ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 119 2019 № 3

МАТЕМАТИКА

УДК 517

Р. В. Даллакян

Аналог одной теоремы Вербицкого для произведений Джрбашяна

(Представлено академиком В. С. Захаряном 17/VI 2019)

Ключевые слова: *оператор интегро-дифференцирования Римана – Лиувилля, произведение Бляшке, произведение Джрбашяна, последовательность* (wN).

Введение. Пусть $\mathbb{D}$ – единичный круг комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $-1<\alpha<+\infty$ и пусть последовательность $\{a_n\}\subset\mathbb{D}, a_n\neq 0, n=1,2,\ldots$, такая, что

$$\sum_n \left(1-|a_n|\right)^{1+\alpha} < +\infty . \tag{1}$$

Произведение М. М. Джрбашяна $B_\alpha\left(z;\{a_n\}\right), z\in\mathbb{D}$, определяется (см. [1], гл. IX) следующим образом:

$$B_\alpha\left(z;\{a_n\}\right)=\prod_n\left(1-\frac{z}{a_n}\right)\exp\left\{-W_\alpha\left(z;a_n\right)\right\},$$

где для $\xi\in\mathbb{D}$

$$W_\alpha(z;\xi)=\int_{|\xi|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}dx-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)}\left\{\xi^{-k}\int_0^{|\xi|}(1-x)^\alpha x^{k-1}dx-\bar{\xi}^k\int_{|\xi|}^{1}(1-x)^\alpha x^{-k-1}dx\right\}z^k .$$

В частном случае $\alpha=0$ эти произведения совпадают с произведением Бляшке (см. [1], с. 625):

$$B\left(z;\{a_n\}\right)\equiv B_0\left(z;\{a_n\}\right)=\prod_n\frac{a_n-z}{1-\bar{a}_n z}\cdot\frac{|a_n|}{a_n}.$$

Оператор интегро-дифференцирования $D^{-\alpha}\left(-1<\alpha<+\infty\right)$ в смысле Римана – Лиувилля с началом в нулевой точке определяется следующим образом:

$$D^{-\alpha}\{\varphi(r)\}=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^r (r-t)^{\alpha-1}\varphi(t)\,dt, & \text{если } 0<\alpha<+\infty,\\ \varphi(r), & \text{если } \alpha=0,\\ \dfrac{d}{dr}D^{-(1+\alpha)}\{\varphi(r)\}, & \text{если } -1<\alpha<0.\end{cases}$$

В [2] доказано утверждение о взаимосвязи между произведениями $B_\alpha\left(-1<\alpha<0\right)$ и B.

Теорема. *Пусть* $-1<\alpha<0$ *и последовательность* $\{a_n\}\subset\mathbb{D}$ *удовлетворяет условию (1). Тогда*

$$B_\alpha\left(z;\{a_n\}\right)=B\left(z;\{a_n\}\right)\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S_\alpha\left(e^{-i\theta}z\right)d\omega(\theta)\right\},\ |z|<1,$$

где
$$S_\alpha(z)=\Gamma(1+\alpha)\left[\frac{2}{(1-z)^{1+\alpha}}-1\right],$$

$\omega(\theta)$ *– невозрастающая функция ограниченной вариации на* $[0;2\pi]$, *имеющая вид*

$$\omega(\theta)=\lim_{n\to\infty}\int_0^\theta D^{-\alpha}\left\{\log\left|\frac{B_\alpha\left(r_ne^{i\theta};\{a_n\}\right)}{B\left(r_ne^{i\theta};\{a_n\}\right)}\right|\right\}d\theta,$$

$$\left(0<r_1<r_2<\ldots<r_n<\ldots,r_n\uparrow 1\right).$$

Как хорошо известно (см. [3], с. 54). для существования радиального предела произведения Бляшке в граничной точке $e^{i\varphi}$ необходимо и достаточно, чтобы в этой точке выполнялось условие Фростмана

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-|a_n|}{\left|e^{i\varphi}-a_n\right|}<+\infty,$$

где $\{a_n\}$ – последовательность нулей этого произведения.

Для произведений $B_\alpha\left(-1<\alpha<0\right)$ доказано (см. [4]), что если в граничной точке $e^{i\varphi}$ имеет место условие типа Фростмана

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-|a_n|}{\left|e^{i\varphi}-a_n\right|}\right)^{1+\alpha}<+\infty,$$

то в этой точке существует конечный и отличный от нуля радиальный предел произведения B_α.

Говорят, что функция $f\in L^p(\partial\mathbb{D})$ входит в класс

$$Lip(\beta;p)\left(0<\beta\le 1,1\le p<+\infty\right),$$

если ее L^p-модуль непрерывности

$$\omega_p(\delta)=\sup_{|\theta|\le\delta}\left\{\int_0^{2\pi}\left|f\left(e^{i(\varphi+\theta)}\right)-f\left(e^{i\varphi}\right)\right|^p d\varphi\right\}^{1/p}$$

удовлетворяет условию $\omega_p(\delta)\le const\delta^\beta$. Согласно теореме Харди – Литтлвуда (см. [5], с. 78) граничные значения функции f из пространства Харди H^p принадлежат классу $Lip(\beta;p)$ тогда и только тогда, когда

$$\left\{\int_0^{2\pi}\left|f'\left(re^{i\varphi}\right)\right|^p d\varphi\right\}^{1/p}\le\frac{const}{(1-r)^{1-\beta}}.$$

Отметим, что при $\frac{1}{p}<\beta<1$ имеем $Lip(\beta;p)\subset C(\partial\mathbb{D})$ (см. [5], с. 91). Скажем, что последовательность $\{a_n\}\subset\mathbb{D}$ удовлетворяет условию Ньюмана (N), если

$$\sup_{n\ge1}\frac{1-|a_{n+1}|}{1-|a_n|}<1,\ \left(|a_n|\uparrow 1\right).$$

Скажем, что последовательность $\{a_n\}\subset\mathbb{D}$ удовлетворяет условию (wN), если состоит из конечного объединения (N)-последовательностей.

