

МЕХАНИКА

УДК 539.3

Академик Г. Е. Багдасарян<sup>1,3</sup>, Э. А. Даноян<sup>1</sup>, М. А. Микилян<sup>2,3</sup>

Математическое моделирование колебаний двухслойной магнитострикционной пластинки

(Представлено 21/1 2018)

**Ключевые слова:** *двухслойные магнитострикционные пластинки, колебания, изгиб*

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим тонкую пластинку, составленную из двух однородных изотропных упругих слоев (рис. 1). Нижний слой изготовлен из диэлектрического магнитострикционного ферромагнитного материала и имеет толщину  $\delta$ . Верхний слой пластинки изготовлен из диэлектрического материала, магнитные свойства которого эквивалентны свойствам вакуума, и имеет толщину  $h$ .

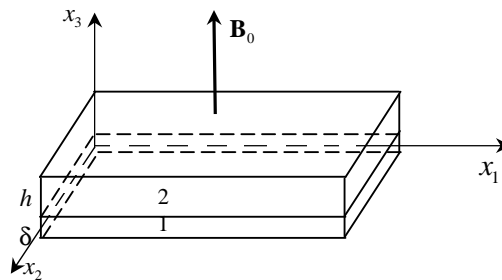


Рис. 1

Пластинка отнесена к прямоугольной декартовой системе координат  $x_1x_2x_3$  так, что координатная плоскость  $Ox_1x_2$  совпадает с срединной плоскостью магнитострикционного слоя. В слое с номером 1 (нижний слой) координата  $x_3$  изменяется в интервале  $-\delta/2 \leq x_3 \leq \delta/2$ , а в слое с номером 2 (верхний слой) – в интервале  $\frac{\delta}{2} \leq x_3 \leq \frac{\delta}{2} + h$ . Считается, что слой

после деформации остаются упругими и работают совместно без скольжения.

Пусть пластинка помещена в нестационарном магнитном поле, которое в отсутствие пластинки характеризуется индукцией внешнего поляризуемого магнитного поля  $\mathbf{B}_0(0,0,B_{03}(t))$ . При помещении слоистой магнитоэластичной пластинки в магнитном поле происходит намагничивание слоев пластинки, приводящее как к изменению характеристик магнитного поля во всем пространстве, так и к деформированию пластинки. Для линеаризации уравнений и граничных условий магнитоупругости рассматриваемой пластинки представим характеристики магнитного поля в виде [1-4]

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_* + \mathbf{b}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}_* + \mathbf{m}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_* + \mathbf{h}. \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{B}_*$ ,  $\mathbf{M}_*$  и  $\mathbf{H}_*$  – соответственно магнитная индукция, намагниченность и напряженность магнитного поля недеформируемой пластинки,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{h}$  – добавления к указанным величинам, обусловленные деформацией пластинки. Окружающая тело среда в отношении электромагнитных свойств принимается в приближении вакуума.

Здесь, как в линейной теории магнитоупругости, считается, что добавления  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{h}$  являются малыми по сравнению с соответствующими величинами, характеризующими магнитное поле недеформируемой пластинки. В работах [1-6], используя основные положения нелинейной теории магнитоупругости ферромагнитных тел [1, 6] и теории малых возмущений, путем линеаризации получены следующие линейные уравнения и граничные условия, описывающие поведение магнитоупругих характеристик рассматриваемой задачи, обусловленные взаимодействием указанной магнитоактивной деформируемой среды с магнитным полем:

*уравнения во внутренней области пластинки (в слое с номером 1)*

$$\begin{cases} \frac{\partial s_{ik}^{(1)}}{\partial x_i} + \mu_0 M_*^i \left( \frac{\partial H_{*k}}{\partial x_i} + \frac{\partial h_k}{\partial x_i} \right) + \mu_0 m_i \frac{\partial H_{*k}}{\partial x_i} = \rho_0^{(1)} \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}, \\ \text{rot } \mathbf{h} = 0, \quad \text{div } \mathbf{b} = 0, \quad \mathbf{b} = \mu_0 (\mathbf{h} + \mathbf{m}), \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} s_{ij}^{(1)} = s_0^{ij} + c_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \mu_0 e_{ijk} m_k, \\ H_k = A^{kl} M_{*l} + g_{ikl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + A^{kl} m_l, \\ s_0^{ij} = \mu_0 M_{*j} M_{*k} + \frac{1}{2} \mu_0 B_{ijkl} M_{*k} M_{*l}, \end{cases} \quad (3)$$

