ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 120 2020 № 3

МАТЕМАТИКА

УДК 517.51

Академик Г. Г. Геворкян

Теоремы единственности для простых и кратных тригонометрических рядов

(Представлено 12/VII 2020)

Ключевые слова: *тригонометрический ряд, кратный ряд, сходимость по Прингсхейму, теорема единственности.*

Если дважды формально интегрировать тригонометрический ряд

$$\sum_{n\in Z} a_n e^{inx} =: \sum_{n\in Z} A_n(x) \tag{1}$$

с коэффициентами

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \tag{2}$$

то получится равномерно сходящийся ряд с суммой

$$F(x) := Ax + B + \frac{a_0 x^2}{2} - \sum_{n\in Z, n\neq 0} \frac{A_n(x)}{n^2}.$$

Обозначим

$$S(x,h) := \frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h^2}$$

и

$$S^*(x) := \sup_{h>0} |S(x,h)|.$$

Выражения $S(x,h)$, $h>0$, называют суммами Римана ряда (1), а $S^*(x)$ − мажорантой Римана этого ряда. Известно, что

$$S(x,h) = \sum_{n\in Z} A_n(x) \left(\frac{sin\frac{nh}{2}}{\frac{nh}{2}}\right)^2,$$

где полагается $\frac{\sin 0}{0} = 1$, и если ряд (1) в точке x сходится (см. [1], с. 187), то

$$\lim_{h\to 0} S(x,h) = \sum_{n\in Z} A_n(x),$$

а вообще, если существует $\lim_{h\to 0} S(x,h) = S$, то говорят, что ряд (1) в точке x методом Римана суммируется к значению S.

В теории тригонометрических рядов хорошо известна (см. [2], а также [1], с. 191)

Теорема Кантора. *Если ряд (1) всюду сходится к нулю, то все коэффициенты этого ряда равны нулю.*

На самом деле доказывается, что если ряд (1) методом Римана всюду суммируется к нулю, то все коэффициенты этого ряда равны нулю. В дальнейших усилениях и обобщениях теоремы Кантора присутствовала сходимость или суммируемость всюду или всюду, кроме, быть может, некоторого счетного множества. Это оправдывалось тем, что имеет место (см. [3], а также [1], с. 804)

Теорема Меньшова. *Существует тригонометрический ряд, который почти всюду сходится к нулю, однако не все коэффициенты этого ряда равны нулю.*

Следовательно, для получения теорем единственности для почти всюду сходящихся рядов нужны дополнительные условия на ряд. В этом направлении первые результаты получены в [4-7], где в качестве дополнительных условий выступают условия на функции распределения мажорант Абеля и Римана.

Отметим еще одну важную теорему из теории тригонометрических рядов (см. [8], а также [1], с.789).

Теорема Валле-Пуссена. *Пусть пределы неопределенности ряда (1), т.е. функции*

$$G(x) \coloneqq \operatorname{liminf}_{n\to\infty} \sum_{|n|\le N} A_n(x) \quad \text{и} \quad F(x) \coloneqq \operatorname{limsup}_{n\to\infty} \sum_{|n|\le N} A_n(x), \tag{3}$$

конечны всюду, кроме, быть может, некоторого счетного множества, и обе функции интегрируемы на $[0, 2\pi]$, *тогда ряд (1) суммируется методом Римана почти всюду и является рядом Фурье этой суммы.*

Из этой теоремы следует другая

Теорема Валле-Пуссена. *Если ряд (1) всюду, кроме, быть может, некоторого счетного множества, сходится к всюду конечной интегрируемой функции, то он является рядом Фурье этой функции.*

В настоящей работе основными результатами для простых рядов являются следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть для ряда (1) с коэффициентами (2), всюду, кроме, быть может, некоторого счетного множества, B выполняется*

$$S^*(x) < \infty, \text{ когда } \quad x \notin B, \tag{4}$$

и суммы $S(x, h)$ *по мере сходятся к интегрируемой функции* f, *когда* $h \to 0$. *Тогда ряд (1) является рядом Фурье функции* f.

Теорема 2. *Пусть для ряда (1) с ограниченными коэффициентами всюду выполняется*

$$S^*(x) < \infty$$

и суммы $S(x, h)$ *по мере сходятся к некоторой интегрируемой функции* f, *когда* $h \to 0$. *Тогда ряд (1) является рядом Фурье функции* f.

Отметим, что из сходимости по мере ряда (1) следует выполнение (2). Поэтому, учитывая регулярность метода суммирования Римана, из теоремы 1 можно получить следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть для ряда (1) с коэффициентами (2) всюду, кроме, быть может, некоторого счетного множества* B, *выполняется*

$$\sup_N \Big|\sum_{|n|\le N} A_n(x)\Big| < \infty, \text{ когда } \quad x \notin B,$$

и

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{|n|\le\infty}A_n(x)=f(x)\ \textit{по мере},$$
где f– некоторая интегрируемая функция. Тогда ряд (1) является рядом Фурье функции f.

