ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր
Том 120 2020 № 3
Volume

МЕХАНИКА

УДК 539.3

В. М. Белубекян, М. В. Белубекян, В. Г. Гараков

Условия появления волны Гуляева – Блюстейна с учетом нестационарности электрического поля

(Представлено чл.-кор. НАН РА Ара С. Аветисяном 1/VIII 2020)

Ключевые слова: *пьезоэлектрик, сдвиговые волны, электроупругость, дисперсия, поверхностная волна, локализация волновой энергии.*

Введение. Обнаружение волн Гуляева – Блюстейна [1-3] привело к большому количеству исследований по распространению электроупругих волн в пьезоактивной среде. В частности, были изучены также волны в волноводах – обобщенные волны Гуляева – Блюстейна [4, 5]. Однако эти исследования проводились преимущественно на основе квазистатического приближения, т.е. для электрического поля использовались уравнения электростатики.

В настоящей статье задача распространения сдвиговых электроупругих волн в пьезоактивном слое из материала класса ***6mm*** решается с использованием полных уравнений электродинамики.

1. Постановка задачи. В прямоугольной декартовой системе координат (x, y, z) слой занимает область $\{-\infty < x < \infty,\ 0 \le y \le h,\ -\infty < z < \infty\}$. Предполагается, что материал слоя является упругим пьезоэлектриком класса ***6mm***, поляризованным по оси симметрии $0z$. Рассматривается задача антиплоской деформации $\mathrm{w} = \mathrm{v} = 0,\ \mathrm{w} = \mathrm{w}(x, y, t)$.

На основе уравнений движения упругой среды, уравнений электродинамики (без использования квазистатического приближения) и материальных уравнений задача приводится к автономным уравнениям упругого перемещения $\mathrm{w}(x, y, t)$ [6 - 8]

$$c_t^2 \Delta \mathrm{w}(x, y, t) = \frac{\partial^2 \mathrm{w}(x, y, t)}{\partial t^2}, \tag{1.1}$$

компоненты магнитного поля H_3

$$c^2 \Delta H_3(x, y, t) = \frac{\partial^2 H_3(x, y, t)}{\partial t^2}. \tag{1.2}$$

В уравнениях (1.1) и (1.2) приняты обозначения

$$c_t^2 = c_{44}(1+\chi)/\rho \,,\ \chi^2 = e_{15}^2/(\varepsilon_{11}c_{44}) \,,\ c^2 = \varepsilon_{11}\mu_3 \,, \tag{1.3}$$

где c_{44} – модуль сдвига, ρ – плотность, χ^2 – коэффициент электромеханической связи, ε_{11}, μ_3 – диэлектрическая и магнитная проницаемости материала слоя.

К уравнениям (1.1) и (1.2) необходимо присоединить материальные уравнения среды

$$\sigma_{13}(x,y,t) = c_{44}\frac{\partial \mathrm{w}(x,y,t)}{\partial x} - e_{15}E_1(x,y,t)\,,$$

$$\sigma_{23}(x,y,t) = c_{44}\frac{\partial \mathrm{w}(x,y,t)}{\partial y} - e_{15}E_2(x,y,t)\,,$$

$$D_1(x,y,t) = \varepsilon_1 E_1(x,y,t) + e_{15}\frac{\partial \mathrm{w}(x,y,t)}{\partial x}\,,$$

$$D_2(x,y,t) = \varepsilon_1 E_2(x,y,t) + e_{15}\frac{\partial \mathrm{w}(x,y,t)}{\partial y} \tag{1.4}$$

и уравнения электродинамики, определяющие компоненты электрического поля E_1, E_2

$$\frac{\partial E_1(x,y,t)}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_{11}}\frac{\partial H_3(x,y,t)}{\partial y} - \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\frac{\partial^2 \mathrm{w}(x,y,t)}{\partial x\partial t},$$

$$\frac{\partial E_2(x,y,t)}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon_{11}}\frac{\partial H_3(x,y,t)}{\partial x} - \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\frac{\partial^2 \mathrm{w}(x,y,t)}{\partial y\partial t}. \tag{1.5}$$

Предполагается, что на ограничивающем слое плоскости $y=0$ заданы условия отсутствия нагрузки и заземления

$$\sigma_{23}(x,y,t)=0\,,\ E_1(x,y,t)=0\,. \tag{1.6}$$

На стороне $y=h$ будут рассмотрены четыре варианта граничных условий:

$$\text{i)}\ \mathrm{w}(x,y,t)=0\,,\ H_3(x,y,t)=0\,, \tag{1.7}$$

$$\text{ii)}\ \mathrm{w}(x,y,t)=0\,,\ E_1(x,y,t)=0 \tag{1.8}$$

$$\text{iii)}\ \sigma_{23}(x,y,t)=0\,,\ H_3(x,y,t)=0\,, \tag{1.9}$$

$$\text{iv)}\ \sigma_{23}(x,y,t)=0\,,\ E_1(x,y,t)=0\,. \tag{1.10}$$

Решение сформулированных краевых задач. Решение уравнений (1.1) и (1.2) представляется в виде

$$\mathrm{w} = f(y)\cdot \exp i(\omega t - kx)\,,\ H_3 = F(y)\cdot \exp i(\omega t - kx)\,. \tag{2.1}$$

