

МЕХАНИКА

УДК 539.3

Академик Г. Е. Багдасарян

**Устойчивость композиционной слоистой цилиндрической
оболочки в сверхзвуковом потоке газа**

(Представлено 25/II 2020)

Ключевые слова: композиционная слоистая цилиндрическая оболочка, флаттер, критическая скорость.

Введение. Устойчивости пластин и оболочек в сверхзвуковом потоке газа посвящены многочисленные исследования. В частности вопросы сверхзвукового флаттера изотропных, слоистых и анизотропных (не композиционных) тонких пластин и оболочек изучены достаточно, и эффекты взаимодействия здесь оказались весьма существенными. Аналогичные вопросы для тонких тел из композиционного материала почти не исследованы.

Предлагаемая работа посвящена вопросам устойчивости слоистой цилиндрической оболочки из монослоев ортотропного композиционного материала (КМ), обтекаемой сверхзвуковым потоком газа. Исследование проведено в линейной постановке в случае замкнутой удлиненной оболочки. Получена формула определения критической скорости флаттера. Найдено минимальное значение критической скорости по волновым числам в зависимости от углов армирования слоев материала оболочки. Исследован вопрос оптимального регулирования величины минимальной критической скорости при помощи выбора угла армирования и физико-механических параметров рассматриваемой задачи.

1. Основные уравнения. Рассмотрим тонкую цилиндрическую оболочку постоянной толщины h , составленную из конечного числа $(2k+1)$ слоев, симметрично расположенных относительно срединной поверхности оболочки. За координатную поверхность принимается срединная поверхность оболочки (срединная поверхность среднего слоя), которая представляется координатами α_1, α_2 (α_1 – вдоль образующей, α_2 – по дуге поперечного сечения) и радиусом кривизны $R = \text{const}$. Третья координатная линия α_3 прямолинейная и представляет расстояние по нормали срединной поверхности от точки $(\alpha_1, \alpha_2, 0)$ до точки $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ оболочки. Слои,

симметрично расположенные относительно координатной поверхности $\alpha_3 = 0$, имеют одинаковую толщину, одинаковые физико-механические свойства и состоят из $2n_s$ элементарных слоев ортотропного композиционного материала, уложенных поочередно под углами $\pm\varphi_s$ ($s=1,2,\dots,2k+1$) к оси цилиндра. Таким образом, рассматривается слоистая цилиндрическая оболочка, составленная из нечетного числа однородных ортотропных слоев, симметрично расположенных относительно срединной поверхности [1, 2]. Предполагается, что слои оболочки после деформирования остаются упругими и работают совместно, без скольжения.

Согласно вышеизложенному упругие характеристики $B_{ij}^{(s)}$ материала s -го слоя в главных геометрических направлениях оболочки определяются через упругие характеристики соответствующих элементарных слоев в главных физических направлениях по известным формулам поворота [3].

Пусть оболочка обтекается с внешней стороны сверхзвуковым потоком газа с невозмущенной скоростью \bar{u} ($|\bar{u}| = U = \text{const}$), направленной по образующим цилиндра. Будем исследовать устойчивость оболочки под действием избыточного давления газа, появляющегося вследствие малых возмущений обтекаемой поверхности (вследствие возмущенного колебания оболочки).

Для получения основных уравнений и соотношений, описывающих возмущенное движение рассматриваемой аэроупругой системы, принимаются следующие предположения:

а) гипотеза о недеформируемых нормалях для всего пакета оболочки в целом [3];

б) избыточное давление Δp вычисляется с помощью приближенной формулы “поршневой теории” при малых возмущениях [4];

в) влияниями тангенциальных составляющих сил инерции можно пренебречь.

