ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 119 2019 № 3

МЕХАНИКА

УДК 539.3

М. В. Белубекян[1], С. В. Саркисян[2]

Распространение волн в системе тонкий слой – полупространство со смешанными граничными условиями

(Представлено чл.-кор. НАН РА А. С. Аветисяном 24/VI 2019)

Ключевые слова*: слой – полупространство, смешанные граничные условия, активное и реактивное акустическое сопротивление.*

Введение. В математическом моделировании физических явлений важнейшую роль играет выбор граничных условий. При изучении процесса распространения волн в упругих твердых телах принимается одно из предположений: границы тела жестко закреплены или границы тела свободны. Однако на практике существует множество ситуаций, когда нельзя пренебречь реальными свойствами сред, окружающих тело. Условию свободных лицевых поверхностей соответствует равенство нулю напряжений на границе; условиям закрепленных лицевых поверхностей – равенство нулю перемещений на границе. Оба эти граничные условия являются в большинстве случаев очень хорошим приближением, но иногда необходимо принимать в расчет более общее взаимодействие на границах сред. Обобщая, можно ввести условия упруго закрепленных границ, где в одном случае получаем свободные границы, а в другом – жестко закрепленные [1-4]. В [6-8] исследовано распространение волн в упругих телах с импедансными граничными условиями (на границе полупространства нормальное и касательное напряжения линейно изменяются с соответствующей составляюшей перемешения, умноженной на частоту). Коэффициент, который связывает напряжения с соответствующей составляюшей перемешения, принимает только реальные значения. Отметим,что кроме коэффициента там присутствует и частота колебания. В общем случае импеданс выражается как [9]: $Z = Z_1 + iZ_2$, где i – мнимая единица. Действительная часть, так называемое активное акустическое сопротивление, определяется диссипацией энергии в самой акустической системе и потерями на излучение звука. Мнимая часть, так называемое реактивное акустическое сопротивление, является следствием наличия в акустической системе сил упругости или инерции масс. Поэтому реактивное сопротивление бывает упругим или инерционным. Наличие частоты говорит о том, что граничное условие должно быть комплексным выражением, и поэтому в настоящей статье предлагается модель для исследования распространения волн в упругих телах (полупространство с тонким слоем), где на внешней границе слоя касательное напряжение линейно меняется с соответствующей составляюшей скорости.

1. Постановка задачи. Рассматриваются чисто сдвиговые упругие волны в системе слой – полупространство. Полупространство из упругого материала в прямоугольной системе координат (*x, y, z*) занимает область $x,z \in (-\infty,\infty), y \in [0,\infty)$, а слой – область $x,z \in (-\infty,\infty), y \in [-h,0]$. Величины, относящиеся к слою, будут отмечаться индексом 1, соответствующе величины для полупространства будут без индексов.

Уравнение чисто сдвиговых волн в слое имеет вид [5]

$$\frac{\partial \sigma_{13}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{23}^{(1)}}{\partial y} = \rho_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}, \tag{1.1}$$

где

$$\sigma_{13}^{(1)} = \mu_1 \frac{\partial w_1}{\partial x}, \sigma_{23}^{(1)} = \mu_1 \frac{\partial w_1}{\partial y}. \tag{1.2}$$

Соответствующее уравнение и материальные связи для полупространства следующие:

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial y} = \rho \ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{1.3}$$

$$\sigma_{13} = \mu \ \frac{\partial w}{\partial x}, \sigma_{23} = \mu \ \frac{\partial w}{\partial y}. \tag{1.4}$$

Предполагается, что на внешней границе слоя задано условие

$$\sigma_{23}^{1} + \alpha_0 \frac{\partial \ w_1}{\partial t} = 0 \quad \text{при } y=-h \ . \tag{1.5}$$

На плоскости контакта слоя и полупространства принимается непрерывность перемещения и напряжения

$$w_1 = w \,, \qquad \sigma_{23}^{(1)} = \sigma_{23} \,, \qquad \text{при } y=0. \tag{1.6}$$

Требуется найти решения уравнений (1.1), (1.3), удовлетворяющие граничным условиям (1.5), (1.6) и условию затухания

$$\lim_{y\to\infty} w=0. \tag{1.7}$$

2. Решение краевой задачи с граничным условием (1.5). Решение волнового уравнения (1.3) с учетом (1.4) представляется в виде [5]

$$w = Ae^{kpy} \exp i(\omega t - kx), \tag{2.1}$$

где

$$p^2 - (1-\eta^2)=0 \quad \eta = \frac{\omega}{kC_t} \ c_t^2 = \frac{\mu}{\rho}. \tag{2.2}$$

Для того чтобы решение (2.1) удовлетворяло условию затухания (1.7), необходимо, чтобы имело место неравенство

$$\mathbb{R}\mathrm{e}\, p < 0. \tag{2.3}$$

В случае волн Лява ($\alpha_0 = 0$) получается $\eta^2 < 1$ и $p = -\sqrt{1-\eta^2}$, т.е. для p получается действительное значение.