И. Э. Вербицким в [6] доказан следующий результат.

Теорема. *Пусть B – произведение Бляшке, $\{a_n\}_{n\ge1}$ – его нули. Следующие утверждения равносильны:*

1. *последовательность $\{a_n\}_{n\ge1}$ удовлетворяет условию (wN)*;
2. $\hat{B}(k)=O\left(\frac{1}{k}\right)$;
3. $\sum_{k=N}^{\infty}\left|\hat{B}(k)\right|^2=O\left(N^{-1}\right)$;
4. $B\in Lip\left(\frac{1}{p};p\right)$ *для некоторого* $p\in(1,\infty)$;
5. *выполняется условие*

$$\int_{\partial\mathbb{D}}\left|B''(r\xi)\right||d\xi|\le C(1-r)^{-1}.$$

Целью настоящей работы является установление аналогичного результата для произведений B_α М. М. Джрбашяна.

Основные результаты. Сначала доказываются следующие утверждения.

Теорема 1. *Граничная функция сходящего произведения* $B_\alpha\ (-1<\alpha\le0)$ *не может принадлежать классу* $Lip(1;1)$.

Теорема 2. *Пусть* $-1<\alpha\le0$, *последовательность* $\{a_n\}\subset\mathbb{D}$ *удовлет-*

воряет условию (1) и $B_\alpha\left(e^{i\varphi};\{a_n\}\right)\in Lip(\beta;p)$, $1<p<+\infty$. *Тогда* $0<\beta\le\frac{1}{p}$.

Далее доказывается аналог упомянутой выше теоремы И. Э. Вербицкого.

Теорема 3. *Пусть* $-1<\alpha\le 0$ *и* $B_\alpha\left(z;\{a_n\}\right)-$ *сходящее произведение Джрбашяна. Тогда следующие условия равносильны:*

1. *последовательность* $\{a_n\}\subset\mathbb{D}$ *удовлетворяет условию* (wN);
2. $\hat{B}_\alpha(k)=O\left(\frac{1}{k}\right)$;
3. $\sum_{k\ge m}\left|\hat{B}_\alpha(k)\right|^2=O\left(\frac{1}{m}\right)$;
4. $B_\alpha\left(e^{i\varphi};\{a_n\}\right)\in Lip\left(\frac{1}{p};p\right)$ *для некоторого* $p\in(1,+\infty)$;
5. $\int_0^{2\pi}\left|B''_\alpha\left(re^{i\varphi}\right)\right|d\varphi\le const(1-r)^{-1}$.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Государственного комитета по науке МОН РА в рамках научного проекта N-18T-1AO19.

Армянский национальный политехнический университет
e.mail: dallakyan57@mail.ru

Р. В. Даллакян

Аналог одной теоремы Вербицкого для произведений Джрбашяна

М. М. Джрбашян, пользуясь оператором интегро-дифференцирования Римана – Лиувилля, обобшил класс мероморфных в единичном круге функций N Неванлинны, введя классы $N_\alpha\left(-1<\alpha<+\infty\right)$. «Роль» произведений Бляшке в этих классах играют произведения B_α Джрбашяна. В статье доказан аналог одной теоремы И. Э. Вербицкого для произведений Джрбашяна $B_\alpha\left(-1<\alpha<0\right)$.

Ռ. Վ. Դալլաքյան

Վերբիցկու մի թեորեմի անալոգը Ջրբաշյանի արտադրյալների համար

Մ. Մ. Ջրբաշյանը, օգտվելով Ռիման-Լիուվիլլի ինտեգրո-դիֆերենցման տեսու-թյունից, ընդհանրացրել է Նևանլիննայի միավոր շրջանում մերոմորֆ N դասերը՝

ներմուծելով $N_\alpha\left(-1<\alpha<+\infty\right)$ դասեր: Այդ դասերում Բլյաշկեի արտադրյալի «դերը» կատարում են B_α Ջրբաշյանի արտադրյալները: Այս աշխատանքում ապացուցված է Ի. Է. Վերբիցկու մի թեորեմի անալոգը Ջրբաշյանի $B_\alpha\left(-1<\alpha<0\right)$ արտադրյալների համար:

R. V. Dallakyan

On a Verbitsky's Type Theorem for M. M. Djrbashyan Products

M. M. Djrbashyan had generalized the Nevanlinna's functional class N, and using Riemann – Lioville integro-differentation operator introduced $N_\alpha\left(-1<\alpha<+\infty\right)$ classes. In these classes Blashke products are substituted by Djrbashyan products. One analog of Werbitsky's theorem for Djrbashyan products $B_\alpha\left(-1<\alpha<0\right)$ is obtained in this paper.

Литература

1. *Джрбашян М. М.* Интегральные произведения и представления функций в комплексной области. М. Наука. 1966. 671 с.
2. *Джрбашян М. М., Захарян В. С.* – Мат. заметки. 1968. Т. 4. Вып. 1. С. 3-10.
3. *Коллингвуд Э., Ловатер А.* – Теория предельных множеств. М. Мир. 1971. 312 с.
4. *Захарян В. С.* – Изв. АН АрмССР. Математика. 1968. Т. 3. № 4-5. С. 287-300.
5. *Duren P. L.* Theory of H^p spaces. N. Y. and London, Ac. Press. 1970. 260 p.
6. *Вербицкий И. Э.* – Зап. научн. семинаров ЛОМИ. 1982. Т. 107. С. 27-35.