В силу принятых предположений получаются следующие уравнения и соотношения, описывающие поведение малых возмущений в рассматриваемой оболочке [3]:

уравнения возмущенного состояния

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial \alpha_2} = 0, \quad \frac{\partial T_{22}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial T_{21}}{\partial \alpha_1} = 0, \\ \frac{\partial^2 M_{11}}{\partial \alpha_1^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial \alpha_2^2} + \frac{1}{R} T_{22} + Z = m^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь m^* – приведенная масса, отнесенная к единице площади срединной поверхности

$$m^* = \frac{2}{g} \left[\gamma_{k+1} \delta_{k+1} + \sum_{i=1}^k \gamma_i (\delta_i - \delta_{i+1}) \right],$$

где γ_i – удельный вес материала i -го слоя, δ_i – расстояние верхней поверхности i -го слоя от срединной поверхности, Z – нормальная составляющая внешней нагрузки, T_{ij} , M_{ij} – возмущения внутренних сил и моментов невозмущенного состояния, $u(\alpha_1, \alpha_2, t)$, $v(\alpha_1, \alpha_2, t)$, $w(\alpha_1, \alpha_2, t)$ – возмущения перемещений точек срединной поверхности оболочки;

соотношения упругости

$$\begin{aligned} T_{11} &= c_{11} \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + c_{12} \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha_2} + \frac{w}{R} \right), \quad M_{11} = -D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2}, \\ T_{22} &= c_{22} \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha_2} + \frac{w}{R} \right) + c_{12} \frac{\partial u}{\partial \alpha_1}, \quad M_{22} = -D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2}, \\ T_{12} = T_{21} &= c_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial v}{\partial \alpha_1} \right), \quad M_{12} = -2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь для жесткостей растяжения c_{ij} и изгиба D_{ij} имеем

$$\begin{aligned} c_{ij} &= 2 \left[B_{ij}^{(k+1)} \delta_{k+1} + \sum_{s=1}^k B_{ij}^{(s)} (\delta_s - \delta_{s+1}) \right], \\ D_{ij} &= \frac{2}{3} \left[B_{ij}^{(k+1)} \delta_{k+1}^3 + \sum_{s=1}^k B_{ij}^{(s)} (\delta_s^3 - \delta_{s+1}^3) \right], \end{aligned} \quad (1.3)$$

где упругие постоянные $B_{ij}^{(s)}$ материала s -го слоя в главных геометрических направлениях оболочки согласно формулам поворота имеют следующие представления [3]:

$$\begin{aligned} B_{11}^{(s)} &= B_{11}^{0(s)} \cos^4 \varphi_s + 2B_0^{(s)} \sin^2 \varphi_s \cos^2 \varphi_s + 2B_{22}^{0(s)} \sin^4 \varphi_s, \\ B_{22}^{(s)} &= B_{11}^{0(s)} \sin^4 \varphi_s + 2B_0^{(s)} \sin^2 \varphi_s \cos^2 \varphi_s + 2B_{22}^{0(s)} \cos^4 \varphi_s, \\ B_{12}^{(s)} &= B_{12}^{0(s)} + [B_{11}^{0(s)} + B_{22}^{0(s)} - 2B_0^{(s)}] \sin^2 \varphi_s \cos^2 \varphi_s, \\ B_{66}^{(s)} &= B_{66}^{0(s)} + [B_{11}^{0(s)} + B_{22}^{0(s)} - 2B_0^{(s)}] \sin^2 \varphi_s \cos^2 \varphi_s, \\ B_0^{(s)} &= B_{12}^{0(s)} + 2B_{66}^{0(s)}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

В (1.4) $B_{ij}^{(s)}$ – упругие постоянные материала s -го слоя в главных физических направлениях (упругие постоянные элементарных слоев, образующих данный слой оболочки), φ_s – угол армирования материала s -го слоя.

Подставляя значения внутренних сил и моментов из (1.2) в уравнение (1.1), получим систему линейных дифференциальных уравнений возмущенного движения оболочки:

$$\begin{aligned}
c_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_1^2} + c_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_2^2} + (c_{12} + c_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + \frac{c_{12}}{R} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} &= 0, \\
c_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha_2^2} + c_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha_1^2} + (c_{12} + c_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + \frac{c_{22}}{R} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} &= 0, \\
D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha_1^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha_1^2 \partial \alpha_2^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha_2^4} + \\
+ \frac{1}{R} \left(c_{12} \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + c_{22} \frac{\partial v}{\partial \alpha_2} \right) + c_{22} \frac{w}{R^2} + m^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= Z.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Поперечная нагрузка $Z(\alpha_1, \alpha_2, t)$ возмущенного состояния складывается из сил демпфирования и избыточного аэродинамического давления Δp

$$Z = -\varepsilon m^* \frac{\partial w}{\partial t} + \Delta p, \tag{1.6}$$

где ε – коэффициент затухания.

