

1. Формулировка математической краевой задачи. В прямоугольной декартовой системе координат (x, y, z) пьезоэлектрический материал поляризован по оси симметрии $0z$. Уравнения плоской деформации движения упругой среды, при условии независимости от координаты z ($\partial/\partial z \equiv 0$), можно записать в виде [1, 2]

$$\begin{aligned} \frac{c_{11} - c_{12}}{2} \Delta u + \frac{c_{11} + c_{12}}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - e_{13} \frac{\partial E_3}{\partial x} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{c_{11} - c_{12}}{2} \Delta v + \frac{c_{11} + c_{12}}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - e_{13} \frac{\partial E_3}{\partial y} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $u(x, y, t)$ и $v(x, y, t)$ – компоненты упругого перемещения в плоскости $(x0y)$, $E_3(x, y, t)$ – компонента напряженности электрического поля, c_{11} и c_{12} – упругие постоянные, e_{13} – пьезоэлектрический модуль, ρ – плотность материала.

Связанные с перпендикулярным к сагиттальной плоскости электрическим полем напряженностью $E_3(x, y, t)$, уравнения электродинамики ($\partial/\partial z \equiv 0$) имеют вид

$$\frac{\partial H_2(x, y, t)}{\partial x} - \frac{\partial H_1(x, y, t)}{\partial y} = \frac{\partial D_3(x, y, t)}{\partial t}, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial H_1(x, y, t)}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial E_3(x, y, t)}{\partial y}, \quad \frac{\partial H_2(x, y, t)}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial E_3(x, y, t)}{\partial x}, \quad (1.3)$$

где $D_3(x, y, t)$ – компонента вектора индукции электрического поля, $H_1(x, y, t)$, $H_2(x, y, t)$ – компоненты вектора магнитного поля.

Уравнения (1.1)–(1.3) необходимо дополнить соответствующими для рассматриваемой задачи функциональными связями среды

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(x, y, t) &= c_{11} \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} + c_{12} \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial y} - e_{13} E_3(x, y, t), \\ \sigma_{12}(x, y, t) &= \frac{c_{11} - c_{12}}{2} \left(\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22}(x, y, t) &= c_{12} \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} + c_{11} \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial y} - e_{13} E_3(x, y, t), \\ D_3(x, y, t) &= e_{13} \left(\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial y} \right) + \varepsilon_{33} E_3(x, y, t), \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь $\sigma_{11}(x, y, t)$, $\sigma_{12}(x, y, t)$, $\sigma_{22}(x, y, t)$ – компоненты тензора напряженности в плоскости $(x0y)$.

Сначала рассмотрим задачу для случая классических граничных условий: предполагается, что полупространство $\Omega = \{ |x| < \infty, 0 \leq y < \infty, |z| < \infty \}$

на поверхности $y = 0$ свободно от механических нагрузок и электрически заземлено:

$$\sigma_{22}(x, 0, t) = 0, \quad \sigma_{21}(x, 0, t) = 0, \quad E_3(x, 0, t) = 0. \quad (1.6)$$

Требуется, чтобы решения уравнений (1.1)÷(1.3) удовлетворяли граничным условиям (1.6) и условиям затухания в глубь полупространства

$$\lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y, t) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} v(x, y, t) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} E_3(x, y, t) = 0. \quad (1.7)$$

2. Решение задачи. Из уравнений электродинамики (1.2) и (1.3) с учетом функциональных связей среды (1.5) исключаются искомые функции компонент напряжений магнитного поля $H_1(x, y, t)$ и $H_2(x, y, t)$, что приводит к уравнению

$$\Delta E_3(x, y, t) = \mu_1 \varepsilon_3 \frac{\partial^2 E_3(x, y, t)}{\partial t^2} + \mu_1 \varepsilon_{13} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial y} \right). \quad (2.1)$$

Таким образом, задача о поверхностных волнах типа Рэлея приводится к решению системы уравнений (1.1) и (2.1) относительно искомых функций $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ и $E_3(x, y, t)$ с граничными условиями (1.6) и условиями затухания (1.7).

