

Если же потянуть только нижнюю педаль назад с силой F , то на заднем колесе возникает момент вращения Fl . Значит, на заднее колесо действует сила трения $F_{\text{тр}} = Fl/R$, направленная вперед, и результирующая сила равна $F_s = F - Fl/R = F(1 - l/R)$. Таким образом, на велосипед действует сила $F_s = 0.5F$, направленная назад. Поэтому велосипед поедет назад.

Теперь перейдем к кинематике. Так как велосипед поедет назад, то при этом педаль относительно каретки движется вперед. Обозначим малое смещение педали вперед через x . Тогда из подобия треугольников найдем, что нижний зуб передней звездочки велосипеда пройдет расстояние (вперед), равное $y = \rho x/l$. Это означает, что задняя звездочка велосипеда повернется на угол y/r , следовательно, заднее колесо (и велосипед) сместится относительно пола назад на расстояние

$$z = R \frac{y}{r} = \frac{R\rho x}{rl}. \quad (1.1)$$

Если теперь посмотреть на велосипед на рис. 1, то можно оценить

$$l \approx 2\rho, \quad R \approx 10r. \quad (1.2)$$

Подставляя эти соотношения в формулу для перемещения z , получим

$$z \approx 5x. \quad (1.3)$$

На это расстояние перемещается каретка относительно пола назад, а поскольку педаль смещается относительно каретки вперед, то относительно пола педаль смещается на расстояние $4x$ назад.

Таким образом, велосипед сдвинется назад, и педаль относительно пола тоже сдвинется назад, но на расстояние на 20% меньше, чем велосипед.

Однако в своей книге [1] В.И. Арнольд приводит неверный ответ: он считает, что велосипед сдвинется вперед, что противоречит законам физики. Вы можете сами проделать эксперимент и убедиться в том, что когда вы тянете нижнюю педаль велосипеда назад, то и велосипед едет назад! Поэтому на рис. 1, который сделал В.И. Арнольд, направление всех стрелок, указывающих движение, изменено на обратное.

В описанной выше модели предполагается, что проскальзывание отсутствует и педаль жестко связана с колесом, так что велосипед может ехать вперед и назад. Редактор второго издания книги [1], вышедшей в 2010 г., считает, что модель В.И. Арнольда неточна и чтобы ее исправить, надо предположить, что человек сидит в седле велосипеда и ногой прилагает силу к нижней педали назад. Нетрудно видеть, что в этом случае преодолеть силу трения и сдвинуться с места не удастся. Для того, чтобы поехать вперед, надо оттолкнуться!

2. Устойчивость движения. Выясним теперь другой интересный вопрос: почему велосипед при езде не падает? Все знают, что на двухколесном велосипеде надо научиться ездить, чтобы не падать. Допустим, что велосипедист при езде по прямой со скоростью v отклонился от вертикали на угол α (рис. 2). Сила Q , действующая на колесо, имеет вертикальную и горизонтальную составляющие $N = Q \cos \alpha$, $F_T = Q \sin \alpha$. Из равенства сил по вертикали найдем $Q \cos \alpha = mg$, где m — масса велосипедиста

и велосипеда, а g – ускорение силы тяжести. Выразив из последнего равенства силу Q , найдем

$$F_T = mg \tan \alpha. \quad (2.1)$$

Это сила трения, направленная горизонтально. Чтобы возвратиться в вертикальное положение, велосипедисту надо отклонить руль в сторону наклона. При этом в системе координат, связанной с велосипедистом, возникает центробежная сила F_c , которая может уравновесить силу трения F_T и вернуть велосипед в вертикальное положение. Центробежная сила равна

$$F_c = \frac{mv^2}{R_1}, \quad (2.2)$$

где R_1 – радиус окружности поворота.

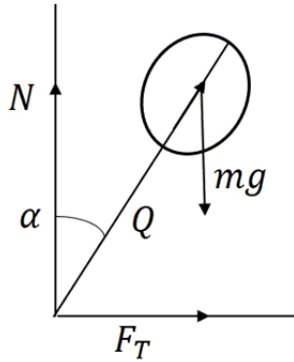


Рис. 2. Отклонение от вертикали.

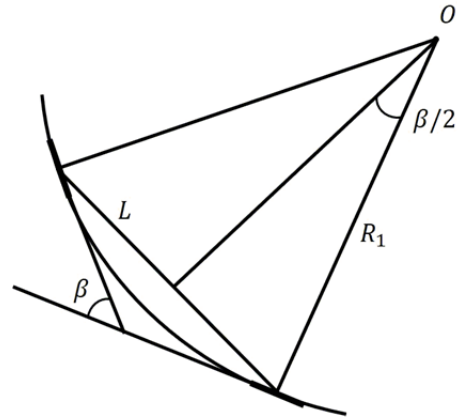


Рис. 3. Соотношение между углами.