В случае внешнего обтекания оболочки, используя “поршневую теорию” для Δp , получаем [5]

$$\Delta p = -\varkappa p_0 \left(\frac{1}{a_0} \frac{\partial w}{\partial t} + M \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} \right), \quad M = \frac{U}{a_0}. \tag{1.7}$$

В (1.7) M – число Маха, p_0 – давление, a_0 – величина скорости звука для невозмущенного газа, \varkappa – показатель политропы.

Введением функции $\Phi(\alpha_1, \alpha_2, t)$, связанной с u, v, w соотношениями [3]

$$\begin{aligned}
u &= L_1 \Phi = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(a_{22} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - a_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} \right) \Phi, \\
v &= L_2 \Phi = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[(a_{66} - a_{12}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + a_{22} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} \right] \Phi, \\
w &= L_3 \Phi = \left[a_{11} \frac{\partial^4}{\partial \alpha_1^4} + (a_{66} - 2a_{12}) \frac{\partial^4}{\partial \alpha_1^2 \partial \alpha_2^2} + a_{22} \frac{\partial^4}{\partial \alpha_2^4} \right] \Phi,
\end{aligned} \tag{1.8}$$

с учетом (1.6) и (1.7), приведем систему (1.5) к одному разрешающему уравнению [6]

$$PL_3 \Phi + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha_1^4} + L_3 \left[m^* \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \left(m^* \varepsilon + \frac{\varkappa p_0}{a_0} \right) \frac{\partial}{\partial t} + \varkappa p_0 M \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right] \Phi = 0, \tag{1.9}$$

где линейный дифференциальный оператор P имеет вид

$$P = D_{11} \frac{\partial^4}{\partial \alpha_1^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial \alpha_1^2 \partial \alpha_2^2} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial \alpha_2^4}.$$

Коэффициенты a_{ik} линейных дифференциальных операторов L_i ($i=1,2,3$) определяются формулами [3]

$$a_{ik} = \frac{c_{ik}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}, \quad a_{66} = \frac{1}{c_{66}} \quad (i=1,2, \quad k=1,2). \quad (1.10)$$

Таким образом, задача устойчивости рассматриваемой цилиндрической оболочки в сверхзвуковом потоке газа сведена к решению уравнения (1.9) при обычных условиях закрепления краев оболочки.

2. Определение критической скорости флаттера. Влияние угла армирования. С целью выявления качественного влияния угла армирования материала оболочки на процесс устойчивости аэроупругой системы ниже рассматривается случай однослойной бесконечной оболочки. Тогда решение уравнения (1.9) ищется в виде

$$\Phi = \Phi_0 e^{i(\omega t - k\alpha_1)} \cos \frac{n}{R} \alpha_2. \quad (2.1)$$

Здесь Φ_0 – некоторая комплексная постоянная, ω – частота колебаний, $k = \pi/\lambda$ – волновое число, λ – длина полуволны в направлении обтекающих, n – целое число волн по окружности оболочки.

Подстановка (2.1) в (1.9) приводит к характеристическому уравнению, которое запишем следующим образом:

$$\omega^2 - i\omega(\varepsilon + \gamma) - \Omega^2(k, n) + ik\gamma U = 0, \quad (2.2)$$

где

$$\Omega^2(k, n) = \frac{1}{\rho h} \left[D_{11}k^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})k^2 \frac{n^2}{R^2} + D_{22} \frac{n^4}{R^4} + \frac{1}{R^2} \frac{k^4}{a_{11}k^4 + (a_{66} - 2a_{12})k^2 \frac{n^2}{R^2} + a_{22} \frac{n^4}{R^4}} \right], \quad \gamma = \frac{\varepsilon p_0}{\rho h a_0} \quad (2.3)$$

квадрат частоты собственных поперечных колебаний оболочки в вакууме, a_{ik} определяются согласно (1.10), жесткости D_{ik} и c_{ik} согласно (1.3) представляются в виде

$$D_{ik} = B_{ik} h^3 / 12, \quad c_{ik} = B_{ik} h,$$

ρ – плотность материала оболочки.