Система уравнений (1.1) и (2.1) позволяет использование преобразований Ламе

$$u(x, y, t) = \frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial \psi(x, y, t)}{\partial y}, \quad v(x, y, t) = \frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial y} - \frac{\partial \psi(x, y, t)}{\partial x}. \quad (2.2)$$

Преобразование (2.2) приводит к связанной системе относительно функций $\varphi(x, y, t)$ и $E_3(x, y, t)$

$$\begin{aligned} \Delta \varphi(x, y, t) - \frac{\varepsilon_{13}}{c_{11}} E_3(x, y, t) &= \frac{1}{C_t^2} \frac{\partial^2 \varphi(x, y, t)}{\partial t^2}, \\ \Delta E_3(x, y, t) - \varepsilon_{13} \mu_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\Delta \varphi(x, y, t)] &= \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 E_3(x, y, t)}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

и автономному уравнению относительно функции $\psi(x, y, t)$

$$\Delta \psi(x, y, t) = \frac{1}{C_t^2} \frac{\partial^2 \psi(x, y, t)}{\partial t^2}. \quad (2.4)$$

В уравнениях (2.3) и (2.4) приняты обозначения

$$C_t^2 = \frac{c_{11}}{\rho}, \quad C_t^2 = \frac{c_{11} - c_{12}}{2\rho}, \quad C_0^2 = \frac{1}{\mu_1 \varepsilon_3}. \quad (2.5)$$

Преобразования (2.2) приводят граничные условия свободной поверхности (1.6) и условия затухания (1.7) к виду

$$\left[c_{12} \frac{\partial^2 \varphi(x, y, t)}{\partial x^2} + c_{11} \frac{\partial^2 \varphi(x, y, t)}{\partial y^2} - (c_{11} - c_{12}) \frac{\partial^2 \psi(x, y, t)}{\partial x \partial y} \right]_{y=0} = 0 \quad (2.6)$$

$$\left[\frac{\partial^2 \psi(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi(x, y, t)}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi(x, y, t)}{\partial x \partial y} \right]_{y=0} = 0, \quad (2.7)$$

$$E_3(x, y, t)|_{y=0} = 0, \quad (2.8)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \varphi(x, y, t) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \psi(x, y, t) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} E_3(x, y, t) = 0. \quad (2.9)$$

Уравнение (2.4) имеет решение

$$\psi(x, y, t) = C \cdot \exp(-k\alpha_l(\eta)y) \cdot \exp[i(\omega t - kx)], \quad (2.10)$$

где C – произвольная постоянная, а

$$\alpha(\eta) = \sqrt{1 - \eta}, \quad \eta = \omega^2 / (k^2 C_l^2). \quad (2.11)$$

Второе условие затухания из (2.9) будет иметь место, если выполняется неравенство

$$0 < \eta < 1. \quad (2.12)$$

Исключением функции $E_3(x, y, t)$ система уравнений (2.3) приводится к уравнению

$$\Delta^2 \varphi(x, y, t) - \left(\frac{1}{C_l^2} + \frac{1 + \chi}{C^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\Delta \varphi(x, y, t)] + \frac{1}{C_l^2 C^2} \frac{\partial^4 \varphi(x, y, t)}{\partial t^4} = 0, \quad (2.13)$$

где χ – коэффициент электромеханической связи среды

$$\chi = \frac{e_{13}^2}{c_{11} \varepsilon_{33}}. \quad (2.14)$$

После представления решения уравнения (2.13) в виде

$$\varphi(x, y, t) = \Phi(y) \cdot \exp[i(\omega t - kx)] \quad (2.15)$$

получается обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка относительно функции $\Phi(y)$

$$\begin{aligned} & \Phi'''(y) - k^2 [\alpha_l^2(\eta) + \alpha_0^2(\eta) - \chi \theta_0 \eta] \cdot \Phi''(y) + \\ & + k^4 [\alpha_l^2(\eta) \cdot \alpha_0^2(\eta) - \chi \theta_0 \eta] \cdot \Phi(y) = 0, \end{aligned} \quad (2.16)$$

где

$$\alpha_l(\eta) = \sqrt{1 - \theta \eta}, \quad \alpha_0(\eta) = \sqrt{1 - \theta_0 \eta}, \quad \theta = C_l^2 / C_l^2, \quad \theta_0 = C_l^2 / C_0^2. \quad (2.17)$$