Если угол отклонения руля обозначить через β , а расстояние между осями колес велосипеда через L , то радиус окружности R_1 найдем из соотношения $L = 2R_1 \sin \beta/2$ (рис. 3). Выразив отсюда радиус R_1 , найдем

$$F_c = \frac{2mv^2}{L} \sin \frac{\beta}{2}. \quad (2.3)$$

Велосипед возвратится в вертикальное положение, если центробежная сила превышает силу трения $F_c > F_T$. Подставляя в это неравенство выражения для сил, получим соотношение

$$\sin \frac{\beta}{2} > \frac{Lg \tan \alpha}{2v^2}. \quad (2.4)$$

Считая углы отклонения α и β малыми, можно приближенно заменить синус и тангенс их аргументами. Отсюда получим приближенную формулу

$$\beta > \beta_0, \quad \beta_0 = \frac{Lg\alpha}{v^2}. \quad (2.5)$$

Согласно этой формуле, чтобы не упасть и выпрямить велосипед, надо отклонить руль на угол β в сторону наклона на величину, превышающую критическое значение β_0 . Из этой формулы видно, что критический угол тем больше, чем больше угол α отклонения велосипеда от вертикали. Заметим также, что отклонять руль надо тем меньше, чем выше скорость движения велосипеда (в квадрате) и меньше расстояние между осями ко-

лес. Следовательно, легче управлять при езде с большей скоростью и на более коротком велосипеде.

Оценим величину β_0 . Если принять $g = 9.8 \text{ м/с}^2$, $L = 1.2 \text{ м}$, $v = 18 \text{ км/ч}$, то $\beta_0 \approx 0.47\alpha$. Таким образом, при этих параметрах надо отклонять руль примерно на половину угла отклонения от вертикали. Но угол β не должен значительно превышать критическое значение β_0 , иначе велосипед будет заваливаться в противоположную сторону. Тогда, чтобы его выровнять, нужно повернуть руль в ту же сторону и так далее. Искусство езды на велосипеде состоит в том, чтобы правильно рулить при отклонениях велосипеда от вертикали.

НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова
e-mail: seyran@imec.msu.ru

Иностранный член НАН РА А. П. Сейранян

Ошибка видного математика или куда поедет велосипед?

Обсуждается задача о велосипеде, принадлежащая видному математику В. И. Арнольду. Правильный ответ таков: велосипед сдвинется назад, и педаль относительно пола тоже сдвинется назад, но на расстояние на 20% меньшее, чем велосипед. Однако В. И. Арнольд приводит неверный ответ: он считает, что велосипед сдвинется вперед. Другой интересный вопрос состоит в том, что на двухколесном велосипеде надо научиться ездить, чтобы не падать. Езда на велосипеде заключается в том, чтобы правильно рулить при отклонениях велосипеда от вертикали.

ՀՀ ԳԱԱ արտասահմանյան անդամ Ա. Պ. Մեյրանյան

Ականավոր մաթեմատիկոսի սխալը կամ որտե՞ղ կգնա հեծանիվը

Քննարկվում է ականավոր մաթեմատիկոս Վ.Ի. Առնոլդին պատկանող հեծանիվի մասին խնդիրը: Ճիշտ պատասխանը հետևյալն է. հեծանիվը կտեղաշարժվի դեպի հետև ոտնակը հատակին համապատասխանաբար նույնպես կշարժվի հետընթաց, բայց հեծանիվից 20%-ով պակաս: Սակայն Վ. Ի. Առնոլդը իր գրքում բերում է սխալ պատասխան: Նա համարում է, որ հեծանիվը առաջ կգնա: Մեկ այլ հետաքրքիր հարց էլ այն է, որ պետք է սովորել երկանիվ հեծանիվ վարել՝ չընկնելու համար: Հեծանիվ վարելն այն է, որ ճիշտ վարես հեծանիվն ուղղահայացից շեղվելու ժամանակ:

Foreign member of NAS RA A. P. Seyranian

Error of Great Mathematician or Where to Move a Bicycle ?

The question belonging to great mathematician V. I. Arnold on behavior of a bicycle is discussed. Wright answer is: the bicycle, moves down, the pedal is moving down but according to parameters of a bicycle the distance is 20 percent smaller than the bicycle. But V. I. Arnold wrong answer is given: he likes bicycle to move forward.

Another interesting question on the two wheel bicycle it is necessary to operate the bicycle instead of falling down. The moving bicycle is in wright wheeling as response the bicycle takes place from the vertical.

Литература

1. *Арнольд В. И.* Математическое понимание природы. 3-е изд. стереотипное М. МЦНМО. 2011. 144 с.