

**МЕХАНИКА**

УДК 539.3

**Академик Г. Е. Багдасарян<sup>1,2</sup>, М. А. Микилян<sup>1,2</sup>,  
И. А. Варданян<sup>1,2</sup>, А. В. Пантелеев<sup>3</sup>**

**Влияние сверхзвукового потока на характер амплитудно-  
частотной зависимости нелинейных флаттерных  
колебаний цилиндрической панели**

(Представлено 5/II 2019)

**Ключевые слова:** *цилиндрическая оболочка, сверхзвуковой поток газа, амплитудно-частотная зависимость.*

**Введение.** Имеются многочисленные исследования, посвященные устойчивости пластин и оболочек в сверхзвуковом потоке газа. Сведения об этих исследованиях можно найти в монографиях [1-4] и в обзорных статьях [5, 6]. Исследования проведены как в линейной, так и нелинейной постановке. Решением линейных задач получены наименьшие (критические) значения величины скорости обтекающего потока, при которых рассматриваемая аэроупругая система теряет устойчивость. Линейные задачи были решены как точно, так и приближенно (в основном, используя метод Галеркина). Нелинейные задачи решены приближенными методами, и одним из основных вопросов исследований было изучение зависимости частоты флаттерных колебаний от величины амплитуды возмущений (амплитуды). Исследования в основном посвящены изучению амплитудно-частотной зависимости в случае пластин, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа [7, 8]. В случае отсутствия обтекающего потока характер зависимости амплитуды от частоты нелинейных колебаний пластинки носит жесткий характер [4], т.е. с увеличением амплитуды частота колебаний увеличивается. В работах [7, 8], в частности, установлено, что: а) присутствие обтекающего потока может стать источником как количественного, так и качественного изменения характера указанной монотонно возрастающей зависимости; б) существование незатухающих нелинейных колебаний возможно как в случае докритических, так и посткритических скоростей. Настоящая работа посвящена изучению аналогичных вопросов в случае гибких цилиндрических оболочек, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа. Показано существование определенных областей изменения ве-

личины частоты колебаний, при которых: а) зависимость амплитуда-частота может быть многозначной, б) существует интервал изменения частоты, вне которого невозможно возбудить установившиеся флаттерные колебания (зона молчания), в) показана возможность существования точек бифуркации. Установлено существование различных типов зависимостей амплитуда-скорость, точек бифуркации и областей молчания, причем переход от одной зависимости к другой можно отрегулировать оптимальным выбором параметра частоты колебаний.

**1. Постановка задачи устойчивости.** Рассмотрим тонкую изотропную прямоугольную в плане цилиндрическую панель постоянной толщины  $h$ . Оболочка отнесена к ортогональным криволинейным координатам  $x, y, z$ , где координатные линии  $x$  и  $y$  совпадают с линиями кривизны срединной поверхности. Третья координатная линия  $z$  прямолинейная и представляет собой расстояние по нормали срединной поверхности от точки  $(x, y, 0)$  до точки  $(x, y, z)$  оболочки.

Пусть оболочка обтекается с одной стороны сверхзвуковым потоком газа с постоянной невозмущенной скоростью  $\vec{u} = (U, 0, 0)$ , направленной вдоль оси  $Ox$ . Исследуются вопросы устойчивости рассматриваемой аэроупругой системы. Не вдаваясь в подробности, приведем основные дифференциальные уравнения в частных производных и граничные условия, описывающие колебания и устойчивость рассматриваемой аэроупругой системы. Подробности можно найти в работах [1, 2, 7, 12, 13], на основе которых приведены постановка задачи и метод сведения к задаче устойчивости, описываемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

На основе исследований принимаются следующие предположения:

1) гипотеза Кирхгофа – Лява, согласно которой [9]

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z, t) &= u(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial x}, \\ u_2(x, y, z, t) &= v(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial y}, \\ u_3(x, y, z, t) &= w(x, y, t), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $u_i$  – компоненты перемещения точек оболочки ( $i = 1, 2, 3$ ),  $u, v$  и  $w$  – тангенциальные и нормальные компоненты перемещения точек срединной поверхности оболочки;

2) давление газа учитывается по приближенной формуле «поршневой теории» [10, 11]

$$p = p_\infty \left( 1 + \frac{\alpha - 1}{2} \frac{v_3^2}{a_\infty^2} \right)^{\frac{2\alpha}{\alpha - 1}}, \quad (2)$$

где  $p$  – давление газа на поверхности оболочки,  $p_\infty$  – давление невозмущенного потока газа,  $v_3$  – нормальная составляющая скорости точек поверхности оболочки,  $a_\infty$  – величина скорости звука для невозмущенного газа,  $\alpha$  – показатель политропы;

3) основные положения теории весьма пологих гибких оболочек с большим показателем изменчивости, считая, что прогибы  $w(x, y, t)$  сравнимы с толщиной оболочки [4].

