ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 118 2018 № 3

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

А. А. Мамиконян

Аттрактор полугруппы, порожденной одним псевдопараболическим уравнением

(Представлено академиком В. С. Захаряном 25/V 2018)

Ключевые слова: *псевдопараболическое уравнение, краевая задача, дифференциальный оператор, аттрактор, полугруппа.*

Пусть $\Omega \in R^n$ ограниченная область с достаточно гладкой границей Γ. Обозначим $\Sigma = [0,T] \times \Gamma$, $T > 0$. В данной работе изучается поведение траекторий решений следующей начально-краевой задачи:

$$\begin{cases} Au' + Bu = 0, \\ u(0,x) = u_0(x), \\ D^{\gamma} u \big|_{\Sigma} = 0, |\gamma| < m, \end{cases} \tag{1}$$

где дифференциальные операторы A и B имеют представления

$$Au = (-1)^m \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_i^{2m}}, \quad Bu = (-1)^m \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^m u}{\partial x_i^m} \left(b_i \left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m} \right) \right).$$

В случае, когда операторы A и B линейны, задача (1) рассматривалась во многих работах С. Л. Соболева, Р. С. Александряна (см. например [1, 2]). В работе [3] изучены аттракторы эволюционных уравнений вида $\partial_t u = Au$. Доказано существование аттракторов, порожденных этими уравнениями, а также исследованы их свойства. В [4] изучены аттракторы уравнений того же типа с дифференциальным оператором A общего вида, в [5] – пример уравнения порядка $2m$, часто встречающийся в приложениях. В работе [6] рассматриваются аттракторы задачи (1) в случае, когда A и B нелинейные дифференциальные операторы второго порядка.

Введем понятие обобщенного решения задачи (1).

Определение 1. Функцию $u(t,x) \in L_2\left((0,T), W_2^m(\Omega)\right)$ назовем обобщенным решением задачи (1), если для любой функции $v(t,x) \in L_2\left((0,T), W_2^m(\Omega)\right)$ имеет место интегральное равенство

$$\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_\Omega \frac{\partial^m u' \partial^m v}{\partial x_i^m \partial x_i^m}dxdt+\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_\Omega b_i\left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m}\right)\frac{\partial^m v}{\partial x_i^m}dxdt=0 .$$

Это определение позволяет свести задачу (1) к следующей задаче:

$$\begin{cases} Lu'+Mu=0 \\ u(0)=u_0, \end{cases} \tag{2}$$

где операторы $L,M:L_2\left(\left(0,T\right),W_2^m\left(\Omega\right)\right)\to L_2\left(\left(0,T\right),W_2^{-m}\left(\Omega\right)\right)$ определены соответственно следующим образом:

$$\left\langle Lu,v\right\rangle=\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_\Omega \frac{\partial^m u}{\partial x_i^m}\frac{\partial^m v}{\partial x_i^m}dxdt,$$

$$\left\langle Mu,v\right\rangle=\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_\Omega b_i\left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m}\right)\frac{\partial^m v}{\partial x_i^m}dxdt,$$

Предположим, что функции $b_i\left(\xi\right)=b_i\left(\xi_i\right)$ определены и непрерывны, а также существуют постоянные c_1 и c_2 такие, что функции $b_i\left(\xi_i\right)$ удовлетворяют условиям:

$$\left|b_i\left(\xi\right)\right|\le c_1\cdot\sum_{i=1}^{n}\left|\xi_i\right|, \tag{3}$$

$$\left|b_i\left(\xi\right)-b_i\left(\eta\right)\right|\le c_2\left|\xi_i-\eta_i\right|. \tag{4}$$