где  $s_{ik}$  – компоненты тензора напряжений;  $u_k$  – компоненты вектора упругих перемещений;  $h_k$ ,  $m_k$  и  $b_k$  – компоненты векторов  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{b}$ ;  $x_i$  – декартовы координаты;

*уравнение во внутренней области пластинки (в слое с номером 2,*

$$\frac{\partial s_{ik}^{(2)}}{\partial x_i} = \rho_0^{(2)} \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}, \quad (4)$$

где

$$s_{ij}^{(2)} = \left( \lambda^{(2)} \delta_{ij} \delta_{ki} + \mu^{(2)} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \right) \frac{\partial u_k}{\partial x_l}; \quad (5)$$

уравнения во внешней области (в области вне магнитоэлектрического слоя пластинки)

$$\text{rot} \mathbf{h}^{(e)} = 0, \quad \text{div} \mathbf{h}^{(e)} = 0, \quad \mathbf{b}^{(e)} = \mu_0 \mathbf{h}^{(e)}. \quad (6)$$

Здесь и в дальнейшем индекс “e” означает принадлежность к внешней среде;

условия сопряжения для напряжений на поверхности  $S_0$  нижнего слоя пластинки, граничащего с вакуумом

$$s_{ki}^{(1)} N_k^0 = [T_{ki}^{(e)} - T_{ki}] N_k^0; \quad (7)$$

условия сопряжения для напряжений на поверхности раздела слоев  $\left( x_3 = \frac{\delta}{2} \right)$

$$(s_{ki}^{(1)} - s_{ki}^{(2)}) N_k^0 = [T_{ki}^{(e)} - T_{ki}] N_k^0; \quad (8)$$

условия сопряжения для магнитных величин на поверхности  $S_0$  нижнего слоя

$$\begin{aligned} [b_k - b_k^{(e)}] N_k^0 &= [B_{*m} - B_{*m}^{(e)}] \frac{\partial u_k}{\partial x_m} N_k^0, \\ \epsilon_{nmk} \left\{ [h_n - h_n^{(e)}] N_m^0 - [H_{*n} - H_{*n}^{(e)}] \frac{\partial u_i}{\partial x_m} N_i^0 \right\} &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $T_{ki}$  и  $T_{ki}^{(e)}$  – тензоры напряжений Максвелла для нижнего слоя и окружающей его среды,  $N_k^0$  – компоненты вектора внешней нормали  $\mathbf{N}_0$  к соответствующей поверхности нижнего слоя  $S_0$ ,  $\epsilon_{ijk}$  – символ Ливы-Чивита,

$$\begin{aligned} T_{ki}^{(e)} &= \mu_0 H_{*k}^{(e)} H_{*i}^{(e)} - \frac{1}{2} \mu_0 \delta_{ik} [\mathbf{H}_*^{(e)}]^2 + \mu_0 H_{*k}^{(e)} h_i^{(e)} + \mu_0 h_k^{(e)} H_{*i}^{(e)} - \\ &\quad - \mu_0 \delta_{ik} \mathbf{H}_*^{(e)} \mathbf{h}^{(e)}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$T_{ki} = H_{*k} B_{*i} - \frac{1}{2} \mu_0 \delta_{ik} \mathbf{H}_*^2 + H_{*k} b_i + h_k B_{*i} - \mu_0 \delta_{ik} \mathbf{H}_* \mathbf{h},$$

условия сопряжения для напряжений на поверхности верхнего слоя пластинки, граничащего с вакуумом  $\left( x_3 = \frac{\delta}{2} + h \right)$

$$s_{ki}^{(2)} N_k^0 = 0. \quad (11)$$

В материальных уравнениях (3)

$$\begin{aligned}
c_{ijkl} &= C_{ijkl} + \mu_0 A_{pq} M_r^n M_j^n (\delta_{ik} \delta_{pl} \delta_{rq} + \delta_{kl} \delta_{iq} \delta_{ir} + \delta_{lp} \delta_{iq} \delta_{kr}) + \\
&\quad + \frac{\mu_0}{2} B_{pqrs} (\delta_{ip} \delta_{jq} \delta_{kl} + \delta_{iq} \delta_{jk} \delta_{pl} + \delta_{ik} \delta_{jq} \delta_{pl}) M_r^n M_s^n + \\
&\quad + \mu_0 B_{pqrs} (\delta_{pk} \delta_{ql} \delta_{is} M_j^n + \delta_{ip} \delta_{jq} \delta_{is} M_k^n) M_r^n, \quad (12) \\
e_{ijk} &= B_{ijkl} M_l^n + A_{mi} (\delta_{kj} M_m^n + \delta_{mk} M_j^n), \\
g_{ijk} &= B_{jkpi} M_p^n + A_{rs} (\delta_{is} \delta_{jk} M_r^n + \delta_{rk} \delta_{is} M_j^n + \delta_{ij} \delta_{sk} M_r^n),
\end{aligned}$$

где  $c_{ijkl}$ ,  $A_{kl}^{-1}$  и  $B_{jkpi}$  – тензоры упругих постоянных, магнитных восприимчивостей и магнитострикционных коэффициентов, соответственно.