На основе принятых предположений получается следующая нелинейная система дифференциальных уравнений движения оболочки [1]:

$$D\Delta^2 w + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \rho_0 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left( \rho_0 h \varepsilon + \frac{\alpha p_\infty}{a_\infty} \right) \frac{\partial w}{\partial t} + \alpha p_\infty M \frac{\partial w}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{1}{R} - \alpha p_\infty \frac{\alpha + 1}{4} M^2 \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{M}{3} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 \right]$$

$$\frac{1}{Eh} \Delta^2 F = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

где  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ ,  $M = \frac{U}{a_\infty}$ ,  $a_\infty = \frac{\alpha p_\infty}{\rho_\infty}$ ,  $F(x, y, t)$  – функция напряжений ( $T_{11} = \partial^2 F / \partial y^2$ ,  $T_{22} = \partial^2 F / \partial x^2$ ,  $T_{12} = -\partial^2 F / \partial x \partial y$ ),  $T_{ik}$  – внутренние усилия,  $\varepsilon$  – коэффициент линейного затухания,  $M = U / a_\infty$  – число Маха,  $t$  – время,  $R$  – радиус оболочки,  $E$  – модуль упругости,  $\mu$  – коэффициент Пуассона,  $\rho_0$  – плотность материала оболочки.

При исследовании вопросов устойчивости к уравнениям (3)–(4) присоединяются также условия на контуре оболочки. Здесь рассматривается шарнирно опертая по всему контуру ( $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ ) пологая оболочка, края которой свободно смещаются в плане. Тогда, следуя [1], граничные условия принимаются в виде:

при  $x = 0$ ,  $x = a$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

$$\bar{T}_{11} = 0, \quad \bar{T}_{12} = 0,$$

при  $y = 0$ ,  $y = b$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

$$\bar{T}_{22} = 0, \quad \bar{T}_{21} = 0,$$

где  $\bar{T}_{ik}$  – значения осредненных вдоль кромок усилий.

**2. Сведение к задаче устойчивости, описываемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений.** Приближенное решение уравнения (3), удовлетворяющее условиям (5) и (7), будем искать в виде

$$w(x, y, t) = \left( \sum_{k=1}^n f_k(t) \sin \lambda_k x \right) \sin \mu_1 y; \quad \lambda_k = k\pi/a, \quad \mu_n = n\pi/b. \quad (9)$$

Подставив (9) в (4), получим линейное неоднородное дифференциальное уравнение относительно функции  $F$ . Решение указанного уравнения, удовлетворяющего граничным условиям (6) и (8), при  $n=2$  представляется в виде

$$\begin{aligned} F(x, y, t) = Eh \left[ \frac{\lambda_1^2 \sin(\lambda_1 x) \sin(\mu_1 y)}{R\Delta_{11}} f_1(t) + \frac{(\mu_1^4 \cos(\lambda_2 x) + \lambda_1^4 \cos(\mu_2 y))}{2\lambda_4^2 \mu_1^2} f_1^2(t) + \right. \\ \left. + \frac{\lambda_2^2 \sin(\lambda_2 x) \sin(\mu_1 y)}{R\Delta_{21}} f_2(t) + \frac{(\mu_1^4 \cos(\lambda_4 x) + \lambda_2^4 \cos(\mu_2 y))}{2\lambda_4^2 \mu_2^2} f_2^2(t) + \right. \\ \left. + \frac{\mu_1^2}{\lambda_1^2} \left( \cos(\lambda_3 x) - 9 \cos(\lambda_1 x) + \right. \right. \\ \left. \left. + \lambda_3^4 \left( \frac{\cos(\lambda_1 x)}{\Delta_{12}} - \frac{\cos(\lambda_3 x)}{9\Delta_{32}} \right) \cos(\mu_2 y) f_1(t) f_2(t) \right) \right], \quad (10) \end{aligned}$$

где

$$\Delta_{ij} = \frac{1}{Eh} (\lambda_i^2 + \mu_j^2)^2.$$

Для определения  $f_i(t)$  воспользуемся уравнением (3). Подставляя (9) и найденное выражение для  $F$  в (3), применяя метод Бубнова – Галеркина для определения безразмерных неизвестных функций  $x_1 = f_1(t)/h$ ,  $x_2 = f_2(t)/h$ , получим следующую нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений [1, 12]:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + \chi \frac{dx_1}{d\tau} + x_1 - \frac{2}{3} kvx_2 + kv^2 \left[ \alpha_{11} x_1^2 + \alpha_{12} x_2^2 + vx_2 (\beta_{11} x_1^2 + \beta_{12} x_2^2) \right] + \\ + Qx_1 (\gamma_{11} x_1^2 + \gamma_{12} x_2^2) + L (\delta_{11} x_1^2 + \delta_{12} x_2^2) = 0 \quad (13) \\ \frac{d^2 x_2}{d\tau^2} + \chi \frac{dx_2}{d\tau} + \gamma^2 x_2 + \frac{2}{3} kvx_2 + kv^2 \left[ \alpha_{21} x_1 x_2 + vx_1 (\beta_{21} x_1^2 + \beta_{22} x_2^2) \right] + \\ + Qx_2 (\gamma_{21} x_1^2 + \gamma_{22} x_2^2) + L \delta_{21} x_1 x_2 = 0. \end{aligned}$$