Подстановка представления (2.1) в уравнения (1.1) и (1.2) приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям относительно функций $f(y)$, $F(y)$, общие решения которых будут

$$f(y) = A \cdot sh(kv_1 y) + B \cdot ch(kv_1 y)\,,\; F(y) = C \cdot sh(kv_2 y) + D \cdot ch(kv_2 y)\,, \qquad (2.2)$$

где

$$v_1 = \sqrt{1-\eta}\,,\; v_2 = \sqrt{1-\theta\eta}\,,\; \eta = \omega^2 / (k^2 c_t^2)\,,\; \theta = c_t^2 / c^2\,. \qquad (2.3)$$

С учетом решений (2.1) и (2.2) для компонент электрического поля из (1.5) получаются выражения

$$E_1(x,y,t) = -\left(ik/\varepsilon_{11}\omega\right) \cdot \begin{bmatrix} v_2\left(C \cdot ch(kv_2 y) + D \cdot sh(kv_2 y)\right) - \\ -e_{15}\omega\left(A \cdot sh(kv_1 y) + B \cdot ch(kv_1 y)\right) \end{bmatrix} \cdot \exp i(\omega t - kx)\,,$$

$$E_2(x,y,t) = \left(k/\varepsilon_{11}\omega\right) \cdot \begin{bmatrix} C \cdot sh(kv_2 y) + D \cdot ch(kv_2 y) - \\ -e_{15}\omega v_1\left(A \cdot ch(kv_1 y) + B \cdot sh(kv_1 y)\right) \end{bmatrix} \cdot \exp i(\omega t - kx)\,. \qquad (2.4)$$

Требуя, чтобы полученные решения удовлетворяли граничным условиям (1.6) на поверхности $y = 0$, между произвольными постоянными получим следующие связи:

$$D = \left(\omega\varepsilon_1 c_{44}(1+\chi)v_1/e_{15}\right) \cdot A\,,\; C = \left(e_{15}\omega/v_2\right) \cdot B\,. \qquad (2.5)$$

С помощью соотношений (2.5) получаются новые выражения для искомых функций:

$$\mathrm{w}(x,y,t) = \left[A \cdot sh(kv_1 y) + B \cdot ch(kv_1 y)\right] \cdot \exp i(\omega t - kx),$$

$$H_3(x,y,t) = e_{15}\omega\left(\frac{1+\chi}{\chi} v_1 A \cdot ch(kv_2 y) + \frac{1}{v_2} B \cdot sh(kv_2 y)\right) \cdot \exp i(\omega t - kx),$$

$$E_1(x,y,t) = -i\frac{e_{15}k}{\varepsilon_1}\begin{bmatrix} \left(\dfrac{1+\chi}{\chi} v_1 v_2 \cdot sh(kv_2 y) - sh(kv_1 y)\right) \cdot A + \\ +\left(ch(kv_2 y) - ch(kv_1 y)\right) \cdot B \end{bmatrix} \cdot \exp i(\omega t - kx), \qquad (2.6)$$

$$E_2(x,y,t) = \frac{e_{15}k}{\varepsilon_1}\begin{bmatrix} \left(\dfrac{1+\chi}{\chi} v_1 \cdot ch(kv_2 y) - v_1 \cdot ch(kv_1 y)\right) \cdot A + \\ +\left(\dfrac{1}{v_2} \cdot sh(kv_2 y) - v_1 \cdot sh(kv_1 y)\right) \cdot B \end{bmatrix} \cdot \exp i(\omega t - kx).$$

2.1. Пусть на поверхности $y = h$ волновода имеют место условия (1.7). Требование, чтобы функции $\mathrm{w}(x,y,t)$ и $H_3(x,y,t)$ удовлетворяли этим условиям, приводит к системе алгебраических (однородных) уравнений относительно произвольных постоянных A, B. Условие равенства нулю детерминанта этой системы приводит к уравнению, определяющему безразмерный параметр фазовой скорости η электроупругой волны

$$\frac{\chi}{1+\chi}\cdot th(\nu_1 kh)\cdot th(\nu_2 kh)=\nu_1\nu_2 . \qquad (2.7)$$

