi_{1U}^{(j)} + C_{U3}^{(j,s)}(\xi,\eta)\varphi_{4U}^{(j)} -$$
$$C_{U4}^{(j,s)}(\xi,\eta)\varphi_{3U}^{(j)}, \qquad (2.12)$$

$$\sigma_{xz,1}^{(j,s)} = \frac{1}{a_{55}^{(j)}}[C_{U1}^{(j,s)}\left(\gamma_U^j\varphi_{4U}^{(j)} - \delta_U^j\varphi_{3U}^{(j)}\right) + C_{U2}^{(j,s)}\left(\gamma_U^j\varphi_{3U}^{(j)} + \delta_U^j\varphi_{4U}^{(j)}\right) +$$
$$C_{U3}^{(j,s)}\left(\gamma_U^j\varphi_{2U}^{(j)} + \delta_U^j\varphi_{1U}^{(j)}\right) + C_{U4}^{(j,s)}\left(\gamma_U^j\varphi_{1U}^{(j)} - \delta_U^j\varphi_{2U}^{(j)}\right)] + \sigma_{xz,1ч}^{(j,s)}(\xi,\eta,\zeta),$$
$$\sigma_{xz,2}^{(j,s)} = \frac{1}{a_{55}^{(j)}}[-C_{U1}^{(j,s)}\left(\gamma_U^j\varphi_{3U}^{(j)} + \delta_U^j\varphi_{4U}^{(j)}\right) + C_{U2}^{(j,s)}\left(\gamma_U^j\varphi_{4U}^{(j)} - \delta_U^j\varphi_{3U}^{(j)}\right) +$$
$$C_{U3}^{(j,s)}\left(\gamma_U^j\varphi_{1U}^{(j)} - \delta_U^j\varphi_{2U}^{(j)}\right) - C_{U4}^{(j,s)}\left(\gamma_U^j\varphi_{2U}^{(j)} + \delta_U^j\varphi_{1U}^{(j)}\right)] + \sigma_{xz,2\,ч}^{(j,s)}(\xi,\eta,\zeta),$$
$$U_{2ч}^{(j,s)}(\xi,\eta,\zeta) = -\frac{1}{2K_j\Omega_* a_{55}^{(j)}}\left(\frac{\partial^2 U_{1ч}^{(j,s)}}{\partial\zeta^2} + a_{55}^{(j)}(\Omega_*)^2 U_{1ч}^{(j,s)} - R_{U1}^{(j,s)}\right),$$
$$\sigma_{xz,iч}^{(j,s)} = \frac{1}{a_{55}^{(j)}}\left[\frac{\partial U_{iч}^{(j,s)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial W_i^{(j,s-1)}}{\partial\xi}\right],$$
$$(x,y,z;U,V,W;a_{55},a_{44},1/A_{11};\quad j = I,II;\quad i = 1,2)$$

Удовлетворив граничным условиям (1.3)-(1.5), получим алгебраические системы относительно неизвестных функций $C_{U1}^{(j,s)}, C_{U2}^{(j,s)}, C_{U3}^{(j,s)}, C_{U4}^{(j,s)}$ $(U,V,W;\ j = I,II)$. Системы будут иметь конечные решения, если определители этих систем

$$\Delta_U = \cos(2\delta_U^I\zeta_1) + ch(2\,\gamma_U^I\zeta_1),$$
$$\zeta_1 = \frac{h_1}{h},(U,V,W;a_{55},a_{44},1/A_{11}) \qquad (2.13)$$

отличны от нуля: $\Delta_U \neq 0,(U,V,W)$.

После решения этих систем

для первого слоя:

$$U_{1о}^{(I,s)}(\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{({\delta_U^I}^2 + {\gamma_U^I}^2)\Delta_U}[a_{55}^{(I)}\left(\delta_U^I T_{1U}^{(s)} + \gamma_U^I T_{2U}^{(s)}\right) \times$$
$$\left(ch\,\gamma_U^I(\zeta - 2\zeta_1)\sin\delta_U^I\zeta + ch\,\gamma_U^I\zeta sin\delta_U^I(\zeta - 2\zeta_1)\right) +$$
$$a_{55}^{(I)}\left(\gamma_U^I T_{1U}^{(s)} - \delta_U^I T_{2U}^{(s)}\right)(\sin\delta_U^I(\zeta - 2\zeta_1)\,\mathrm{sh}\,\gamma_U^I\zeta +$$
$$\cos\delta_U^I\zeta sh\gamma_U^I(\zeta - 2\zeta_1)) + ({\delta_U^I}^2 + {\gamma_U^I}^2)(T_{3U}^{(s)} \times$$
$$(cos\delta_U^I(\zeta + \zeta_1)ch\gamma_U^I(\zeta - \zeta_1) + cos\delta_U^I(\zeta - \zeta_1)ch\gamma_U^I(\zeta + \zeta_1)) +$$
$$T_{4U}^{(s)}(sin\delta_U^I(\zeta + \zeta_1)sh\gamma_U^I(\zeta - \zeta_1) + sin\delta_U^I(\zeta - \zeta_1)sh\gamma_U^I(\zeta + \zeta_1)))],$$

$$U_{2о}^{(I,s)}(\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{({\delta_U^I}^2 + {\gamma_U^I}^2)\Delta_U}[a_{55}^{(I)}\left(\delta_U^I T_{2U}^{(s)} - \gamma_U^I T_{1U}^{(s)}\right) \times \qquad (2.14)$$
$$\left(ch\,\gamma_U^I(\zeta - 2\zeta_1)\sin\delta_U^I\zeta + ch\,\gamma_U^I\zeta sin\delta_U^I(\zeta - 2\zeta_1)\right) -$$
$$a_{55}^{(I)}\left(\gamma_U^I T_{2U}^{(s)} + \delta_U^I T_{1U}^{(s)}\right)(\sin\delta_U^I(\zeta - 2\zeta_1)\,\mathrm{sh}\,\gamma_U^I\zeta +$$
$$\cos\delta_U^I\zeta sh\gamma_U^I(\zeta - 2\zeta_1)) + ({\delta_U^I}^2 + {\gamma_U^I}^2)(T_{3U}^{(s)} \times$$
$$(sin\delta_U^I(\zeta + \zeta_1)sh\gamma_U^I(\zeta - \zeta_1) + sin\delta_U^I(\zeta - \zeta_1)sh\gamma_U^I(\zeta + \zeta_1)) +$$
$$T_{4U}^{(s)}(cos\delta_U^I(\zeta + \zeta_1)ch\gamma_U^I(\zeta - \zeta_1) + cos\delta_U^I(\zeta - \zeta_1)ch\gamma_U^I(\zeta + \zeta_1)))],$$
$$T_{1U}^{(s)} = -\sigma_{xz,1ч}^{(I,s)}(\zeta = 0), T_{2U}^{(s)} = -\sigma_{xz,2ч}^{(I,s)}(\zeta = 0),$$

$$T_{3U}^{(s)} = U^{(+,s)} - U_{1ч}^{(I,s)}(\zeta = \zeta_1), U^{(+,0)} = \frac{u^+}{l}\ , U^{(+,s)} = 0, s \neq 0,$$
$$T_{4U}^{(s)} = -U_{2ч}^{(I,s)}(\zeta = \zeta_1)$$
$$(x, y, z; U, V, W; a_{55}, a_{44}, 1/A_{11});$$

для второго слоя:

$$U_{1о}^{(II,s)}(\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{a_{55}^{I}(\delta_U^{II\ 2} + \gamma_U^{II\ 2})\Delta_U}[a_{55}^{(I)}\left(\cos(2\delta_U^I\zeta_1) + ch(2\,\gamma_U^I\zeta_1)\right) \times$$
$$((\delta_U^{II\ 2} + \gamma_U^{II\ 2})\left(T_{3U}^{(s)} - T_{5U}^{(s)}\right)cos\delta_U^{II}(\zeta-\zeta_1)ch\gamma_U^{II}(\zeta-\zeta_1) +$$
$$(\delta_U^{II\ 2} + \gamma_U^{II\ 2})\left(T_{4U}^{(s)} - T_{6U}^{(s)}\right)sin\delta_U^{II}(\zeta-\zeta_1)sh\gamma_U^{II}(\zeta-\zeta_1) -$$
$$a_{55}^{(II)}(\delta_U^{II}T_{7U}^{(s)} + \gamma_U^{II}T_{8U}^{(s)})sin\delta_U^{II}(\zeta-\zeta_1)ch\gamma_U^{II}(\zeta-\zeta_1) +$$
$$a_{55}^{(II)}(\gamma_U^{II}T_{7U}^{(s)} - \delta_U^{II}T_{8U}^{(s)})cos\delta_U^{II}(\zeta-\zeta_1)sh\gamma_U^{II}(\zeta-\zeta_1)) +$$
$$2a_{55}^{(I)}a_{55}^{(II)}\left(\gamma_U^{II}T_{1U}^{(s)} - \delta_U^{II}T_{2U}^{(s)}\right)(\,sin\delta_U^{II}(\zeta-\zeta_1)ch\gamma_U^{II}(\zeta-\zeta_1) \times$$
$$sin\delta_U^I\zeta_1 sh\gamma_U^I\zeta_1 + cos\delta_U^{II}(\zeta-\zeta_1)sh\gamma_U^{II}(\zeta-\zeta_1)cos\delta_U^I\zeta_1 ch\gamma_U^I\zeta_1) +$$
$$2a_{55}^{(I)}a_{55}^{(II)}\left(\delta_U^{II}T_{1U}^{(s)} + \gamma_U^{II}T_{2U}^{(s)}\right)(\,sin\delta_U^{II}(\zeta-\zeta_1)ch\gamma_U^{II}(\zeta-\zeta_1) \times$$
$$cos\delta_U^I\zeta_1 ch\gamma_U^I\zeta_1 + cos\delta_U^{II}(\zeta-\zeta_1)sh\gamma_U^{II}(\zeta-\zeta_1)sin\delta_U^I\zeta_1 sh\gamma_U^I\zeta_1) +$$
$$a_{55}^{(II)}\left(\delta_U^I\delta_U^{II}T_{4U}^{(s)} + \delta_U^{II}\gamma_U^I T_{3U}^{(s)} - \delta_U^I\gamma_U^{II}T_{3U}^{(s)} + \gamma_U^I\gamma_U^{II}T_{4U}^{(s)}\right) \times$$
$$(sin\delta_U^{II}(\zeta-\zeta_1)ch\gamma_U^{II}(\zeta-\zeta_1)sh2\gamma_U^I\zeta_1 +$$
$$cos\delta_U^{II}(\zeta-\zeta_1)sh\gamma_U^{II}(\zeta-\zeta_1)sin2\delta_U^I\zeta_1) +$$
$$a_{55}^{(II)}\left(\delta_U^I\delta_U^{II}T_{3U}^{(s)} - \delta_U^{II}\gamma_U^I T_{4U}^{(s)} + \delta_U^I\gamma_U^{II}T_{4U}^{(s)} + \gamma_U^I\gamma_U^{II}T_{3U}^{(s)}\right) \times$$
$$(cos\delta_U^{II}(\zeta-\zeta_1)sh\gamma_U^{II}(\zeta-\zeta_1)sh2\gamma_U^I\zeta_1 -$$
$$sin\delta_U^{II}(\zeta-\zeta_1)ch\gamma_U^{II}(\zeta-\zeta_1)sin2\delta_U^I\zeta_1)],$$
$$U_{2о}^{(II,s)}(\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{a_{55}^{I}(\delta_U^{II\ 2} + \gamma_U^{II\ 2})\Delta_U}[a_{55}^{(I)}\left(\cos(2\delta_U^I\zeta_1) + ch(2\,\gamma_U^I\zeta_1)\right) \times$$
$$((\delta_U^{II\ 2} + \gamma_U^{II\ 2})\left(T_{3U}^{(s)} - T_{5U}^{(s)}\right)sin\delta_U^{II}(\zeta-\zeta_1)sh\gamma_U^{II}(\zeta-\zeta_1) +$$
$$(\delta_U^{II\ 2} + \gamma_U^{II\ 2})\left(T_{4U}^{(s)} - T_{6U}^{(s)}\right)cos\delta_U^{II}(\zeta-\zeta_1)ch\gamma_U^{II}(\zeta-\zeta_1) -$$
$$a_{55}^{(II)}(\delta_U^{II}T_{7U}^{(s)} + \gamma_U^{II}T_{8U}^{(s)})cos\delta_U^{II}(\zeta-\zeta_1)sh\gamma_U^{II}(\zeta-\zeta_1) +$$
$$a_{55}^{(II)}(\gamma_U^{II}T_{7U}^{(s)} - \delta_U^{II}T_{8U}^{(s)})sin\delta_U^{II}(\zeta-\zeta_1)ch\gamma_U^{II}(\zeta-\zeta_1)) + \qquad (2.15)$$
$$2a_{55}^{(I)}a_{55}^{(II)}\left(\gamma_U^{II}T_{1U}^{(s)} - \delta_U^{II}T_{2U}^{(s)}\right)(\,cos\delta_U^{II}(\zeta-\zeta_1)sh\gamma_U^{II}(\zeta-\zeta_1) \times$$
$$sin\delta_U^I\zeta_1 sh\gamma_U^I\zeta_1 - sin\delta_U^{II}(\zeta-\zeta_1)ch\gamma_U^{II}(\zeta-\zeta_1)cos\delta_U^I\zeta_1 ch\gamma_U^I\zeta_1) +$$
$$2a_{55}^{(I)}a_{55}^{(II)}\left(\delta_U^{II}T_{1U}^{(s)} + \gamma_U^{II}T_{2U}^{(s)}\right)(\,cos\delta_U^{II}(\zeta-\zeta_1)sh\gamma_U^{II}(\zeta-\zeta_1) \times$$
$$cos\delta_U^I\zeta_1 ch\gamma_U^I\zeta_1 + sin\delta_U^{II}(\zeta-\zeta_1)ch\gamma_U^{II}(\zeta-\zeta_1)sin\delta_U^I\zeta_1 sh\gamma_U^I\zeta_1) +$$
$$a_{55}^{(II)}\left(\delta_U^I\delta_U^{II}T_{4U}^{(s)} + \delta_U^{II}\gamma_U^I T_{3U}^{(s)} - \delta_U^I\gamma_U^{II}T_{3U}^{(s)} + \gamma_U^I\gamma_U^{II}T_{4U}^{(s)}\right) \times$$