Здесь, наряду с безразмерным временем  $\tau = \omega_1 t$ , введены обозначения

$$k = \frac{4\alpha p_\infty}{\rho_0 \omega_1^2 h^2}, \quad Q = \frac{4}{16\rho_0 \omega_1^2}, \quad L = \frac{1}{\rho_0 h \omega_1^2},$$

$$v = M \frac{h}{a}, \quad \gamma = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad \chi = \frac{1}{\omega_1}(\varepsilon + \varepsilon_a),$$
(14)

а также коэффициенты  $\alpha_{ik}$  и  $\beta_{ik}$ , учитывающие аэродинамическую нелинейность:

$$\alpha_{11} = \frac{2}{9}(\alpha + 1), \quad \alpha_{12} = \frac{56}{45}(\alpha + 1), \quad \alpha_{21} = \frac{16}{45}(\alpha + 1),$$

$$\beta_{11} = \beta_{21} = \frac{\pi^2}{40}(\alpha + 1), \quad \beta_{22} = \frac{11\pi^2}{70}(\alpha + 1), \quad \beta_{12} = -\frac{9\pi^2}{70}(\alpha + 1),$$
(15)

и коэффициенты  $\gamma_{ik}$  и  $\delta_{ik}$ , учитывающие геометрическую нелинейность:

$$\gamma_{11} = Eh(\lambda_1^4 + \mu_1^4), \quad \gamma_{12} = \gamma_{21} = 4\gamma_{11} + \frac{81\lambda_1^4\mu_1^4}{\Delta_{12}} + \frac{\lambda_1^4\mu_1^4}{\Delta_{22}}, \quad \gamma_{22} = Eh(\lambda_2^4 + \mu_1^4),$$

$$\delta_{11} = -\frac{8\lambda_1^2\mu_1^4}{3\pi^2} \frac{h}{R} \left( \frac{Eh}{\lambda_2^2} + \frac{4\lambda_1^2}{\Delta_{11}} \right), \quad \delta_{12} = -\frac{32\lambda_1^2\mu_1^4}{15\pi^2} \frac{h}{R} \left( \frac{Eh}{\lambda_4^2} + \frac{12\lambda_1^2}{\Delta_{21}} \right),$$

$$\delta_{21} = -\frac{8\lambda_1^2\mu_1^4}{3\pi^2} \frac{h}{R} \left( \frac{8Eh}{15\lambda_2^2} + \frac{16\lambda_1^2}{5\Delta_{11}} + \frac{\lambda_1^2}{\Delta_{12}} + \frac{16\lambda_2^2}{5\Delta_{21}} + \frac{\lambda_3^2}{15\Delta_{32}} \right).$$
(16)

В (13)  $v$  – приведенный параметр скорости,  $\chi$  – приведенный параметр демпфирования,  $\omega_i$  – частоты малых собственных колебаний оболочки, определяемые формулой

$$\omega_i^2 = \frac{1}{\rho h} \left[ D(\lambda_i^2 + \mu_1^2)^2 + \frac{\lambda_i^4}{R^2 \Delta_{i1}} \right] \quad (i=1,2). \quad (17)$$

Таким образом, задача устойчивости рассматриваемой гидроупругой системы в первом приближении сведена к исследованию поведения решений системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (13) в зависимости от величины скорости обтекающего потока газа (от величины параметра  $v$ ).

Аналогичным образом получается система уравнений в случаях  $n > 2$ . Они довольно громоздки и здесь не приводятся.

**3. Определение критической скорости флаттера и амплитуды флаттерных колебаний. 3.1. Определение критической скорости.** Решению нелинейной задачи, как правило, будет предшествовать анализ соответствующей линейной задачи. Это объясняется тем, что: а) на основе линейной задачи можно найти критическое значение параметра  $v = v_{cr}$ , при котором невозмущенное состояние оболочки становится неустойчивым относительно малых возмущений, и б) указанное критическое значение  $v_{cr}$  будет необходимым и при исследовании задачи устойчивости в нелинейной постановке.

