ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 118 2018 № 2

МЕХАНИКА

УДК 539.3

Академик С. А. Амбарцумян, М. В. Белубекян

Локализованные планарные колебания упругой прямоугольной пластинки с учетом микровращений

(Представлено 19/II 2018)

Ключевые слова: *прямоугольная пластинка, локализованные колебания, модель Коссера.*

Существование и свойства локализованных колебаний в зависимости от упругих свойств материала обычно исследуются на основе решения задачи для полубесконечной пластинки или пластинки-полосы [1-3]. В реальности появление локализованных колебаний в окрестности свободного края зависит от относительных размеров прямоугольной пластинки [4].

В настоящей статье устанавливаются условия появления локализованных планарных колебаний (или волн типа Рэлея) для упругой прямоугольной тонкой пластинки с учетом внутренних микровращений на основе упрощенной модели Коссера [5].

1. В прямоугольной декартовой системе координат (x, y, z) упругая изотропная пластинка занимает область $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $-h \le z \le h$. Относительно уравнений теории упругости с учетом внутреннего вращения по упрощенной модели теории Коссера применяются допущения гипотезы Кирхгофа [5, 6]. Как показано [5], в этом случае задачи обобщенного плоского напряженного состояния и изгиба отделяются друг от друга. При этом уравнения планарных колебаний пластинки получаются в виде

$$\begin{gathered}\Delta u+\theta_1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{1}{C_t^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[u-\gamma \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right], \\ \Delta v+\theta_1 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{1}{C_t^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[v+\gamma \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right],\end{gathered} \tag{1.1}$$

где u, v – планарные перемещения срединной поверхности пластинки

$$C_t^2=\frac{\mu}{\rho},\ \theta_1=\frac{1+v}{1-v}, \gamma=\frac{J}{\rho}, \tag{1.2}$$

μ – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона, ρ – плотность материала пластинки, J – коэффициент, характеризующий инерцию вращения частицы, Δ – двумерный оператор Лапласа. При выводе уравнений (1.1) использованы следующие выражения для усилий:

$$T_1 = C\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu\frac{\partial v}{\partial y}\right), T_2 = C\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$S_{21} = \frac{1-\nu}{2}C\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \chi^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right], \qquad (1.3)$$

$$S_{12} = \frac{1-\nu}{2}C\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \chi^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right].$$

Здесь приняты новые обозначения:

$$C = \frac{2Eh}{1-\nu^2}, \ \chi^2 = \frac{J}{\mu}, \qquad (1.4)$$

где E – модуль Юнга, C – жесткость пластины на растяжение (сжатие). В (1.1), (1.3) члены с коэффициентами γ, χ^2 обусловлены учетом внутренних микровращений частиц.

С помощью преобразования Ламе [7]

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \ v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad (1.5)$$

система уравнений (1.1) приводится к виду

$$C_e^2\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, C_e^2 = \frac{E}{\left(1-\nu^2\right)\rho},$$

$$C_t^2\Delta\psi + \gamma\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}. \qquad (1.6)$$

Из (1.6) следует, что, как и в классической теории пластины, планарные волны разделяются на продольные и поперечные. Микровращения влияют только на поперечные (сдвиговые) волны.

2. На основе приведенных уравнений и соотношений будут рассмотрены задачи колебаний прямоугольной пластинки с условиями Навье на двух противоположных сторонах $y = 0$, b, со свободным краем при $x = 0$ и с различными вариантами граничных условий на четвертой кромке $x = a$.

Условия Навье

$$u = 0, \quad T_2 = 0 \quad \text{при } y = 0, b \qquad (2.1)$$

относительно функций φ и ψ согласно (1.3) и (1.5) приводятся к виду

$$\varphi = 0, \ \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0 \ \text{при} \quad y = 0, b. \qquad (2.2)$$

Решения уравнений (1.6), удовлетворяющих граничным условиям (2.2), представляются следующим образом:

$$\varphi = e^{iwt}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)\sin\lambda_n y \ , \psi = e^{iwt}\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(x)\cos\lambda_n y \ , \lambda_n = \frac{n\pi}{b}. \qquad (2.3)$$

Подстановка (2.3) в уравнение (1.6) приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям относительно функций φ_n, ψ_n, для которых общие решения имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi_n &= A_n sh\lambda_n p_1 x + B_n ch\lambda_n p_1 x, \\ \psi_n &= C_n sh\lambda_n p_2 x + D_n ch\lambda_n p_2 x, \end{aligned} \tag{2.4}$$