Для любых заданных значений k и n из уравнения (2.2) можно найти частоту. Если ее мнимая часть положительна, то невозмущенное движение устойчиво по отношению к малым возмущениям. Наличие частот с отрицательной мнимой частью означает неустойчивость. Условия, чтобы уравнение (2.2) с комплексными коэффициентами не имело корней с отрицательными мнимыми частями, могут быть представлены в форме, аналогичной известным условиям Рауса – Гурвица [7]. Поступая анало-

гичным образом, как в работе [5], из этих условий для критической скорости получим формулу

$$U_{cr} = V \left(1 + \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\varepsilon h}{a_0} \right). \quad (2.4)$$

Здесь ρ_0 – плотность невозмущенного газа, V – фазовая скорость распространения упругих волн в оболочке

$$V^2 = \frac{1}{\rho_0 h R^2} \left[\frac{D_{11} m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) m^2 n^2 + D_{22} n^4}{m^2} + \right. \\ \left. + R^2 \frac{m^2}{a_{11} m^4 + (a_{66} - 2a_{12}) m^2 n^2 + a_{22} n^4} \right], \quad (2.5)$$

где $m = kR$, а второй член в скобках формулы (2.4) учитывает влияние конструкционного демпфирования.

Из (1.3), (1.4) и (1.10) следует, что D_{ik} и a_{ik} зависят от угла армирования φ материала оболочки. Более того, как критическая скорость, так и величины D_{ik} и a_{ik} являются периодическими функциями угла φ с периодом π .

Наибольший интерес представляют те значения аргументов m и n , вблизи которых критическая скорость принимает минимальное значение.

Если имеет место осесимметричная форма потери устойчивости, то $n = 0$ и критическая скорость принимает минимальное значение U_{cr}^{\min} при

$$m = \frac{\sqrt{R}}{\sqrt[4]{D_{11} a_{11}}}. \quad (2.6)$$

Для самой скорости получим формулу

$$U_{cr}^{\min} = \sqrt{\frac{2}{\rho_0 h R}} \sqrt[4]{\frac{D_{11}}{a_{11}}} \left(1 + \frac{\varepsilon}{\gamma} \right). \quad (2.7)$$

Если устойчивость теряется по несимметричной форме, то, учитывая, что [8] при $h/R \ll 1$ и $\lambda/R > \pi$ (тогда $kR \sim 1$) частота колебаний Ω получает минимальное значение, когда число окружных волн порядка десяти, принимается $m^2 \ll n^2$. В этом случае минимум функции $U_{cr}(m, n)$ достигается при

$$\frac{n^2}{m} = \frac{R}{\sqrt{a_{22} D_{22}}} \quad (2.8)$$

и составляет

$$U_{cr}^{\min} = \left[\frac{1}{\rho_0 h} \left(\frac{1}{a_{22}} + \frac{D_{22}}{R^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\varepsilon}{\gamma} \right). \quad (2.9)$$

Рассматривая формулы (2.6)-(2.9), легко заметить, что минимальные значения критической скорости существенно зависят от угла армирования материала оболочки. Для иллюстрации указанной зависимости на основе (2.9) приведены числовые расчеты при $h = 0.01R$. Рассматриваются оболочки, изготовленные из композиционных материалов со следующими безразмерными упругими характеристиками $\bar{B}_{ik}^0 = B_{ik}^0 / B_{11}^0$ в главных направлениях упругости [9, 10]:

1) стеклопластик СВАМ 5:1

$$\bar{B}_{11}^0 = 1, \quad \bar{B}_{22}^0 = 0.62, \quad \bar{B}_{12}^0 = 0.12, \quad \bar{B}_{66}^0 = 0.16;$$

2) стеклопластик СВАМ 1:1

$$\bar{B}_{11}^0 = \bar{B}_{22}^0 = 1, \quad \bar{B}_{12}^0 = 0.08, \quad \bar{B}_{66}^0 = 0.1;$$

3) стеклопластик КАСТ – В

$$\bar{B}_{11}^0 = 1, \quad \bar{B}_{22}^0 = 0.572, \quad \bar{B}_{12}^0 = 0.11, \quad \bar{B}_{66}^0 = 0.0956.$$

При этих исходных данных результаты вычислений приведены на рис.1. Кривые на этом рисунке представляют собой зависимости минимальной безразмерной критической скорости $\tilde{U} = c_t^{-1} U_{cr}^{\min}$, где $c_t = (B_{11}^0 / \rho_0)^{1/2}$, от угла армирования φ .

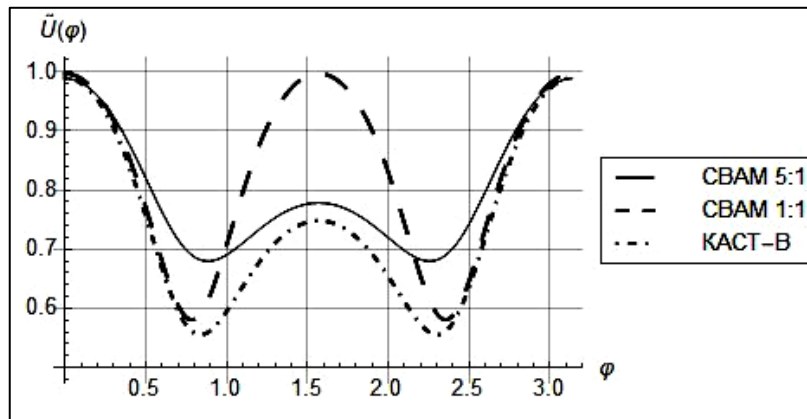


Рис.1. График минимальной критической скорости флаттера $\tilde{U}(\varphi)$ для различных КМ.

Рис.1 показывает, что:

а) максимальные значения минимальной критической скорости получаются при $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi/2$, т.е. когда одно из главных направлений упругости материала монослоев, образующих оболочку, совпадает с направлением потока газа (указанное максимальное значение получается также при $\varphi = \pi/2$, если $\bar{B}_{11}^0 = \bar{B}_{22}^0$);

б) минимальные значения минимальной (по волновым числам) критической скорости достигаются в точках внутри интервала $(0, \pi)$, располо-

жение которых существенно зависит от отношений типа B_{ik}^0/B_{11}^0 . Таким образом, варьируя физико-механические параметры композиционной аэроупругой системы, особенно угол армирования материала оболочки, можно оптимально регулировать величину критической скорости флаттера.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 18T-2C149.

Институт механики НАН РА
e-mail: gevorg.baghdasaryan@rau.am

Академик Г. Е. Багдасарян

Устойчивость композиционной слоистой цилиндрической оболочки в сверхзвуковом потоке газа

Рассматривается задача устойчивости слоистой цилиндрической оболочки, изготовленной из монослоев ортотропного композиционного материала и обтекаемой сверхзвуковым потоком газа. Исследование проведено в линейной постановке в случае замкнутой удлиненной оболочки. Получена формула определения критической скорости флаттера. Найдено минимальное значение критической скорости по волновым числам в зависимости от углов армирования слоев материала оболочки. На этой основе показано, что: а) минимальное значение (по волновым числам) критической скорости является функцией угла армирования, а максимальные значения получаются, когда одно из главных направлений упругости материала монослоев, образующих оболочку, совпадает с направлением потока газа; б) минимальные значения минимальной (по волновым числам) критической скорости достигаются в точках внутри интервала $(0, \pi)$. Следовательно, варьируя физико-механические параметры композиционной аэроупругой системы, особенно угол армирования материала оболочки, можно оптимально регулировать величину критической скорости флаттера.