Итак, соответствующая (13) линейная система имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + \chi \frac{dx_1}{d\tau} + x_1 - \frac{2}{3} k v x_2 &= 0, \\ \frac{d^2 x_2}{d\tau^2} + \chi \frac{dx_2}{d\tau} + \gamma^2 x_2 + \frac{2}{3} k v x_1 &= 0.\end{aligned}\tag{18}$$

Представляя решение системы (18) в виде

$$x_1 = y_1 e^{\lambda \tau}, \quad x_2 = y_2 e^{\lambda \tau},$$

получаем следующее характеристическое уравнение относительно  $\lambda$ :

$$\lambda^4 + 2\chi\lambda^3 + (\gamma^2 + 1 + \chi^2)\lambda^2 + \chi(\gamma^2 + 1)\lambda + \gamma^2 + \frac{4}{9}k^2v^2 = 0.$$

Невозмущенная форма оболочки будет устойчива, если действительные части корней характеристического уравнения будут отрицательными. Следовательно, условия устойчивости согласно теореме Гурвица записываются в виде:

$$\begin{aligned}\chi > 0, \quad \chi(1 + \gamma^2) > 0, \\ (\gamma^2 - 1)^2 + 2\chi^2(1 + \gamma^2) - \frac{16}{9}k^2v^2 > 0.\end{aligned}$$

Первые два неравенства, которые требуют, чтобы затухание (внутреннее и аэродинамическое) было положительным, выполняются во всех случаях. Из третьего неравенства следует, что в случае малых значений  $v$  все корни  $\lambda$  характеристического уравнения лежат в левой полуплоскости, и тривиальное решение  $w \equiv 0$  асимптотически устойчиво по отношению к малым возмущениям. Значение параметра  $v = v_{cr}$ , при котором два корня характеристического уравнения становятся чисто мнимыми, а остальные по-прежнему лежат в левой полуплоскости, является критическим, соответствует критической скорости панельного флаттера в линейной постановке этой задачи. Согласно этому из третьего неравенства получается формула определения критической скорости флаттера в случае выбранной формы потери устойчивости оболочки [1, 13]:

$$v_{cr} = \frac{3}{4} \frac{\gamma^2 - 1}{k} \sqrt{1 + \frac{2\chi^2(\gamma^2 + 1)}{(\gamma^2 - 1)^2}}.\tag{19}$$

Принимая  $v = v_{cr}$  из характеристического уравнения, найдем следующее значение  $\theta_{cr}$  частоты колебания оболочки при линейном флаттере ( $\lambda_{cr} = \pm i\theta_{cr}$ )

$$\theta_{cr}^2 = \frac{1}{2}(\gamma^2 + 1).\tag{20}$$

Формулы, аналогичные (19) и (20), получены многими авторами (см. списки литературы, приведенные в [1, 13]) и являются первыми приближениями для  $v_{cr}$  и  $\theta_{cr}$ .

**3.2. Исследование характера амплитудно-частотной зависимости.** Переходим к исследованию нелинейной задачи, описываемой нелинейной системой (13). Эта система отличается от аналогичных систем устойчивости тонких пластин наличием членов с квадратичными нелинейностями, имеющими как аэродинамическое, так и геометрическое происхождение. Указанные члены характеризуют несимметричность нелинейности, и поэтому, приближенное периодическое решение системы (13), следуя работам [12, 14], будем искать в виде

$$\begin{aligned}x_1 &= A_1 \cos \theta\tau + B_1 \sin \theta\tau + C_1 + \dots, \\x_2 &= A_2 \cos \theta\tau + B_2 \sin \theta\tau + C_2 + \dots\end{aligned}\quad (21)$$

Здесь  $A_i, B_i, C_i$  и  $\theta = \omega\omega_1^{-1}$  ( $i=1,2$ ) – неизвестные постоянные;  $\omega$  – неизвестная частота нелинейных колебаний; точками обозначены члены, содержащие высшие гармоники. Структура решения (21) отличается от существующих [1] наличием свободных членов  $C_i \neq 0$ , присутствие которых дает возможность учитывать влияния квадратичной нелинейности.

Подставим решение (21) в систему (13) и приравняем к нулю коэффициенты при свободном члене,  $\cos \theta\tau$  и  $\sin \theta\tau$  (члены, содержащие высшие гармоники, считаются пренебрежимо малыми). Получающаяся при этом система нелинейных алгебраических уравнений довольно громоздка для исследования и здесь не приводится. Для получения приближенного решения этой системы предполагается, что [12]: а) затухание системы достаточно мало ( $\chi|B_i| \ll |A_i|, |B_i| \ll |A_i|; (i=1,2)$ ), б) рассматриваемая аэроупругая система совершает установившиеся колебание с конечной амплитудой вокруг состояния, бесконечно мало отличающегося от невозмущенного ( $|A_j| \gg |C_j|; j=1,2$ ). Тогда, пренебрегая степенями выше первой и произведением величин  $B_1, B_2, C_1$  и  $C_2$ , указанная нелинейная система представится подсистемами, полученными приравнением к нулю свободных членов, коэффициентов при  $\cos \theta\tau$  и  $\sin \theta\tau$ .