Существование и единственность решения задачи установим, используя результаты работы [7]. Так как в нашем случае оператор L линейный, то для доказательства достаточно проверить липшиц-непрерывность оператора M . Оценим норму:

$$\left\|Mu-Mv\right\|=\sup_{\|W\|=1}\left\langle Mu-Mv,w\right\rangle=\sup_{\|W\|=1}\left|\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_\Omega\left(b_i\left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m}\right)-b_i\left(\frac{\partial^m v}{\partial x_i^m}\right)\right)\frac{\partial^m w}{\partial x_i^m}dxdt\right|=$$

$$=\sup_{\|W\|=1}\left|\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_\Omega\frac{\partial b_i}{\partial\xi_i}\frac{\partial^m\left(u-v\right)}{\partial x_i^m}\frac{\partial^m w}{\partial x_i^m}dxdt\right|\le$$

$$\le\sup_{\|W\|=1}c_2\left(\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_\Omega\left(\frac{\partial^m\left(u-v\right)}{\partial x_i^m}\right)^2dxdt\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_\Omega\left(\frac{\partial^m w}{\partial x_i^m}\right)^2dxdt\right)^{1/2}=$$

$$=\sup_{\|W\|=1}c_2\cdot\left\|u-v\right\|\cdot\left\|w\right\|=c_2\cdot\left\|u-v\right\|,$$

т.е. M является липшиц-непрерывным оператором. Тем самым доказана однозначная разрешимость задачи (1) в $L_2\left(\left(0,T\right),W_2^m\left(\Omega\right)\right)$.

Дадим некоторые необходимые определения.

Определение 2. Полугруппой операторов $\left\{S_t,t\ge0\right\}$, действующих на множестве E, назовем семейство отображений $S_t:E\to E$, зависящих от параметра $t\ge0$, удовлетворяющих полугрупповому тождеству

$$S_tS_\tau=S_{t+\tau},\ \forall t\ge0$$

и условию $S_t=I$ при $t=0$, где I – тождественный оператор.

Приведем схему, по которой операторному уравнению вида $Lu' + Mu = 0$ сопоставляется полугруппа операторов. Предполагаем, что для произвольного $u_0 \in W_2^m(\Omega)$ доказаны существование и единственность решения задачи Коши для этого уравнения. Из единственности следует, что решения задачи в $L_2\left((0,T_1), W_2^m(\Omega)\right)$ и в $L_2\left((0,T_2), W_2^m(\Omega)\right)$ при $T_2 > T_1$ совпадают на $[0,T_1]$. Так как T произвольно, получаем единственное решение при любом $t \in [0,+\infty)$. Каждому элементу $u_0 \in W_2^m(\Omega)$ сопоставляется единственное решение задачи (2). Далее, для каждого $\tau \in [0,+\infty)$ однозначно определяется элемент $u(t,x) \in W_2^m(\Omega)$. Итак, можно написать следующую формулу для определения операторов: $S_\tau : u(0,x) \to u(\tau,x)$, где u – решение задачи (2).

Определение 3. Максимальным аттрактором полугруппы операторов $\{S_t\}$ называется такое замкнутое ограниченное множество $U \subset W_2^m(\Omega)$, которое обладает следующими свойствами:

1) инвариантность, т. е. $S_t U = U, \forall t \geq 0$,
2) притяжение, т.е. для каждого ограниченного множества B из $W_2^m(\Omega)$ расстояние $dist(S_t B, U) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Перейдем к изучению полугруппы, порожденной задачей (2). Для этого кроме условий (3) и (4) от функций $b_i(\xi_i)$ потребуем выполнения неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega b_i(\xi_i) \frac{\partial^m u}{\partial x_i^m} dx \geq c_3 \|u(t)\|^2 - k(t), \tag{5}$$

где $k(t)$ – непрерывная и неотрицательная на $[0,+\infty)$ функция, для которой

$$\int_0^{+\infty} e^{2c_3 t} k(t)\, dt = R_0 < +\infty. \tag{6}$$

Воспользуемся известной теоремой о существовании максимального аттрактора (см. [3]).