Общее решение уравнения (2.16), удовлетворяющее условиям затухания, будет

$$\Phi(y) = C_1 \exp[-kp_l(\eta)y] + C_3 \exp[-kp_0(\eta)y], \quad (2.18)$$

$$p_l(\eta), p_0(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\alpha_l^2(\eta) + \alpha_0^2(\eta) - \chi \theta_0 \eta \pm \sqrt{[\alpha_l^2(\eta) + \alpha_0^2(\eta) - \chi \theta_0 \eta]^2 - 4[\alpha_l^2(\eta) \cdot \alpha_0^2(\eta) - \chi \theta_0 \eta]} \right]^{1/2}. \quad (2.19)$$

Нетрудно показать, что при $y \rightarrow \infty$ решение (2.18) затухающее, если выполняется неравенство

$$\alpha_l^2(\eta) + \alpha_0^2(\eta) - \chi\theta_0\eta > 0. \quad (2.20)$$

Простые расчеты показывают, что при условии (2.12) с учетом $\theta < 1$, $\theta_0 \ll 1$ и $\chi < 1$ условие (2.20) всегда имеет место.

Функция напряженности электрического поля определяется из первого уравнения системы (2.3) с учетом (2.15) и (2.18)

$$E_3(x, y, t) = k^2 \frac{c_{11}}{e_{13}} \left[A_1 (p_l^2 - 1 + \theta\eta) \cdot \exp[-kp_l(\eta)y] + \right. \\ \left. + A_2 (p_0^2 - 1 + \theta\eta) \cdot \exp[-kp_0(\eta)y] \right] \cdot \exp[i(\omega t - kx)]. \quad (2.21)$$

Подстановка (2.21) в уравнения (1.3) приводит к определению выражений для компонент напряженности магнитного поля

$$H_1(x, y, t) = -\frac{ik^3 c_{11}}{\omega\mu_1 e_{13}} \left[A_1 (p_l^2 - 1 + \theta\eta) \cdot \exp[-kp_l(\eta)y] + \right. \\ \left. + A_2 (p_0^2 - 1 + \theta\eta) \cdot \exp[-kp_0(\eta)y] \right] \cdot \exp[i(\omega t - kx)], \\ H_2(x, y, t) = -\frac{k^3 c_{11}}{\omega\mu_1 e_{13}} \left[A_1 (p_l^2 - 1 + \theta\eta) \cdot \exp[-kp_l(\eta)y] + \right. \\ \left. + A_2 (p_0^2 - 1 + \theta\eta) \cdot \exp[-kp_0(\eta)y] \right] \cdot \exp[i(\omega t - kx)]. \quad (2.22)$$

3. Анализ полученных результатов. Требование, чтобы решения (2.10), (2.18) и (2.21) удовлетворяли граничным условиям (2.6)–(2.8), приводит к системе однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A_1 , A_2 и C .

Условие равенства нулю определителя указанной системы приводит к дисперсионному уравнению

$$(2 - \eta) \cdot \left[p_l^2 - \theta_0 + \chi(p_0^2 - \theta_2) \right] - 2\theta\alpha_l(p_l - \chi p_0) = 0, \quad \theta_2 = c_{12}/c_{11}. \quad (3.1)$$

В случае отсутствия пьезоэлектрического эффекта среды, равенства нулю коэффициента электромеханической связи среды $\chi = 0$ приводит к

$$p_l(\eta) = \sqrt{1 - \theta\eta}, \quad p_0(\eta) = \sqrt{1 - \theta_0\eta}, \quad \alpha_l(\eta) = \sqrt{1 - \eta}, \quad (3.2)$$

и уравнение (3.1) сводится к уравнению Рэлея

$$(2 - \eta)^2 - 4\sqrt{1 - \theta\eta} \cdot \sqrt{1 - \eta} = 0. \quad (3.3)$$

Ясно, что численный анализ уравнения (3.1) покажет влияние ненулевого параметра электромеханической связи среды χ и динамической постановки задачи электроупругости на скорость распространения поверхностной электроупругой волны. Очевидно, что это влияние будет слабым: количественно порядка $\chi \cdot (C_t^2/C_0^2)$ (рис. 1).

С другой стороны, известно, что при других вариантах механических классических граничных условий (жестко заземленная поверхность), или неклассических условий прилипания среды к поверхности (условия На-

вье), или условий скользящего контакта (условия анти-Навье) поверхностной волны Рэлея в упругой среде не существует.

Рассмотрим теперь влияние пьезоэффекта среды в случаях неклассических граничных условий (исключая случай закрепленной границы, когда тривиально отсутствует поверхностная волна).