Третья подсистема, полученная приравнением к нулю коэффициентов при  $\sin \theta\tau$ , учитывает эффект демпфирования. Согласно принятому предположению о малости затухания указанная подсистема имеет следующее приближенное решение:

$$B_1 \approx 0, \quad B_2 \approx 0 \quad \text{при } \chi \approx 0.$$

Из остальных подсистем, исключая  $C_1$  и  $C_2$ , получается нелинейная система алгебраических уравнений, определяющая характеристики  $A_1$  и  $A_2$  амплитуды колебаний рассматриваемой аэроупругой системы в зависимости от параметров  $\theta$  и  $\nu$ :

$$\begin{aligned}
& A_1(1-\theta^2) - \frac{2}{3}kvA_2 + 2kv^2\alpha_{11}A_1C_1 + 2kv^2\alpha_{12}A_2C_2 + \\
& + \frac{3}{4}kv^3A_2(\beta_{11}A_1^2 + \beta_{12}A_2^2) + \frac{3}{4}QA_1(\gamma_{11}A_1^2 + \gamma_{12}A_2^2) = 0, \\
& A_2(\gamma^2 - \theta^2) + \frac{2}{3}kvA_1 + kv^2\alpha_{21}(A_1C_2 + A_2C_1) + \\
& + \frac{3}{4}kv^3A_1(\beta_{21}A_1^2 + \beta_{22}A_2^2) + \frac{3}{4}QA_2(\gamma_{21}A_1^2 + \gamma_{22}A_2^2) = 0.
\end{aligned} \tag{22}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
C_1 &= -Kv^2 \frac{(L(\delta_{11}A_1^2 + \delta_{12}A_2^2) + \alpha_{11}A_1^2 + \alpha_{12}A_2^2)\Delta_2 - (L\delta_{21} + \alpha_{21})A_1A_2\Delta_4}{2\Delta} \\
C_2 &= -Kv^2 \frac{(L\delta_{21} + \alpha_{21})A_1A_2\Delta_1 - L(\delta_{11}A_1^2 + \delta_{12}A_2^2) + (\alpha_{11}A_1^2 + \alpha_{12}A_2^2)\Delta_3}{2\Delta}
\end{aligned} \tag{23}$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= 1 + \frac{3}{2}Q\gamma_{11}A_1^2 + \frac{1}{2}Q\gamma_{12}A_2^2 + Kv^3\beta_{11}A_1A_2, \\
\Delta_2 &= \gamma^2 + Kv^3\beta_{22}A_1A_2 + \frac{3}{2}Q\gamma_{22}A_2^2 + \frac{1}{2}Q\gamma_{21}A_1^2, \\
\Delta_3 &= \frac{2}{3}Kv + \frac{3}{2}Kv^3\beta_{21}A_1^2 + \frac{1}{2}Kv^3\beta_{22}A_2^2 + Q\gamma_{21}A_1A_2, \\
\Delta_4 &= -\frac{2}{3}Kv + \frac{3}{2}Kv^3\beta_{12}A_2^2 + \frac{1}{2}Kv^3\beta_{11}A_1^2 + Q\gamma_{12}A_1A_2, \\
\Delta &= \Delta_1\Delta_2 - \Delta_3\Delta_4.
\end{aligned}$$

Имея в виду, что задача многофункциональная, исследование приводится поэтапно: при  $v = v_{cr}$ ,  $v < v_{cr}$  и  $v > v_{cr}$ . Настоящая работа посвящена первому этапу ( $v = v_{cr}$ ). Остальные этапы будут рассмотрены в дальнейших наших исследованиях. В этом случае нелинейные колебания рассматриваемой аэроупругой системы описываются системой (22), заменяя в ней  $v$  на  $v_{cr}$ . Эта система решена численно при следующих исходных данных:  $E = 7.3 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ ;  $\mu = 0.34$ ;  $\rho_0 = 2.79 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$  (дюралюминий),  $\alpha = 1.4$ ;  $\rho_\infty = 1.29 \text{ кг/м}^3$ ;  $a_\infty = 340.29 \text{ м/с}$  (воздух). Исследован характер зависимости амплитуды установившихся флаттерных колебаний  $A$  в точке  $(a/2, b/2, 0)$  оболочки (в рассматриваемом случае  $A = A_1$ ) от частоты  $\theta$ . Результаты численных расчетов, представляющие графики функции  $A(\theta)$ , при  $a = 100h$  и различных значениях геометрических параметров  $R/a$  и  $b/a$  приведены на рис. 1-3, которые показывают:



- если значение  $R/a$  достаточно велико и  $b/a < 1$ , то наблюдается следующий характер зависимости  $A(\theta)$ : невозмущенное состояние оболочки устойчиво при  $\theta < \theta_{cr}$ , а при  $\theta = \theta_{cr}$  амплитуда колебаний скачком возрастает до определенного конечного значения. С дальнейшим увеличением  $\theta$  амплитуда возрастает. При уменьшении частоты  $\theta$  режим колебаний сохраняется вплоть до  $\theta = \theta_* < \theta_{cr}$  (точка  $\beta_*$  на рис. 1), где колебания “сорвутся” и восстановится невозмущенное состояние оболочки. Точка  $\theta = \theta_{cr}$  является точкой бифуркации (рис.1);

$$\frac{h}{a} = \frac{1}{100}, \quad \frac{b}{a} = 0.5, \quad \frac{R}{a} = 20, \quad v = v_{cr}$$

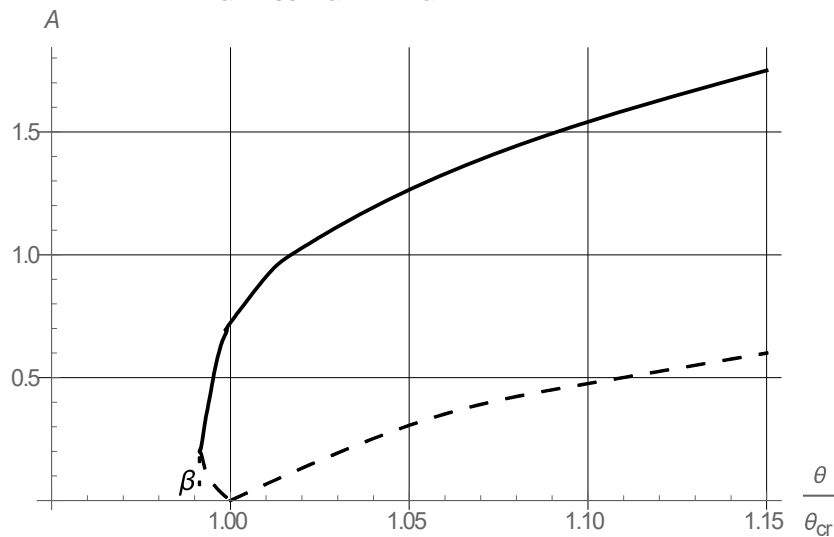


Рис. 1. График функции  $A(\theta)$  при больших значениях  $R/a$ .

- при умеренных значениях параметра  $R/a > 1$  зависимость частоты  $\theta$  нелинейных колебаний цилиндрической оболочки от амплитуды  $A$  идентична характеру указанной зависимости в случае собственных нелинейных колебаний гибких пластин в отсутствие обтекающего потока (рис. 2);

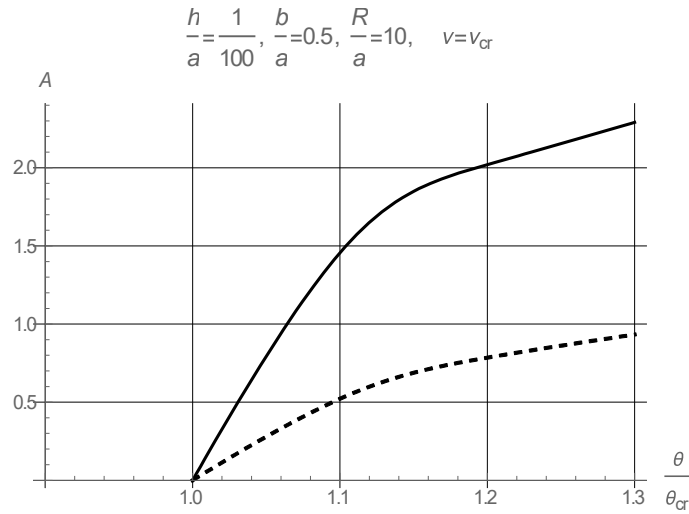


Рис. 2. График функции  $A(\theta)$  при умеренных значениях  $R/a$ .

- дальнейшее уменьшение параметра кривизны  $R/a > 1$  приводит к зависимости  $A(\theta)$ , показанной на рис. 3. Из этого рисунка видно, что существует интервал  $[\theta_*, \theta^*]$  изменения частоты  $\theta$  (точки  $\beta_*$  и  $\beta^*$  на рисунке), вне которого невозможно возбудить установившиеся флаттерные колебания, т.е. области  $[0, \theta_*]$  и  $[\theta^*, \infty)$  являются зонами молчания. При этом: а) с увеличением  $\theta$  состояние оболочки устойчивое, пока  $\theta < \theta_{cr}$ . При  $\theta = \theta_{cr}$  амплитуда колебаний скачком возрастает до определенного конечного значения, после чего в интервале  $[\theta_{cr}, \theta^*]$  графиком амплитуды является кривая  $(L_1, L_2)$  на рисунке. В точке  $L_2$  колебания «сорвутся» и восстанавливается невозмущенное состояние оболочки. С уменьшением частоты при  $\theta = \theta^*$  амплитуда скачком возрастает и в интервале  $[\theta_*, \theta^*]$  графиком амплитуды является кривая  $(L_2, L_3)$  на рисунке. При  $\theta = \theta_*$  колебания «сорвутся» и восстанавливается невозмущенное состояние оболочки.