где

$$p_1 = \sqrt{1-\theta\eta}\,,\ p_2 = \sqrt{1-\left(1-\gamma\lambda_n^2\eta\right)^{-1}\eta}\ \ ,\theta = \frac{1-\nu}{2}. \tag{2.5}$$

Предполагается, что кромка пластины $x=0$ свободна, т.е.

$$T_1 = 0,\ S_{12} = 0 \qquad \text{при} \qquad x = 0. \tag{2.6}$$

Условия (2.6) после применения преобразования (1.7) принимают вид

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + (1-\nu)\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} = 0, \\ &2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \chi^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta\psi = 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Требование, чтобы решение (2.3) с учетом (2.4) удовлетворяло граничным условиям (2.7), приводит к системе алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных

$$\begin{aligned} &\left(p_1^2-\nu\right)B_n - (1-\nu)\,p_2 C_n = 0, \\ &2p_1 A_1 - \left[1 + p_2^2 + \gamma\lambda_n^2\eta\left(1-p_2^2\right)\right]D_n = 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Для края пластин $x=a$ прежде всего рассматриваются граничные условия закрепленного края

$$u = v = 0 \quad \text{при} \quad x = 0\,. \tag{2.9}$$

После удовлетворения граничным условиям (2.9) получается вторая система уравнений относительно произвольных постоянных

$$\begin{aligned} &p_1\left(A_n ch\lambda_n p_1 a + B_n sh\lambda_n p_1 a\right) - C_n sh\lambda_n p_2 a - D_n ch\lambda_n p_2 a = 0, \\ &A_n sh\lambda_n p_1 a + B_n ch\lambda_n p_1 a - p_2\left(C_n ch\lambda_n p_2 a + D_n sh\lambda_n p_2 a\right) = 0. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Уравнения (2.8) и (2.10) составляют полную систему однородных уравнений относительно произвольных постоянных A_n, B_n, C_n, D_n. Условие равенства нулю детерминанта этой системы после некоторых преобразований приводится к виду

$$\begin{aligned} &\frac{(1-\nu)\,p_2}{2\left(p_1^2-\nu\right)}\left[1 + p_2^2 + \gamma\lambda_n^2\eta\left(1-p_2^2\right)\right] + p_2 - \\ &-p_2\left[\frac{1 + p_2^2 + \gamma\lambda_n^2\eta\left(1-p_2^2\right)}{2} + \frac{1-\nu}{p_1^2-\nu}\right]ch\lambda_n p_1 a\, ch\lambda_n p_2 a + \\ &+\left[\frac{(1-\nu)\,p_2^2}{p_1^2-\nu}p_1 + \frac{1 + p_2^2 + \gamma\lambda_n^2\eta\left(1-p_2^2\right)}{2p_1}\right]sh\lambda_n p_1 a\, sh\lambda_n p_2 a = 0. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Для приведенной задачи условие существования локализованных колебаний в окрестности свободного края (или волн типа Рэлея) будет

$$0 < \eta < \left(1 + \gamma\lambda_n^2\right)^{-1}. \tag{2.12}$$

При условии (2.12) из уравнения (2.11) в пределе $a \to \infty$ $(th\lambda_n p_k a \approx 1)$ получается

$$\left(1 - p_1 p_2\right)\left[1 + p_2^2 + \gamma\lambda_n^2\eta\left(1 - p_2^2\right) - \frac{2\left(1 - \nu\right) p_1 p_2}{p_1^2 - \nu}\right] = 0. \tag{2.13}$$

Учитывая, что $p_1 p_2 \neq 1$, из (2.13) получается уравнение, определяющее безразмерный параметр квадрата частоты η

$$R(\eta) \equiv \left(2 - \eta\right)^2 - 4 p_1 p_2 + \gamma\lambda_n^2\eta\left(2 - \eta\right)\left(1 - p_2^2\right) = 0. \tag{2.14}$$

В частном случае неучета внутреннего вращения $(\gamma = 0)$ (2.14) сводится к уравнению Рэлея [7]. Нетрудно показать, что уравнение (2.14) всегда имеет решение, удовлетворяющее условию существования локализованных колебаний (2.12).

Таким образом, для большего удаления от свободного края $(a \to \infty)$ или для большей глубины аналогично задаче Рэлея имеет место локализация колебаний. Естественно поставить вопрос – с какого удаления (глубины) появляются эти колебания. Или же при каких условиях относительно размера a (или $\lambda_1 a$) уравнение (2.11) имеет решение, удовлетворяющее условию (2.12).