а) Пусть на поверхности полупространства $y=0$ заданы условия “прилипания деформируемой среды” к поверхности (условия Навье) и условия заземления

$$\sigma_{22}(x, 0, t) = 0, \quad u(x, 0, t) = 0, \quad E_3(x, 0, t) = 0. \quad (3.4)$$

После введения преобразования Ламе (2.2) эти условия приводятся к виду

$$\varphi(x, 0, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial \psi(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad E_3(x, 0, t) = 0. \quad (3.5)$$

Подстановка в (3.5) решений (2.15), (2.18) и (2.21) приводит к уравнению

$$\left[\alpha_i^2(\eta) + \alpha_0^2(\eta) - \chi \theta_0 \cdot \eta \right]^2 - 4 \left[\alpha_i^2(\eta) \cdot \alpha_0^2(\eta) - \chi \theta_0 \cdot \eta \right] = 0, \quad (3.6)$$

которое в свою очередь преобразуется к виду

$$\eta^2 \cdot \left[(\theta - \theta_0)^2 + 2\chi(\theta + \theta_0)\theta_0 + \chi^2\theta_0^2 \right] = 0. \quad (3.7)$$

Из (3.7) следует, что дисперсионное уравнение задачи имеет только корень $\eta=0$, который соответствует тривиальному решению задачи $u(x, y, t) \equiv 0$ и $v(x, y, t) \equiv 0$.

б) Пусть на поверхности полупространства $y=0$ заданы условия скользящего контакта (условия анти-Навье) и условия заземления

$$\sigma_{21}(x, 0, t) = 0, \quad v(x, 0, t) = 0, \quad E_3(x, 0, t) = 0. \quad (3.8)$$

После введения преобразования Ламе (2.2) эти условия приводятся к виду

$$\psi(x, 0, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad E_3(x, 0, t) = 0. \quad (3.9)$$

Подстановка в (3.9) решений (2.15), (2.18) и (2.21) приводит к уравнению

$$N(\eta) \triangleq p_l(\eta) \cdot (p_0^2 - 1 + \theta\eta) - p_0(\eta) \cdot (p_l^2 - 1 + \theta\eta) = 0, \quad (3.10)$$

Из (3.10) с учетом $p_l(\eta) \neq p_0(\eta)$ получается уравнение

$$N_1(\eta) \triangleq (1 - \theta\eta) \cdot (2 - \theta_0\eta) - \chi\theta_0\eta = 0 \quad (3.11)$$

со свойствами функции $N_1(0) = 2 > 0$ и $N_1(\theta^{-1}) = -\chi\theta_0\theta^{-1} < 0$, что означает существование корня, удовлетворяющего условию

$$0 < \eta < \theta^{-1}. \quad (3.12)$$

В этом случае существует поверхностная электромагнитоактивная волна плоской деформации со скоростью распространения $V_\phi(\omega, k) = \omega/k < C_l$

Графики фазовой функции $N(\eta)$ для случаев квазистатической постановки задачи и динамической постановки задачи с граничными условиями механически свободной, заземленной поверхности и с граничными условиями скользящего контакта (условия анти-Навье) и заземленной поверхности приведены на рис. 1. Кривая 1 соответствует классической задаче Рэлея с фазовой функцией $R_1(\eta) = (2 - \eta)^2 - 4\sqrt{1 - \theta\eta} \cdot \sqrt{1 - \eta}$. Фазовая кривая 2 соответствует динамической постановке задачи электроакустики с механически свободной заземленной поверхностью полупространства. Построена линия по рэлеевской функции $R_2(\eta) = (2 - \eta) \cdot [p_l^2 - \theta_0 + \chi \cdot (p_0^2 - \theta_2)] - 2\theta\alpha_l \cdot (p_l - \chi p_0)$. Фазовая кривая 3 соответствует динамической постановке задачи электроакустики с механически скользящей, заземленной поверхностью полупространства. Линия построена по рэлеевской функции $R_3(\eta) = p_l(\eta) \cdot (p_0^2 - 1 + \theta\eta) - p_0(\eta) \cdot (p_l^2 - 1 + \theta\eta)$.