Отсюда в коротковолновом приближении

$$th(\nu_s kh)\approx 1 \text{, где } s=1,2 , \qquad (2.8)$$

получается уравнение

$$\sqrt{1-\eta}\sqrt{1-\theta\eta}=\frac{\chi^2}{1+\chi^2} , \qquad (2.9)$$

а в случае $\theta=0$ – выражение для скорости распространения поверхностной волны Гуляева – Блюстейна вдоль границы пьезоактивного полупространства

$$\eta=1-\chi^4/(1+\chi^2)^2 . \qquad (2.10)$$

При сохранении θ уравнение (2.9) определяет две поверхностные волны – квазиупругую и квазиэлектромагнитную. Условие существования локализованных волн для слоя есть [5]

$$0<\eta<1 . \qquad (2.11)$$

Переход от объемных волн к локализованным (или переход от решений в виде тригонометрических функций к гиперболическим) будет иметь место в пределе $\eta\to 1$ [5]. В пределе $\eta\to 1$ из дисперсионного уравнения(2.7) получается уравнение, определяющее условие появления локализованной волны

$$\frac{\chi^2}{1+\chi^2}kh\cdot th\left(kh\sqrt{1-\theta}\right)=\sqrt{1-\theta} . \qquad (2.12)$$

Из уравнения (2.5) решения для kh определяют безразмерную характеристику длины волны (или толщины слоя), начиная с которого появляется локализованная волна. Уравнение (2.12) имеет также простое, но достаточно точное приближенное решение

$$kh\geq\frac{1+\chi^2}{\chi^2}\cdot\sqrt{1-\theta} . \qquad (2.13)$$

В приближении $\vartheta < 1\,\theta\ll 1$ условие (2.13) совпадает с результатом статьи [5]. Уравнение дисперсии (2.7) допускает также решение с условием

$$\left\{\eta>1\cup\theta\eta<1\right\} , \qquad (2.14)$$

которое определяется корнем kh уравнения

$$\frac{\chi^2}{1+\chi^2}\cdot kh\sqrt{\theta^{-1}-1}=\sqrt{\theta^{-1}-1} . \qquad (2.15)$$

При условиях (2.14) имеют место объемная квазиупругая волна и локализованная квазиэлектромагнитная волна.

2.2. Рассматривается второй вариант граничных условий (1.8) на поверхности волновода $y = h$ – условия закрепленной и заземленной границы. Требование, чтобы решения $\mathrm{w}(x, y, t)$ и $E_1(x, y, t)$ из (2.6) удовлетворяли граничным условиям (1.8), приводит к следующей системе однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A, B:

$$A \cdot sh(kv_1 kh) + B \cdot ch(kv_1 kh) = 0,$$
$$\left(\frac{1+\chi^2}{\chi^2} v_1 v_2 sh(kv_2 kh) - sh(kv_1 kh)\right) \cdot A + \left[ch(kv_2 kh) - ch(kv_1 kh)\right] \cdot B = 0. \tag{2.16}$$

Равенство нулю детерминанта системы (2.16) приводит к уравнению, определяющему безразмерный параметр фазовой скорости η

$$v_1 v_2 \cdot th(v_2 kh) = \frac{\chi^2}{1+\chi^2} \cdot th(v_1 kh). \tag{2.17}$$

В коротковолновом приближении из уравнения (2.17) получается уравнение, определяющее скорость волны Гуляева – Блюстейна, которое совпадает с уравнением предыдущего случая (2.9).

Условие появления локализованной в окрестности $y = 0$ волны $(\eta \to 1)$ определяется уравнением

$$kh = \frac{\chi^2}{1+\chi^2} \sqrt{1-\theta} \cdot th\left(kh\sqrt{1-\theta}\right). \tag{2.18}$$

В приближении $th(kh \cdot \sqrt{1-\theta}) \approx 1$ условие появления локализованной волны совпадает с условием (2.13). Уравнение (2.17) всегда имеет решение, удовлетворяющее неравенству (2.14). В частности, в длинноволновом приближении $kh << 1$ из уравнения (2.17) фазовой скорости квазиэлектромагнитной локализованной волны получается

$$\omega^2 / k^2 = c^2 \left(1 - \chi^2 / (1+\chi^2)\right). \tag{2.19}$$

2.3. Для третьего варианта граничных условий (1.9) система уравнений относительно произвольных постоянных A, B получается в виде

$$\left(ch(v_1 kh) - ch(v_2 kh)\right) \cdot A + \left[sh(v_1 kh) - \frac{\chi^2}{(1+\chi^2) \cdot v_1 v_2} sh(v_2 kh)\right] \cdot B = 0$$
$$v_1 v_2 \cdot ch(v_2 kh) \cdot A + \frac{\chi^2}{1+\chi^2} \cdot sh(v_2 kh) \cdot B = 0 \tag{2.20}$$