Уравнение (2.11) имеет корень $\eta = \left(1 + \gamma\lambda_n^2\right)^{-1} \left(p_2 = 0\right)$. Разделив уравнение (2.11) на p_2 и переходя к пределу $p_2 \to 0$, получим уравнение, определяющее появление локализованных колебаний [4]

$$\begin{gathered} 4\left(1 + \gamma\lambda_1^2\right)^2 - \left(5 + 10\gamma\lambda_n^2 + 16\gamma^2\lambda_1^n\right) ch\alpha\lambda_1 a + \\ + \alpha^{-1}\lambda_1 a\left(1 + 2\gamma\lambda_1^2\right) sh\alpha\lambda_1 a = 0, \end{gathered} \tag{2.15}$$

где

$$\alpha = \sqrt{\frac{1 + \nu + 2\gamma\lambda_n^2}{2\left(1 + \gamma\lambda_n^2\right)}}. \tag{2.16}$$

Уравнение (2.15) определяет $\lambda_1 a$ (или точнее размер a), начиная с которого (2.11) имеет решение, удовлетворяющее условию затухания (2.12).

Если иметь в виду, что решением уравнения (2.15) являются достаточно большие $\lambda_1 a$, то в приближении $th\alpha\lambda_1 a \approx 1$ получается условие

$$\lambda_1 a > \frac{5 + 10\gamma\lambda_n^2 + 16\gamma^2\lambda_1^4}{1 + 2\gamma\lambda_1^2}\alpha. \tag{2.17}$$

Отсюда в случае отсутствия микровращений $(\gamma = 0)$ получается простая формула для задачи типа Релея [4].

$$\lambda_1 a > 5\sqrt{\frac{1+\nu}{2}}. \tag{2.18}$$

Институт механики НАН РА

Академик С. А. Амбарцумян, М. В. Белубекян

Локализованные планарные колебания упругой прямоугольной пластинки с учетом микровращений

Рассматривается задача планарных колебаний прямоугольной пластинки с учетом внутренних микровращений на основе упрощенной модели Коссера. Исследуются колебания, локализованные в окрестности свободного края пластинки. Установлены условия появления локализованных колебаний в зависимости от относительных размеров пластинки и учета микровращений.

Ակադեմիկոս Ս. Ա. Համբարձումյան, Մ. Վ. Բելուբեկյան

Առաձգական ուղղանկյուն սալի տեղայնացված պլանար տատանումները միկրոպտույտների հաշվառմամբ

Դիտարկված է ուղղանկյուն սալի պլանար տատանումների խնդիրը՝ հաշվի առնելով ներքին միկրոպտույտները Կոսեռի պարզեցված մոդելի հիման վրա: Հետազոտված են ազատ եզրի շրջակայքում տեղայնացված տատանումները: Հաստատված են տեղայնացված տատանումների առաջացման պայմաններ՝ կախված սալի հարաբերական հաստության չափերից և միկրոպտույտների հաշվառումից:

Academician S. A. Ambartsumian, M. V. Belubekyan

The Localized Planar Vibration of the Rectangular Plate with an Account of the Microrotation

The problem of the rectangular plate planar vibration with the account of the inner microrotation on the base of the Cosserat reduced model is considered. The localized vibration in the neighbourhood of the plate free edge is investigated. The conditions of the localized vibration existens in the dependence of the plate relative size and an account of the microrotation is established.

Литература

1. *Коненков Ю. К.* – Акуст. журнал. 1960. Т. 6. № 1. С. 124-126.
2. *Амбарцумян С. А., Белубекян М. В.* – Прикладная механика. НАН Украины. 1994. Т. 30. №2. С.63-68.
3. *Lawrie J.B., Kaplunov J.* – Mathematics and Mechnics of Solids. 2012. V. 17. №1. P. 4-16.

4. *Belubekyan M.V.* – Proc. of the Yerevan State Univ. (Phys. and Math. Science) 2017. V. 51. №1. P. 42-45.
5. *Амбарцумян С.А., Белубекян М.В.* – Изв. ЕГУАС. 2008. Т. 3. №1. С. 25-29.
6. *Амбарцумян С.А., Белубекян М.В., Аветисян А.С.* (ред.) Прикладная микрополярная разномодульная теория оболочек и пластин. Palmarium Academic Publishing. 2016. 194 с.
7. *Новацкий В.* Теория упругости. М. Мир. 1975. 372 с.