$$(cos\delta_U^{II}(\zeta-\zeta_1)sh\gamma_U^{II}(\zeta-\zeta_1)sh2\gamma_U^{I}\zeta_1 -$$
$$sin\delta_U^{II}(\zeta-\zeta_1)ch\gamma_U^{II}(\zeta-\zeta_1)sin2\delta_U^{I}\zeta_1) -$$
$$a_{55}^{(II)}\left(\delta_U^I\delta_U^{II}T_{3U}^{(s)} - \delta_U^{II}\gamma_U^{I}T_{4U}^{(s)} + \delta_U^{I}\gamma_U^{II}T_{4U}^{(s)} + \gamma_U^{I}\gamma_U^{II}T_{3U}^{(s)}\right)\times$$
$$(cos\delta_U^{II}(\zeta-\zeta_1)sh\gamma_U^{II}(\zeta-\zeta_1)sin2\delta_U^{I}\zeta_1 +$$
$$sin\delta_U^{II}(\zeta-\zeta_1)ch\gamma_U^{II}(\zeta-\zeta_1)sh2\gamma_U^{I}\zeta_1)],$$
$$T_{5U}^{(s)} = U_{1ч}^{(II,s)}(\zeta=\zeta_1) - U_{1ч}^{(I,s)}(\zeta=\zeta_1) \quad (5U, 6U; 1ч, 2ч),$$
$$T_{7U}^{(s)} = \sigma_{xz,1ч}^{(II,s)}(\zeta=\zeta_1) - \sigma_{xz,1ч}^{(I,s)}(\zeta=\zeta_1) \;\; (7U, 8U; 1ч, 2ч),$$
$$(U, V, W; a_{55}, a_{44}, 1/A_{11}).$$

3. Заключение. Во избежание резонанса необходимо, чтобы $\Delta_U \neq 0, (U, V, W)$. Эти условия совпадают с условиями резонанса для оболочек в классической постановке [8] при аналогичных граничных условиях, а также для пластинок [9], когда нижняя грань пластинки жестко закреплена, а на верхней приложены гармонически изменяющиеся во времени напряжения (достаточно перейти к одним и тем же параметрам). Заметим, что в условия резонанса входят параметры только первого слоя, а на напряженно-деформированное состояние пакета влияют параметры обоих слоев.