Теорема А. *Пусть полугруппа $\{S_t\}$ удовлетворяет следующим условиям.*

1) *полугруппа $\{S_t\}$ равномерно по t ограничена;*
2) *существует ограниченное (компактное) в $W_2^m(\Omega)$ поглощающее множество B_0, т.е. для любого ограниченного множества $B \subset W_2^m(\Omega)$ существует число $T > 0$ такое, что для произвольного $t > T$ имеет место включение $S_t B \subset B_0$;*
3) *операторы $S_t : W_2^m(\Omega) \to W_2^m(\Omega)$ непрерывны при $t \geq 0$.*

Тогда у полугруппы $\{S_t\}$ имеется ограниченный (компактный) в $W_2^m(\Omega)$ максимальный аттрактор.

Приведем одно дифференциальное неравенство, которое также понадобится далее. Пусть для неотрицательной и непрерывно дифференцируемой на $[t_0,t_1]$ функции $y(t)$ выполнено неравенство $y'(t)+\gamma y(t)\le h(t)$, где $h(t)$ является неотрицательной и непрерывной функцией на отрезке $[t_0,t_1]$, а $\gamma\ge 0$. Тогда имеет место оценка

$$y(t)\le\int_{t_0}^{t}e^{-\gamma(t-\tau)}h(\tau)\,d\tau+y(t_0)\,e^{-\gamma t}.$$

Лемма 1. *Пусть функции $b_i(\xi_i)$ удовлетворяют условиям (3)-(5). Тогда решение задачи (2) удовлетворяет неравенству*

$$\left\|u(t)\right\|^2\le e^{-2c_3t}\left\|u(t)\right\|^2+\gamma_2\int_0^t e^{2c_3t}k(\tau)\,d\tau.$$

Доказательство. Предположим u – решение задачи с начальным значением u_0, т.е. для u имеет место операторное уравнение $Lu'+Mu=0$ в пространстве $L_2\left((0,T),W_2^{-m}(\Omega)\right)$. В частности имеет место $\langle Lu',u\rangle+$ $+\langle Mu,u\rangle=0$. В раскрытом виде это соотношение имеет следующий вид:

$$\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_\Omega\frac{\partial^m u'}{\partial x_i^m}\frac{\partial^m v}{\partial x_i^m}dxdt+\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_\Omega b_i\left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m}\right)\frac{\partial^m v}{\partial x_i^m}dxdt=0.$$

Далее преобразовав первое слагаемое, а для второго используя неравенство (5), получим

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}\left\|u(t)\right\|^2+c_3\cdot\left\|u(t)\right\|^2\le k(t).$$

К последнему неравенству применим лемму, приведенную выше. В нашем случае

$$y(t)=\left\|u(t)\right\|^2,\ y(0)=\left\|u_0\right\|^2,\ \gamma=2c_3,\ h(t)=2k(t).$$

Получим

$$\left\|u(t)\right\|^2\le\left(\int_0^t e^{2c_3(t-\tau)}\cdot 2k(\tau)\,d\tau+\left\|u(t)\right\|^2\right)e^{-2c_3t}$$

или

$$\left\|u(t)\right\|^2\le\left(\int_0^t e^{2c_3t}\cdot 2k(\tau)\,d\tau+\left\|u(t)\right\|^2\right)e^{-2c_3t},$$

т.е. получили требуемое неравенство.

Итак, по определению полугруппой, порожденной задачей (2), называется семейство операторов $\{S_t\}$, которые определяются следующим образом: $S_t:W_2^m(\Omega)\to W_2^m(\Omega),\forall u_0\in W_2^m(\Omega)$, причем значение $u(t)=S_tu_0$ есть решение задачи (2) с начальным условием u_0 в точке t.