Ակադեմիկոս Գ. Ե. Բաղդասարյան

Գազի գերձայնային հոսանքով շրջհոսվող կոմպոզիցիոն շերտավոր գլանային թաղանթի կայունությունը

Դիտարկված է գազի գերձայնային հոսանքով շրջհոսվող օրթոտրոպ կոմպոզիցիոն նյութից պատրաստված շերտավոր գլանային թաղանթի կայունության խնդիրը: Հետազոտությունը կատարված է գծային դրվածքով փակ երկար թաղանթի դեպքում: Ստացված է ֆլատերի կրիտիկական արագության որոշման բանաձև: Որոշված է կրիտիկական արագության, ըստ ալիքային թվերի, մինիմալ արժեքը՝ կախված թաղանթի նյութի շերտերի արմիրավորման անկյունից: Դրա հիման վրա ցույց է տրված, որ ա) կրիտիկական արժեքի (ըստ ալիքային թվերի) մինիմալ արժեքը ըստ արմիրավորման անկյան ֆունկցիա է և ընդունում է մակսիմալ արժեք, երբ թաղանթի նյութի մոնոշերտերի առաձգականության զլխավոր ուղղություններից մեկը և գազի ուղղությունը համընկնում են, բ) կրիտիկական արժեքի (ըստ ալիքային թվերի) մինիմալ արժեքը

հասանելի է $(0, \pi)$ միջակայքի ներքին կետերում: Հետևաբար, կոմպոզիցիոն աերո-առաձգական համակարգի ֆիզիկական պարամետրերի և հատկապես թաղանթի նյութի արմիրավորման անկյան համապատասխան ընտրության միջոցով կարելի է օպտիմալ ղեկավարել ֆլատերի կրիտիկական արագության մեծությունը:

Academician G. E. Bagdasarian

Stability of a Composite Layered Cylindrical Shell in a Supersonic Gas Flow

The stability problem of a layered cylindrical shell made of monolayers of an orthotropic composite material in a supersonic gas flow is considered. The study was conducted in a linear formulation in the case of a closed elongated shell. The formula for determining the critical speed of flutter is obtained. The minimum value of the critical velocity by wave numbers was found depending on the angles of reinforcement of the layers of the shell material. Based on this, it was shown that a) the minimum value (by wave numbers) of the critical velocity is a function of the angle of reinforcement and takes maximum values when one of the main directions of elasticity of the material of the monolayers forming the shell coincides with the direction of gas flow, b) the minimum values of the minimum (by wave numbers) critical velocity are reached at points within the interval. Therefore, by varying the physical-mechanical parameters of the composite $(0, \pi)$ aeroelastic system, especially the angle of reinforcement of the shell material, it is possible to optimally control the critical velocity of flutter.

Литература

1. *Васильев В. В.* Механика конструкций из композиционных материалов. Л. Машиностроение. 1985. /М. 1988. 270 с.
2. *Алфутов Н. А., Зиновьев П. А., Попов Б. Г.* Расчет многослойных пластинок и оболочек из композиционных материалов. М. Машиностроение. 1984. 264 с.
3. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. М. Наука. 1974. 448 с.
4. *Илюшин А. А.* Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях. ПММ. Т. 20. Вып. 6. 1956. С. 733-755.
5. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М. Физматгиз. 1961. 339 с.
6. *Багдасарян Г. Е.* В кн.: Тр. IV Всесоюзн. конф. по теории пластин и оболочек. 1962. Ереван. Изд-во ЕГУ.
7. *Чеботарев Н. Г., Мейман Н. С.* Проблема Гауса – Гурвица для полиномов и целых функций. М. Изд. АН СССР. 1949. 333 с.
8. *Волмир А. С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М. Наука. 1972. 432 с.
9. *Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетере Г. А.* Сопротивление полимерных и композитных материалов. Рига. Зинатне. 1980. 572 с.
10. *Jones R.M.* Mechanics of composite materials. N. Y. Mc. Craw-Hill Book Co. 1975. 520 p.