Отметим, что численные вычисления показывают, что зависимость, приведенная на рис. 1, имеет место также при  $b/a > 1$ .

Таким образом, как существование различных типов зависимостей  $A(\theta)$ , точек бифуркации и областей молчания, так и переход от одной

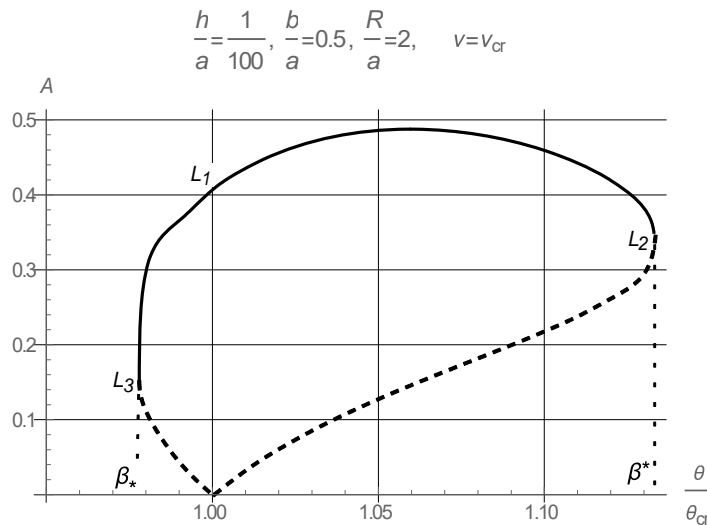


Рис. 3. График функции  $A(\theta)$  при сравнительно малых значениях  $R/a$ .

зависимости  $A(\theta)$  к другой можно урегулировать оптимальным выбором геометрических параметров задачи.

<sup>1</sup>Российско-Армянский университет

<sup>2</sup> Институт механики НАН РА

<sup>3</sup>Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

baghdasaryan@rau.am, marine.mikilyan@rau.am, irena\_123@bk.ru, avpanteleev@inbox.ru

**Академик Г. Е. Багдасарян, М. А. Микилян, И. А. Варданян,  
А. В. Пантелеев**

### **Влияние сверхзвукового потока на характер амплитудно-частотной зависимости нелинейных флаттерных колебаний цилиндрической панели**

Рассматривается задача о нелинейных колебаниях изотропной пологой цилиндрической оболочки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа. Основным предметом исследования является изучение влияния обтекающей оболочку сверхзвукового потока на амплитудно-частотную зависимость установившихся флаттерных колебаний. Исследование проведено с учетом обоих типов нелинейности: аэродинамической и геометрической (как квадратичной, так и кубической). Благодаря учету аэродинамической нелинейности (особенно её несимметричной квадратичной части) установлено, что зависимость амплитуда-частота в определенных интервалах изменения параметра частоты является многозначной. Этот факт проиллюстрирован на приведенных в тексте рисунках в основном в виде

двух ветвей, нижние из которых, по всей вероятности, являются неустойчивыми. Неустойчивые ветви отделяют области тяготения двух соседних устойчивых решений. Отсюда легко находится величина возмущения, необходимого для того, чтобы перебросить систему с одной устойчивой ветви на другую. Показано существование определенных областей изменения частоты колебаний, при которых невозможно возбудить незатухающие флаттерные колебания (зоны молчания). Установлено существование различных типов зависимостей амплитуда-скорость, точек бифуркации и областей молчания, причем переход от одной зависимости к другой можно отрегулировать оптимальным выбором параметра частоты колебаний.

**Ակադեմիկոս Գ. Ե. Բաղդասարյան, Մ. Ա. Միկիլյան,  
Ի. Ա. Վարդանյան, Ա. Վ. Պանտելեն**

**Գերձայնային հոսանքի ազդեցությունը գլանային պանելի ոչ գծային  
ֆլատերային տատանումների «ամպլիտուդա-հաճախություն» կապի վրա**