Лемма 2. *Полугруппа, определенная выше, равномерно ограничена.*

Доказательство. Нужно доказать, что для любого $R>0$ существует постоянная C, зависящая только от числа R, такая, что $\left\|S_tu\right\|\le C$,

$\forall t \in [0,+\infty)$, как только $\|u\| \le R$. Итак, пусть $\|u\|_0 \le R$, оценим $\|S_t u_0\|^2$, используя предыдущую лемму и неравенство (6):

$$\|S_t u_0\|^2 = \|u(t)\|^2 \le \left(\int_0^t e^{2c_3 t} \cdot 2k(\tau) + \|u_0\|^2\right) e^{2c_3 t} \le R^2 + 2R_0 = C.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Полугруппа* $\{S_t\}$ *обладает поглощающим множеством.*

Доказательство. Нужно доказать, что существует такое множество $B_0 \subset W_2^m(\Omega)$, что для любого ограниченного множества $B \subset W_2^m(\Omega)$ существует число $T > 0$ такое, чтобы имело место включение $S_t B \subset B_0$ для $\forall t \ge T$.

Обозначим через B_0 следующее множество: $B_0 = \{u \in W_2^m(\Omega); \|u\| \le R_0\}$. Докажем, что оно является поглощающим. Возьмем любое $u \in S_t B$ и докажем, что $u_0 \in B_0$. Если $u \in S_t B$, значит, существует $u_0 \in B$ такое, что $u(t)$ является решением нашей задачи с начальным значением u_0. Следовательно,

$$\|u(t)\|^2 \le \left(\int_0^t e^{2c_3 t} \cdot 2k(\tau) + \|u_0\|^2\right) e^{2c_3 t} \le e^{2c_3 t}\left(R^2 + 2R_0\right)$$

Потребуем, чтобы $u_0 \in B_0$:

$$e^{-2c_3 t}\left(R^2 + 2R_0\right) \le R_0^2,$$

$$t \ge \frac{1}{2c_3} \ln \frac{R_0^2}{R^2 + 2R_0}.$$

Если взять

$$T \ge \frac{1}{2c_3} \ln \frac{R_0^2}{R^2 + 2R_0},$$

то для любого $t \ge T$ будем иметь $u(t) \in B_0$.

Лемма доказана.

Лемма 4. *Операторы* $S_t : W_2^m(\Omega) \to W_2^m(\Omega)$ *непрерывны.*

Доказательство. Воспользуемся следующим представлением решения задачи (см. [6]):

$$u(t) = u_0 - \int_0^t Gu(s)\,ds,$$

где оператор $Gu = L^{-1}M$ липшиц-непрерывен. Оценим разность:

$$\|u(t) - v(t)\| = \left\|u_0 - v_0 - \int_0^T Gu(s)\,ds + \int_0^T Gv(s)\,ds\right\| \le$$

$$\le \|u_0 - v_0\| + \left\|\int_0^T Gu(s)\,ds - Gv(s)\,d\right\| \le$$

$$\le \|u_0 - v_0\| + M\int_0^T \|u(s) - v(s)\| ds.$$

Далее, по лемме Гронуолла будем иметь

$$\left\|u(t)-v(t)\right\| \le \left\|u_0-v_0\right\| \cdot e^{\int_0^t Mds} = \left\|u_0-v_0\right\| \cdot e^{tM} .$$

Следовательно, непрерывность оператора S_t доказана.

Из лемм 1-4 и теоремы A следует, что у полугруппы $\{S_t\}$ имеется ограниченный в $W_2^m(\Omega)$ максимальный аттрактор, т.е. имеет место следующая теорема.