Из условия равенства нулю детерминанта системы (2.20) получается дисперсионное уравнение

$$v_1 v_2 \cdot th\left(v_1 kh\right) = \frac{\chi^2}{1+\chi^2} \cdot th\left(v_2 kh\right). \tag{2.21}$$

Отсюда в пределе $kh \to \infty$ (или коротковолновом приближении), как и в предыдущих случаях, получаются выражения фазовой скорости для волн Гуляева – Блюстейна. Из (2.20) следует, что локализованная квазиупругая волна будет иметь место при любых kh. В частности, для длинноволнового приближения $kh << 1$ получается

$$\eta = 1 - \chi^2 / (1 + \chi^2) . \qquad (2.22)$$

Заключение. Динамическая постановка задачи о распространении электроактивных сдвиговых упругих волн деформации в пьезоэлектриках класса ***6mm*** позволяет использовать новые граничные условия на поверхностях пьезоэлектрического слоя. Разные электро-магнето-механические условия на поверхностях пьезоэлектрического слоя приводят к обоюдосторонней, не всегда симметричной локализации волновой энергии в слое.

Институт механики НАН РА
e-mails: vbelub@gmail.com, mbelubekyan@yahoo.com,
garakov@ yandex.com

В. М. Белубекян, М. В. Белубекян, В. Г. Гараков

Условия появления волны Гуляева – Блюстейна с учетом нестационарности электрического поля

Рассматривается распространение электроупругой волны сдвига в упругом слое из пьезоэлектрика класса ***6mm***. Одна из поверхностей слоя механически свободна и электрически заземлена, что приводит к локализации упругой сдвиговой волны в окрестности этой стороны. На другой поверхности пьезоэлектрического слоя обсуждаются разные электро-магнето-механические граничные условия, которые могут привести к разным по характеру локализаций волнам. В отличие от других исследований, посвященных распространению обобщенных волн типа Гуляева – Блюстейна, в данном исследовании задачи решаются в динамической постановке (без использования квазистационарного приближения).

Վ. Մ. Բելուբեկյան, Մ. Վ. Բելուբեկյան, Վ. Գ. Գարակով

Գուլյաև – Բլյուստայնի ալիքի առաջացումը էլեկտրական դաշտի ոչ ստացիոնարության հաշվառումով

Դիտարկվում է էլեկտրաառաձգական սահքի ալիքի տարածումը **6*mm*** դասի պյեզոէլեկտրական շերտում: Շերտի մի եզրը մեխանիկորեն ազատ է և հողակցված, ինչը բերում է էլեկտրաառաձգական սահքի ալիքի տեղայնացում այդ եզրի մոտ: Մյուս եզրում քննարկվում են այլ եզրային պայմաններ, որոնք հանգեցնում են էլեկտրա-

առաձգական դաշտի՝ բնույթով տարբեր տեղայնացումների: Խնդիրները քննարկված են դինամիկական էլեկտրամագնիսական դաշտի (ոչ ստացիոնար) հաշվառումով:

V. M. Belubekyan, M. V. Belubekyan, V. G. Garakov

Conditions for the Appearance of the Gulyaev – Bleustein Wave Taking into Account the Nonstationarity of the Electric Field

The propagation of an electroelastic shear wave in an elastic layer made of a **6mm** class piezoelectric is considered. One of the surfaces of the layer is mechanically free and electrically grounded, which leads to the localization of an elastic shear wave in the neighborhood of this side. On the other surface of the piezoelectric layer, various electro-magneto-mechanical boundary conditions are discussed, which can lead to different types of wave localizations. In contrast to other studies devoted to the propagation of generalized waves of the Gulyaev – Bluestein type, here the problems are solved in a dynamic setting (the quasi-stationary approximation is not used).

Литература

1. *Bleustein T. I.* ─ Appl. Phys. Letter. 1968.V. 13. № 12. P. 412-413.
2. *Гуляев Ю. В.* ─ Письма в ЖЭТВ.1969. Т. 9. № 1. С. 63-65.
3. *Балакирев М. К., Гилинский И. А.* Волны в пьезоэлектриках. Новосибирск. Наука. 1982. 240 с.
4. *Аветисян А. С., Камалян А. А.* ─ ДНАН РА. 2014. Т. 114. № 2. С. 108-115.
5. *Белубекян В. М., Белубекян М. В., Гараков В. Г.* ─ Вестник РАУ. Ереван. 2017. № 2. С. 81-90.
6. *Белубекян М. В.* В сб.: Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Ереван. Изд-во Гитутюн. 2008. С. 125-130.
7. *Аветисян А.С., Белубекян М. В.* ─ Акустический журн. 2019. Т. 65. № 5. С. 478-487.
8. *Avetisyan A. S., Belubekyan M. V.* ─ Acoustical Physics. 2019. V. 65. № 5. P. 478-486, http://doi.org/10.1134/S1063771019050051.