Դիտարկված է գազի գերձայնային հոսանքով շրջհոսվող իզոտրոպ գլանային թաղանթի ոչ գծային տատանումների խնդիրը: Հետազոտության հիմնական առարկան հաստատված ֆլատերային տատանումների «ամպլիտուդա-հաճախություն» կախվածության վրա գերձայնային հոսանքի ազդեցության ուսումնասիրությունն է: Հետազոտությունը կատարված է աերոառձգական և երկրաչափական (քառակուսային և խորանարդային) ոչ գծայնությունների հաշվառմամբ: Աերոդինամիկական ոչ գծայնության (հատկապես նրա ոչ գծային քառակուսային մասի) հաշվառման շնորհիվ ցույց է տրված, որ հաճախության պարամետրի փոփոխման որոշակի միջակայքերում «ամպլիտուդա-հաճախություն» կախվածությունը բազմարժեք է: Այդ փաստը ցուցադրված է տեքստում բերված գծագրերի միջոցով, որոնք պատկերված են երկու ճյուղերի տեսքով, որոնցից ստորինները, ամենայն հավանականությամբ, անկայուն են: Անկայուն ճյուղերը բաժանում են երկու հարևան կայուն լուծումների ձգողականության տիրույթները: Այստեղից հեշտությամբ որոշվում է գրգռման մեծությունը, որն անհրաժեշտ է համակարգը մի կայուն վիճակից մյուսին փոխանցելու համար: Ցույց է տրված տատանումների հաճախության փոփոխության որոշակի տիրույթների գոյությունը, որտեղ հնարավոր չէ գրգռել չմարող ֆլատերային տատանումներ (լուծության տիրույթներ): Ցույց է տրված, որ ինչպես տարբեր տիպի «ամպլիտուդա-հաճախություն» կախվածությունների, բիֆուրկացիայի կետերի և լուծության տիրույթների գոյությունը, այնպես էլ մի կախվածությունից մյուսին անցումը կարելի է ղեկավարել տատանումների հաճախականության պարամետրի օպտիմալ ղեկավարման միջոցով:

**Academician G. Y. Baghdasaryan, M. A. Mikilyan, I. A. Vardanyan,  
A. V. Panteleev**

**Influence of Supersonic Flow on the Character of Dependence «Amplitude-Frequency» of Nonlinear Flutter Oscillations of Cylindrical Panel**

The problem of nonlinear oscillations of isotropic shallow cylindrical shell in a supersonic gas flow is considered. The main subject of research is the study of influence of supersonic flow on the dependence «amplitude-frequency» of steady-state flutter oscillations. The study was conducted taking into account both types of nonlinearity:

aerodynamic and geometric (both quadratic and cubic). Taking into account the aerodynamic nonlinearity (especially its asymmetric quadratic part), it was found that the dependence “amplitude – frequency” in certain intervals of the frequency parameter is a multi-valued one. This fact is illustrated in the figures brought in the text, mainly in the form of two branches, the lowers of which, probably, are unstable. Unstable branches separate the areas of two neighboring stable solutions. From here it is easy to find the value of perturbation necessary to transfer the system from one stable branch to another. It is shown the existence of certain areas of change of frequency of oscillations, at which it is impossible to generate undamped flutter oscillations (zones of silence). It has been established that both existence of various types of dependencies “amplitude-frequency”, bifurcation points and areas of silence, and the transition from one dependency to another can be managed by the optimal choice of oscillation frequency parameter.

### Литература

1. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М. Физматгиз. 1961. 339 с.
2. *Dowell E.H.* Aeroelasticity of Plates and Shells. Leyden. Noordhoff International Publishing. 1975.
3. *Olson M.D.* Supersonic Flutter of Circular Cylindrical Shells. Dissertation (Ph.D.). California Institute of Technology. 1966.
4. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М. Наука. 1972. 432 с.
5. *Dowell E.H.* – AIAA Journal. 1970. V. 8. № 3. P. 385-399.
6. *Новичков Ю.Н.* – Итоги науки и технологии. Механика деформируемых твердых тел, М. Наука. 1978. Т. 11. С. 67-122.
7. *Baghdasaryan G., Mikilyan M., Saghoyan R., Cestino E., Frulla G., Marzocca P.* – International Journal of Non-Linear Mechanics. 2015. V. 77. P. 51-60.
8. *Baghdasaryan G.Y., Mikilyan M.A., Saghoyan R.O.* – Journal of Aerospace Engineering, 2017 V. 30. N 5.
9. *Власов В.З.* Общая теория оболочек и ее приложения в технике. М. Гос-техтеориздат. 1949.
10. *Ashley H., Zartarian C.* – Journ. Aeronaut. Sci. 1956. V. 23. № 6.
11. *Илюшин А.А.* – ПММ. 1956. Т. 20. Вып.6.
12. *Багдасарян Г.Е.* – Изв. АН СССР. ОТН, Механика и машиностроение. 1961. № 1. С. 92-98.
13. *Швейко Ю.Ю.* – Изв. АН СССР. ОТН, Механика и машиностроение. 1960. № 6.
14. *Гнути В.Ц.* – Изв. АН АрмССР. Механика. 1960. Т. 13. № 1.