Очевидно, что условие интегрируемости функций (3) сильнее, чем условие (4). Поэтому из теоремы Валле-Пуссена не следуют теоремы 1 и 3. С другой стороны, из теорем 1 и 3 следуют теоремы Валле-Пуссена.

В работе через $\mathbb{T}$ обозначается периодический отрезок $[-\pi,\pi]$.

Напомним, что множество $E\subset\mathbb{T}^d$, $d\ge 1$, называется U-множеством (VP-множеством) d-кратных тригонометрических рядов, если из сходимости d-кратного тригонометрического ряда всюду, кроме, быть может, точек множества E к нулю (к всюду конечной интегрируемой функции f), следует, что этот ряд тривиальный (является рядом Фурье функции f). Ясно, что любое VP-множество является U-множеством.

В случае $d\ge 2$ нужно уточнить, что понимаем, когда говорим “ряд сходится”. Все зависит от того, какие частичные суммы кратного ряда рассматриваются. В настоящей работе мы рассматриваем прямоугольные частичные суммы, т.е. сходимость по Прингсхейму.

В 1972 г. Эш и Уеланд [9] доказали, что в случае $d=2$ пустое множество является U-множеством для двойных тригонометрических рядов, сходящихся по Прингсхейму.

Долгое время оставался открытым ответ на следующий вопрос: если d-кратный ($d\ge 3$) тригонометрический ряд сходится к нулю по Прингсхейму всюду на $\mathbb{T}^d$, то обязаны ли все коэффициенты этого ряда быть нулями?

В 1991 г. Ш. Е. Тетунашвили [10] доказал ряд важных теорем, в которых содержится положительный ответ на вышеуказанный вопрос. Он также получил богатый класс непустых VP-множеств для кратных тригонометрических рядов, сходяшихся по Прингсхейму. В частности, он доказал следующую теорему (см. [10], следствие 8).

Теорема Тетунашвили. *Если множество $E\subset\mathbb{T}$ является VP-множеством простых тригонометрических рядов, то множество $E\times\mathbb{T}^{d-1}\subset\mathbb{T}^d$ является VP-множеством d-кратных тригонометрических рядов.*

Мы получили новый класс VP-множеств для кратных тригонометрических рядов.

Теорема 4. *Пусть двойной тригонометрический ряд*
$$\sum_{m,n\in Z}a_{mn}e^{i(mx+ny)} \tag{5}$$
с суммами
$$S_{MN}(x,y):=\sum_{|m|\le M}\sum_{|n|\le N}a_{mn}e^{i(mx+ny)} \tag{6}$$
удовлетворяет условию
$$\lim_{M,N\to\infty}S_{MN}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=f(x,y),\ (x,y)\notin\mathcal{G},$$
где f – всюду конечная интегрируемая функция,
$$\mathcal{G}=\bigcup_{y\in Y}X_y\times\{y\},\ \textit{где}\ \mu(Y)=0\ \textit{и}\ \mu(X_y)=0,\ \textit{для любого}\ y\in Y. \tag{7}$$
Тогда ряд (5) является рядом Фурье функции f.

Теорема 5. *Пусть тригонометрический ряд с суммами (5) и множество (7) удовлетворяют условию*

$$\operatorname{limsup}_{M,N\to\infty}\left|S_{M,N}(x,y)\right| < \infty, \text{ когда } (x,y) \notin \mathcal{G},$$

и

$$\lim_{M,N\to\infty} S_{MN}(x,y) = f(x,y), \text{ п.в. на } \mathbb{T}^2,$$

где f — всюду конечная интегрируемая функция. Тогда ряд (5) является рядом Фурье функции f.

Эти теоремы получаются с применением следующей теоремы.

Теорема 6. *Пусть коэффициенты тригонометрического ряда (5) удовлетворяют условиям*

$$\sup_{m\in Z}|a_{mn}| < \infty \text{ и } \sup_{n\in Z}|a_{mn}| < \infty, \text{ для всех } m,n \in Z,$$

а для сумм Римана

$$S^*(x,y,\mathrm{x},\eta) := \sum_{m,n\in Z} a_{mn}\left(\frac{\sin mh}{mh}\right)^2\left(\frac{\sin n\eta}{n\eta}\right)^2$$

выполняются

$$S^*(x,y) < \infty, \text{ когда } (x,y) \notin \mathcal{G},$$

где $\mathcal{G}$ определяется формулой (7), а $S^*(x,y) := \sup_{h,\eta>0}|S(x,y,h,\eta)|$ и

$$\lim_{h,\eta\to 0} S(x,y,h,\eta) = f(x,y), \text{ п.в. на } \mathbb{T}^2,$$

где f — всюду конечная интегрируемая на $\mathbb{T}^2$ функция.