Теорема. *Пусть функции* $b_i(\xi_i)$ *определены и непрерывны, а также существуют постоянные* c_1, c_2, c_3 *и такие, что функции* $b_i(\xi_i)$ *удовлетворяют условиям (3)-(5). Тогда у полугруппы* $\{S_t\}$*, порожденной задачей (1), имеется ограниченный в* $W_2^m(\Omega)$ *максимальный аттрактор.*

Ереванский государственный университет
e-mail: hmamikonyan8@gmail.com

А. А. Мамиконян

Аттрактор полугруппы, порожденной одним псевдопараболическим уравнением

Изучается начально-краевая задача

$$\begin{cases} Au + Bu = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \\ D^\gamma u\Big|_{\sum} = 0, |\gamma| < m, \end{cases}$$

где дифференциальные операторы A и B имеют представления

$$Au = (-1)^m \sum_{i=1}^n \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_i^{2m}}, \ Bu = (-1)^m \sum_{i=1}^n \frac{\partial^m u}{\partial x_i^m}\left(b_i\left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m}\right)\right).$$

Доказывается, что эта задача имеет единственное решение в пространстве $L_2\left((0,T), W_2^m(\Omega)\right)$ при любом $u_0 \in W_2^m(\Omega)$. Устанавливается существование ограниченного в $W_2^m(\Omega)$ максимального аттрактора полугруппы, порожденной данной задачей.

Հ. Ա. Մամիկոնյան

Պսևդոպարաբոլական տիպի մի հավասարմամբ ծնված կիսախմբի ատրակտորը

Ուսումնասիրվում է սկզբնական պայմաններով հետևյալ եզրային խնդիրը.

$$
\begin{cases}
Au + Bu = 0 \\
u(0, x) = u_0(x) \\
D^{\gamma} u \Big|_{\sum} = 0, |\gamma| < m,
\end{cases}
$$

որտեղ A և B դիֆերենցիալ օպերատորները ունեն հետևյալ ներկայացումները.

$$
Au = (-1)^m \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_i^{2m}}, \ Bu = (-1)^m \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^m u}{\partial x_i^m} \left(b_i \left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m} \right) \right).
$$

Ապացուցվում է այդ խնդրի լուծման գոյությունն ու միակությունը $L_2\left((0,T), W_2^m(\Omega)\right)$ -ում $u_0 \in W_2^m(\Omega)$ համար, ինչպես նաև այդ խնդրով ծնված կիսախմբի $W_2^m(\Omega)$ -ում սահմանափակ մաքսիմալ ատրակտորի գոյությունը:

H. A. Mamikonyan

Attractor of Semigroup Generated by an Equation of Pseudoparabolic Type

In this paper the following initial boundary value problem is considered

$$
\begin{cases}
Au + Bu = 0 \\
u(0, x) = u_0(x) \\
D^{\gamma} u \Big|_{\sum} = 0, |\gamma| < m,
\end{cases}
$$

where differential operators A and B have the following forms

$$
Au = (-1)^m \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_i^{2m}}, \ Bu = (-1)^m \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^m u}{\partial x_i^m} \left(b_i \left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m} \right) \right).
$$

It is proved that this problem has unique solution in $L_2\left((0,T), W_2^m(\Omega)\right)$ for $u_0 \in W_2^m(\Omega)$. Also it is proved the existence of bounded in $W_2^m(\Omega)$ attractor of semigroup generated by this problem.

Литература

1. *Соболев С. Л.* – ПМ ФТ. 1960. № 3. С. 20-55.
2. *Александрян Р. А.* – Тр. Моск. мат. о-ва. 1960. Т. 9. С. 455-505.
3. *Бабин А. В., Вишик М. И.* – УМН. 1983. Т. 38. № 4(232). С. 133-187.
4. *Акопян Г. С., Шахбагян Р. Л.* – Изв. НАН Армении. Математика. 1994. Т. 29. № 5. С. 27-37.
5. *Шахбагян Р. Л., Акопян Г. С* – Изв. НАН Армении. Математика. 1992. Т. 27. № 4. С. 59-69.
6. *Мамиконян А. А.* – Уч. зап. ЕГУ. 2008. № 1. С. 18-23.
7. *Мамиконян А. А.* – Уч. зап. ЕГУ. 2006. № 2. С. 33-40.