Если принять комплексные выражения

$$\omega = \alpha_1 + i\beta_1, \qquad p = r + iq, \tag{2.4}$$

то условию затухания будет удовлетворять корень уравнения (2.2)

$$p_1 = -\Gamma + {}^{i\alpha\beta}\!/_{\Gamma}. \tag{2.5}$$

В (2.5) приняты новые обозначения:

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{kC_t}, \qquad \beta = \frac{\beta_1}{kC_t},$$

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1-\alpha^2+\beta^2+\sqrt{(1-\alpha^2+\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2}\right]^{1/2}. \tag{2.6}$$

При этом решение (2.1) при $p = p_1$ из (2.5) будет удовлетворять условию затухания, если

$$0 < \alpha^2 < 1 + \beta^2. \tag{2.7}$$

Примем, что слой достаточно тонок по сравнению с длиной волны. Запишем уравнение (1.1) в виде

$$\mu_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial \sigma_{23}^{(1)}}{\partial y} = \rho_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}. \tag{2.8}$$

Для уравнения (2.8) примем, что $w_1 = w_1(x,t)$, и после этого проинтегрируем его по y от $-h$ до 0; с учетом граничных условий (1.5) и (1.6) получим

$$h\mu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial w}{\partial y} + \alpha_0 \frac{\partial w}{\partial t} - \rho_1 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \text{ при } y = 0. \tag{2.9}$$

Таким образом, для определения постоянного A решения (2.1) получили граничное условие (2.9).

3. Дисперсионное уравнение и численные результаты. Из (2.1) и (2.9) при значении корня $p = p_1$ из (2.5) получим дисперсионное уравнение, которое после разделения на действительную и мнимую части преобразуется к системе алгебраических уравнений относительно искомых безразмерных параметров α, β

$$\frac{H}{\Gamma}\left(1-\theta\left(\alpha^2-\beta^2\right)\right)+\beta\alpha_*+\Gamma=0,$$
$$\delta\alpha\beta+\delta\alpha\alpha_*\Gamma+2\alpha\beta\mathrm{H}\Gamma=0. \qquad (3.1)$$

В (3.1) введены обозначения

$$c_{t1}^2=\frac{\mu_1}{\rho_1},\quad \theta=\frac{c_t^2}{c_{t1}^2},\quad kh=H,\quad \alpha_*=\frac{\alpha_0 c_t}{\mu},\ \gamma=\frac{\mu}{\mu_1},\ \delta=\frac{\rho}{\rho_1}.$$

Из (3.1), когда частота ω действительная, следует $\beta=0$, и решение, удовлетворяющее условию затухания (1.7), существует, если $\theta > 1$.

При подстановке решения (2.1) в граничное условие (2.9) получается дисперсионное уравнение для полупространства с тонким слоем с граничным условием (1.5)

$$H\left(\eta^2\theta-1\right)+i\gamma\eta\alpha_*-\gamma\sqrt{1-\eta^2}=0. \qquad (3.2)$$

Если $\alpha_*=0$, то из (3.2) получается дисперсионное уравнение задачи Лява для полупространства с тонким слоем, которое имеет действительное решение, удовлетворяющее условию затухания (1.7) при $\theta > 1$. Уравнение (3.2) запишем в виде

$$\sqrt{1-\eta}=\frac{1}{\sqrt{1+\eta}}\left(\gamma^{-1}H\left(\eta^2\theta-1\right)+i\alpha_*\eta\right). \qquad (3.3)$$

Запись (3.3) удобна для нахождения корня уравнения (3.2) методом последовательных приближений:

$$\eta_n=1-\frac{1}{1+\eta_{n-1}}\left(\gamma^{-1}H\left(\eta_{n-1}^2\theta-1\right)+i\alpha_*\eta_{n-1}\right). \qquad (3.4)$$

α_* / γ	1	1.5
0.01	0.9574-0.0042i	0.9688-0.0044i
0.05	0.9572-0.0208i	0.9686-0.0219i
0.1	0.9565-0.0417i	0.9678-0.0439i
0.5	0.9345-0.2083i	0.9437-0.2193i

Численные решения уравнения (3.2) при значениях параметров $\theta=2,\ H=0.1,\ \ \gamma=1$ и $\gamma=1.5$ в зависимости от α_*, которое характеризует линейное изменение касательного напряжения от соответствующей составляюшей скорости, приведены в таблице.

Таким образом, наличие на внешней границе слоя условия (1.5) (полупространство с тонким слоем) приводит к незначительному усилению затухания по глубине.

4. Решение краевой задачи с импедансными граничными условиями. Теперь рассмотрим задачу Лява с импедансными граничными условиями (на границе полупространства нормальное и касательное напряжения линейно изменяются с соответствующей составляюшей перемешения, умноженной на частоту) [6-8]. Граничное условие (1.5) заменяется на

$$\sigma_{23}^{1} + \omega Z w_1 = 0 \quad \text{при } y = -h \ . \tag{4.1}$$

Здесь ω – частота ($\omega \in R$), $Z \in R$ ($Z = const$). Условие (4.1) соответствует следующей модели: упругий слой покрыт бесконечно тонкой мембраной, допускающей свободные нормальные перемещения на границе и препятствующей касательным перемещениям. Отметим, что при $Z = 0$ из (4.1) имеем слой со свободной от напряжений границей, а при $Z \mapsto \infty$ – слой с закрепленной границей.