Тогда ряд (5) является рядом Фурье функции f.

Для $d \geq 2$ введем следующие обозначения: $\boldsymbol{n} := (n_1,\dots,n_d) \in \mathbb{Z}^d$, $\boldsymbol{N} := (N_1,\dots,N_d) \in \mathbb{N}^d$, $\boldsymbol{x} := (x_1,\dots,x_d) \in \mathbb{R}^d$, $\boldsymbol{h} := (h_1,\dots,h_d) \in \mathbb{R}^d_+$, $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x} := n_1x_1 + \dots + n_dx_d$.

Ш. Т. Тетунашвили [10] доказано, что если $E \subset \mathbb{T}^d$ является VP-множеством d-кратных тригонометрических рядов, то $E \times \mathbb{T}$ является VP-множеством $d+1$-кратных тригонометрических рядов. Поэтому из теоремы 4 по индукции можно получить следующую теорему.

Теорема 7. *Пусть d-кратный тригонометрический ряд*

$$\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d} a_{\boldsymbol{n}}\, e^{i\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}}, \text{ с суммами } S_{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{x}) := \sum_{|\boldsymbol{n}|\leq\boldsymbol{N}} a_{\boldsymbol{n}}\, e^{i\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}}, \qquad (8)$$

удовлетворяет условию

$$\lim_{N\to\infty} S_{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}), \quad x \notin \mathcal{G},$$

где f всюду конечная интегрируемая функция,

$\mathcal{G} = \bigcup_{y\in Y} X_y \times \{y\} \times \mathbb{T}^{d-2}$, *где* $\mu(Y) = 0$ *и* $\mu(X_y) = 0$, *для любого* $y \in Y$.

Тогда ряд (8) является рядом Фурье функции f.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОНКС РА в рамках проекта 18T-1A074.

Ереванский государственный университет
e-mail: ggg@ysu.am

Академик Г. Г. Геворкян

Теоремы единственности для простых и кратных тригонометрических рядов

Для простых тригонометрических рядов, в частности, доказано, что если тригонометрический ряд методом Римана по мере суммируется к интегрируемой функции f и мажоранта Римана всюду, кроме, быть может, некоторого счетного множества, конечна, то этот ряд является рядом Фурье функции f. С применением этой теоремы получены теоремы единственности для кратных тригонометрических рядов.

Ակադեմիկոս Գ. Գ. Գևորգյան

Միակության թեորեմներ միապատիկ և բազմապատիկ եռանկյունաչափական շարքերի համար

Միապատիկ եռանկյունաչափական շարքերի համար մասնավորապես ապացուցված է, որ եթե եռանկյունաչափական շարքը Ռիմանի մեթոդով, ըստ չափի, զուգամիտում է f ինտեգրելի ֆունկցիայի և Ռիմանի մաժորանտը ամենուրեք, բացի, գուցե, հաշվելի բազմության կետերից, վերջավոր է, ապա այդ ֆունկցիայի Ֆուրիե շարքն է: Այս թեորեմի կիրառությամբ ստացվել են միակության թեորեմներ բազմապատիկ եռանկյունաչափական շարքերի համար:

Academician G. G. Gevorkyan

Uniqueness Theorems on Simple and Multiple Trigonometric Series

In the paper it is proved particularly that if the trigonometric series converges in measure by Riemann's method to an integrable function *f* and the Riemann's maximal function is finite everywhere except possibly a countable set, then this series is the Fourier series of the function *f*. Applying this theorem, uniqueness theorems for multiple trigonometric series are obtained.

Литература

1. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М. Физматгиз. 1961. 936 с.
2. *Cantor G.* – Mathematisce Annalen. 1872. V. 5. P. 123-132.
3. .*Menshoff D. E.* – C.R.A.S. Paris. 1916. V. 163. P. 433-436.
4. *Александров А. Б.* – Мат. заметки. 1981. Т. 30:1. С. 59-72.
5. *Геворкян Г. Г.* – Мат. сборник. 1989. Т. 180:11. С. 1462-1474.
6. *Геворкян Г. Г.* – Мат. заметки. 1989. Т. 45:5. С. 114-117.
7. *Геворкян Г. Г.* – Мат. сборник. 1993. Т. 184:11. С. 93-130.
8. *Valle-Poussin Ch. L.*– Bull. de Acad. Roy. de Belg. 1912. P. 702-718.
9. *Ash J., Welland G.* – Trans. Amer. Math. Soc. 1972. V. 163. P. 401-436.
10. *Тетунашвили Ш. Т.* – Мат. сборник. 1991. Т. 182:8. С. 1158-1176.