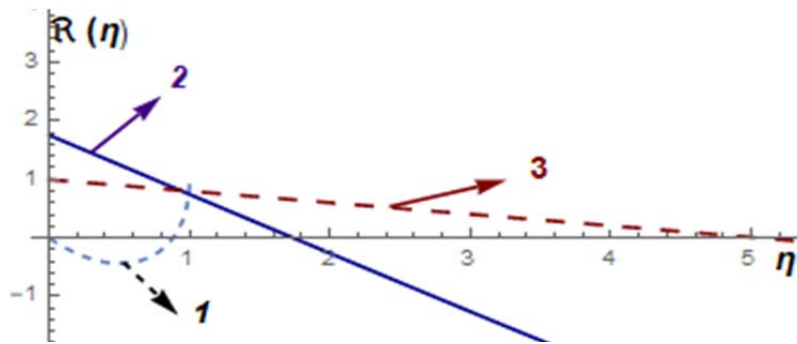


Рис. 1. Графики фазовых функций $R(\eta)$ при заземленной поверхности среды: 1 – квазистатическая постановка задачи, кривая Рэлея; 2 – динамическая постановка задачи с механически свободной поверхностью; 3 – динамическая постановка задачи с условиями скользящего контакта.

Характерно, что все эти функции имеют одно и то же значение при величине приведенной скорости $\eta = 1$.

4. Заключение. В рамках динамической постановки задачи электроупругости, когда в отличие от квазистатической постановки в сагиттальной плоскости изотропии пьезоэлектрика класса *бтт* имеет место связанность электромагнитных волн и акустических волн плоской деформации, рассмотрен вопрос влияния пьезоэффекта на распространение упругой поверхностной электроактивной волны плоской деформации.

Установлено, что в случае классических граничных условий, когда поверхность пьезоэлектрического полупространства заземлена и свободна от механических нагрузок, динамическая постановка задачи приводит только к количественным изменениям параметров волн Рэлея.

В случае неклассических граничных условий, когда:

- на заземленной поверхности пьезоэлектрического полупространства имеем условия прилипания среды (условия Навье), показано, что динамическая постановка задачи электроупругости приводит к исчезновению электроактивной поверхностной волны типа волн Рэлея;
- на заземленной поверхности пьезоэлектрического полупространства имеем условия скользящего контакта (условия анти-Навье), показано, что динамическая постановка задачи приводит к существованию электромагнитоактивной поверхностной медленной волны типа волн Рэлея.

Институт механики НАН РА

e-mails: ara.serg.avetisyan@gmail.com; mbelubekyan@yahoo.com;
ghkarren@gmail.com

**Член-корреспондент НАН РА Ара С. Аветисян,
М. В. Белубекян, К. Б. Казарян**

Электро-магнито-упругие волны типа Рэлея в пьезоэлектрической среде гексагональной симметрии класса bmm

Рассматривается распространение поверхностных электроакустических волн типа Рэлея в пьезоэлектрическом полупространстве гексагональной симметрии класса bmm . Показывается, что в динамической постановке задачи электроупругости в отличие от квазистатической постановки в сагиттальной плоскости изотропии пьезоэлектрика класса bmm имеет место связанность электромагнитных волн и акустических волн плоской деформации. В случае классических граничных условий, когда свободная от механических нагрузок поверхность пьезоэлектрического полупространства электрически заземлена, динамическая постановка задачи электроупругости приводит только к количественным изменениям параметров волн Рэлея. В случае неклассических граничных условий, когда на заземленной поверхности пьезоэлектрического полупространства имеют место условия прилипания или скользящего контакта, динамическая постановка задачи электроупругости приводит к новым качественным результатам относительно поверхностной волны типа Рэлея.

**ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ա. Ս. Ավետիսյան,
Ս. Վ. Բելուբեկյան, Կ. Բ. Ղազարյան**

Ռեկտի տիպի էլեկտրամագնիսաառաձգական ալիքները հեքսագոնալ սիմետրիայի bmm դասի պլեգոէլեկտրական միջավայրում