Удовлетворяя решениям (2.1) и (2.8) и граничным условиям (1.6) и (4.1), получим дисперсионное уравнение

$$tg\left(kh\sqrt{\theta\eta^2 - 1}\right) = \frac{\gamma - \dfrac{\omega Z}{\mu_1 k\sqrt{1-\eta^2}}}{\sqrt{\dfrac{\theta\eta^2 - 1}{1-\eta^2}} + \dfrac{\gamma\omega Z}{\mu_1 k\sqrt{\theta\eta^2 - 1}}} \ . \tag{4.2}$$

Из (4.2) при $Z = 0$ получается дисперсионное уравнение задачи Лява [5].

Для полупространства с тонким слоем дисперсионное уравнение запишется в виде

$$\frac{\gamma}{H}\sqrt{1-\eta^2} = \left(\theta\eta^2 - 1\right) + \frac{Zc_t}{\mu_1 H}\eta \ . \tag{4.3}$$

При $Z = 0$ уравнение (4.3) имеет действительное решение $\frac{1}{\theta} < \eta^2 < 1$, удовлетворяющее условию затухания (1.7), если $\theta > 1$. Уравнение (4.3) при $Z \in R$ не имеет действительного решения. Следовательно, для полупространства с тонким слоем с импедансными граничными условиями (4.1) сдвиговые упругие волны не сушествуют.

Заключение. Таким образом, показано, что для полупространства с тонким слоем с импедансными граничными условиями сдвиговые упругие волны не сушествуют, в то время как в рассмотренной структуре (полупространство с тонким слоем), где на внешней границе слоя касательное напряжение линейно изменяется с соответствующей составляюшей скорости, сдвиговые упругие волны сушествуют. На основе исследования упрощенных уравнений проанализирован волновой процесс в рассмотренной структуре.

[1]Институт механики НАН РА
[2]Ереванский государственный университет
e.mail: vas@ysu.am

М. В. Белубекян, С. В. Саркисян

Распространение волн в системе тонкий слой – полупространство со смешанными граничными условиями

Предлагается модель для исследования распространения волн в упругих телах (полупространство с тонким слоем), где на внешней границе слоя касательное напряжение линейно меняется с соответствующей составляюшей скорости.

Մ. Վ. Բելուբեկյան, Ս. Վ. Սարգսյան

Ալիքների տարածումը բարակ շերտ - կիսատարածություն համակարգում խառը եզրային պայմաններով

Առաջարկված է մի մոդել, որի միջոցով կարելի է հետազոտել ալիքների տարածումը առաձգական մարմիններում (բարակ շերտով կիսատարածություն),երբ շերտի արտաքին եզրին շոշափող լարումը փոփոխվում է գծայնորեն՝ արագության բաղադրիչին համապատասխան:

M. V. Belubekyan, S. V. Sarkisyan

Propagation of Waves in a Thin Layer – Half-Space System with Mixed Boundary Conditions

The model is offered for the study of wave propagation in elastic bodies (half-space with a thin layer), where the shear stress on the outer boundary of the layer varies linearly with the corresponding component velocity.

Литература

1. *Kossovich L. Y., Mukhomodyarov R. R., Parfenova Y. A.* – Vestnik of Samara University. Natural Science Series. Mechanics. 2008. № 8/2 (67). P. 78-89 (in Russian).
2. *Meleshko V. V., Bondarenko A. A., Dovgiy S. A. et al.* – Mathematical methods and physico-mechanical fields. 2008. V. 51. № 2. P. 86-104 (in Russian).
3. *Belubekyan M. V.* – Proc. of NAS of Armenia. Mechanics. 2011. V. 64. № 4. P. 3-6 (in Russian).
4. *Belubekyan M. V., Sarkisyan S. V.* – Z Angew Math Mech. 2018. V. 98. P. 1623–1631. https://doi.org/10.1002/zamm.201700157.

5. *Belubekyan V. M., Sarkisyan S. V.* – Reports of NAS RA. 2018. V. 118. № 1. P. 33-38 (in Russian).
6. *Pham Chi Vinh, Trinh Thi Thanh Hue* – Int. J. Eng. Sci. 2014. V. 85. P. 175-185.
7. *Pham Chi Vinh, Nguyen Quynh Xuan* – European Journal of Mechanics-A/Solids. 2017. V. 61. P. 180-185.
8. *Baljeet Singh* – Geosciences Research. 2017. November, V. 2. № 4. https://dx.doi.org/10.22606/gr.2017.24004.
9. *Шутилов В. А.* Основы физики ультразвука: Учеб. пособие. Изд-во Ленингр. ун-та. 1980. 280 с.