Анализируя уравнения $\Delta_U = 0\ (U, V, W)$, приходим к выводу, что при наличии вязкого сопротивления в обоих слоях двуслойной пластинки при резонансе амплитуда вынужденных колебаний конечна, так как эти уравнения не имеют действительных корней. Таким образом, в зонах литосферных плит, где в слоях присутствует вязкое сопротивление, внешнее воздействие может привести лишь к резонансу с конечными амплитудами колебаний.

[1]Институт механики НАН РА
e-mail: lusina@mail.ru
[2]АГПУ им. Х. Абовяна

Л. Г. Гулгазарян, П. Р. Амбарцумян

Динамическая трёхмерная задача теории упругости двуслойной пластинки при наличии вязкого сопротивления

В трехмерной постановке рассмотрена динамическая задача двуслойной пластинки при наличии вязкого сопротивления в обоих слоях, когда верхняя лицевая поверхность свободна, между слоями пластинки выполняются условия полного контакта, а значения компонент вектора перемещения сняты с поверхности контакта между слоями как данные инклинометров и других измерительных средств. Определены амплитуды колебаний и выведены условия возникновения резонанса.

Показано, что при наличии вязкого сопротивления в обоих слоях во время резонанса амплитуда колебаний остается конечной.

Լ. Գ. Ղուլղազարյան, Փ. Ռ. Համբարձումյան

Երկշերտ սալի առաձգականության տեսության դինամիկ եռաչափ խնդիրը մածուցիկ դիմադրության առկայության դեպքում

Եռաչափ դրվածքով դիտարկված է երկշերտ սալի դինամիկ խնդիրը, երբ շերտերում առկա է մածուցիկ դիմադրություն: Սալի վերին դիմային մակերևույթն ազատ է, շերտերի միջև տրված են լրիվ կոնտակտի պայմանները, իսկ տեղափոխության վեկտորի բաղադրիչների արժեքները վերցված են շերտերի կոնտակտի մակերևույթից՝ որպես ինկլինամետրերի կամ այլ չափիչ սարքերից ստացված տվյալներ: Դուրս են բերված ռեզոնանսի առաջացման պայմանները, և արտածված են տատանման ամպլիտուդները: Ցույց է տրված, որ ռեզոնանսի ժամանակ երկու շերտերում մածուցիկ դիմադրության առկայության դեպքում տատանման ամպլիտուդները մնում են վերջավոր:

L. G. Ghulghazaryan, P. R. Hambardzumyan

The Dynamic Three-Dimensional Problem of the Theory of Elasticity of a Two-Layer Plate in the Presence of Viscous Resistance

The dynamic problem of a two-layered plate in the presence of viscous resistance in both layers is considered in the three-dimensional formulation, where the upper face surface is free, the conditions of full-contact are fulfilled between the layers. The values of the displacement vector components are collected from inclinometers and other measuring instruments at the contact surface between the layers. The vibration amplitudes are determined and the conditions for the occurrence of resonance are derived. It is shown that in the presence of viscous resistance in both layers the vibration amplitude remains finite during resonance.

Литература

1. *Касахара К.* Механика землетрясений. М. Мир. 1985. 264 с.
2. *Яновская Т. Б.* Основы сейсмологии. Изд-во СПб. ун-та. 2008. 258 с.
3. *Aghalovyan L. A.* – Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute of Georgia. 2011. V. 155. P. 3-10.
4. *Aghalovyan L. A., Aghalovyan M. L.* In: Proceedings of the 5th European Conference on Structural Control – EACS 2012. Genoa, Italy, 18-20 June, 2012. Paper N # 069. P. 1-8.

5. *Агаловян Л. А., Тагворян В. В.* Об одной задаче сейсмологии для слоистых пластин. Проблемы механики деформируемого твёрдого тела. Ереван. Гитутюн. 2017. С. 24-35.
6. *Агаловян Л. А., Агаловян М. Л., Тагворян В. В.* – Изв. НАН Армении. Механика. 2018. Т. 71. № 4. С. 17-29.
7. *Aghalovyan L. A.* Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells. Singapore, London. World Scientific. 2015. 376 p.
8. *Ghulghazaryan L. G.* – Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2015. V. 79. P. 281-292.
9. *Азатян Г. Л.* – Изв. НАН Армении. Механика, 2007. Т. 60. № 12. С. 29-41.