Դիտարկվում է Ռեկեի տիպի էլեկտրաձայնային մակերևութային ալիքների տարածումը հեքսագոնալ համաչափության $6mm$ դասի պլեգոէլեկտրական կիսատարածությունում: Ցույց է տրվում, որ, ի տարբերություն էլեկտրաառաձգականության խնդրի քվադրի ստատիկ դրվածքի, խնդրի դինամիկ դրվածքի դեպքում բյուրեղի իզոտրոպիայի հարթությունում տեղի ունի էլեկտրամագնիսական և հարթ դեֆորմացիայի ձայնային ալիքների փոխկապակցվածություն: Դասական եզրային պայմանների դեպքում, երբ մեխանիկական բեռնավորումից ազատ եզրը հողակցված է, էլեկտրաառաձգականության խնդրի դինամիկական դրվածքը հանգեցնում է միայն Ռեկեի ալիքի քանակական փոփոխության: Ոչ դասական եզրային պայմանների դեպքում, երբ պլեգոէլեկտրական կիսատարածության հողակցված եզրում առկա են կաչռուն կամ սահունով հսկան պայմաններ, էլեկտրաառաձգականության խնդրի դինամիկական դրվածքը հանգեցնում է Ռեկեի տիպի մակերևութային ալիքների նոր որակական արդյունքների:

**Corresponding member of NAS RA Ara S. Avetisyan,
M. V. Belubekyan, K. B. Ghazaryan**

Electro-magneto-elastic Waves of Rayleigh Type in a Piezoelectric Medium of $6mm$ Hexagonal Symmetry Class

The propagation of surface electro-acoustic waves of the Rayleigh type in the piezoelectric half-space of hexagonal $6mm$ class symmetry is considered. It is shown that in the dynamic framework of the electroelasticity problem, in contrast to the quasistatic framework, in the sagittal plane of the isotropy of the piezoelectric electromagnetic waves and acoustic waves of plane deformation are coupled. In the case of classical boundary conditions, when the surface of the piezoelectric half-space is traction free and electrically shorted, the dynamic formulation of the problem of electroelasticity leads only to quantitative changes in the parameters of the Rayleigh waves. In the case of non-classical boundary conditions, when on the electrically shorted surface of the piezoelectric half-space there are sticking or sliding contact condition, the dynamic formulation of the electroelasticity problem leads to new qualitative results regarding a surface wave of Rayleigh type.

Литература

1. *Аветисян А. С.* – Изв. АН АрмССР. Механика. 1985. Т. 38. № 1. С. 3-11.
2. *Avetisyan Ara S.* – Proceed. of NAS of Armenia. Mechanics. 2019). V .72. Iss. 3. P. 56-79, <http://doi.org/10.33018/72.3.4>.
3. *Балакирев М. К., Гилинский И. А.* Волны в пьезоэлектриках. Новосибирск. Наука. 1982. 239 с. [*Balakirev M. K., Gilinsky I. A.* Waves in piezoelectrics. Novosibirsk. Nauka. 1982. 239 p., in Russian].
4. *Партон В. З., Кудрявцев Б. А.* Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М. Наука. 1988. 472 с.
5. *Biryukov S. V., Gulyaev Yu. V., Krylov V. P. et al.* – Springer Ser on Wave Phenomena. 1995. V. 20. 388 p.
6. *Аветисян Ара С., Белубекян М. В.* – Акустический журнал. 2019. Т. 65. № 5. С. 579–587, <https://doi.org/10.1134/S0320791919050058>.

7. *Avetisyan Ara S., Belubekyan M. V.* – Acoustical Physics. 2019. V. 65. № 5. P. 478-486, <https://doi.org/10.1134/S1063771019050051>.
8. *Ghazaryan K. B., Piliposyan D. G., Piliposian G. T.* In: Sumbatyan M. (eds). Wave Dynamics, Mechanics and Physics of Microstructured Metamaterials. Advanced Structured Materials. V. 109. Springer, Cham. 2019, https://doi.org/10.1007/978-3-030-17470-5_16.
9. *Yang J.* – IEEE, Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, 2004. V. 51. № 8. P. 1035-1039, <https://doi.org/10.1109/tuffc.2004.1324410>.
10. *Belubekyan M. V.* In: Proc. 6th Int. Conf. “Problems of Dynamics of Interaction of Deformable Media”, September 21-26, 2008. P. 125-130.
11. *Darinskii A. N., Le Clezio E., Feuillard G.* – Wave Motion. 2008. V. 45. P. 428-444.
12. *Darinskii A. N., Le Clezio E., Feuillard G.* – IEEE Trans. Ultrason. Ferroelect. Freq. Contr. 2007. V. 54. № 4. P. 612-620.
13. *Piliposyan D. G., Ghazaryan K. B., Piliposian G. T.* – 2015. J. Phys. D. V. 48. P. 175501.