Для магнитострикционного слоя пластинки, который в размагниченном состоянии изотропен как по магнитным, так и упругим свойствам, справедливы равенства [1, 3]

$$\begin{aligned}
C_{ijkl} &= \lambda^{(1)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu^{(1)} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad A_{kl} = \chi^{-1} \delta_{kl}, \\
B_{ijkl} &= e_2 \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{2} (e_1 - e_2) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (13)
\end{aligned}$$

где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера,  $\lambda$  и  $\mu$  – постоянные Ляме,  $\chi$  – магнитная восприимчивость,  $\mu_r = \chi + 1$  – относительная магнитная проницаемость,  $e_1, e_2$  – магнитострикционные постоянные среды.

Для основных магнитострикционных материалов справедливы следующие неравенства:  $\mu_0 B_{ijkl} M_{*k} M_{*l} / \mu \ll 1$ ,  $\chi e_i \gg 1$ . В силу этих условий, когда вектор  $\mathbf{M}_*$  параллелен одной из осей координатной системы, для тензоров обобщенных упругих постоянных, магнитных восприимчивостей и магнитострикционных коэффициентов получаются следующие упрощенные представления [1, 7]:

$$c_{ijkl} = C_{ijkl}, \quad g_{ijk} = B_{jkpi} M_{*p}, \quad e_{ijk} = B_{ijkl} M_{*l} \quad (14)$$

К уравнениям (4) необходимо присоединить условия затухания возмущений магнитных величин на бесконечности.

Входящие в приведенные уравнения и условия магнитные величины недеформированной пластинки, отмеченные символом \*, являются решением следующей задачи магнитостатики:

*уравнения магнитостатики во внутренней области магнитострикционного слоя*

$$\text{rot } \mathbf{H}_* = 0, \quad \text{div } \mathbf{B}_* = 0, \quad \mathbf{B}_* = \mu_0 (\mathbf{H}_* + \mathbf{M}_*); \quad (15)$$

*уравнения магнитостатики во внешней области магнитострикционного слоя*

$$\text{rot } \mathbf{H}_*^{(e)} = 0, \quad \text{div } \mathbf{B}_*^{(e)} = 0, \quad \mathbf{B}_*^{(e)} = \mu_0 \mathbf{H}_*^{(e)}, \quad \mathbf{M}_*^{(e)} = 0; \quad (16)$$

*условие сопряжения на поверхности магнитострикционного слоя и условие на бесконечности*

$$\begin{aligned}
(\mathbf{B}_* - \mathbf{B}_*^{(e)}) \cdot \mathbf{N}^0 &= 0, \quad (\mathbf{H}_* - \mathbf{H}_*^{(e)}) \times \mathbf{N}^0, \\
\mathbf{H}_*^{(e)} &\rightarrow \frac{\mathbf{B}^0}{\mu_0} \quad \text{при } |r| \rightarrow \infty; \quad (17)
\end{aligned}$$

где  $\mathbf{H}^0 = \frac{\mathbf{B}^0}{\mu_0}$  – напряжение заданного внешнего магнитного поля, в котором помещается рассматриваемое тело.

**2. Вывод двумерных уравнений колебаний тонкой двухслойной пластинки.** Для применения процедуры получения двумерных уравнений колебаний тонких пластин необходимо знать характеристики (напряженность, магнитная индукция и намагниченность) магнитного поля во всем пространстве. Их определяем, решая трехмерные задачи математической физики, сформулированные в предыдущем параграфе. Решение указанных краевых задач в случае пластин конечных размеров связано с серьезными математическими трудностями. Численные решения этих задач для пластинки-полосы приведены в [8]. Анализ полученных в этой работе решений показывает, что характеристики магнитного поля для пластинки конечных размеров вне некоторого достаточно узкого пограничного слоя практически совпадают с соответствующими характеристиками для бесконечной полосы. На этом основании при определении характеристик магнитного поля пластинку будем считать бесконечной. Тогда решение задачи (15)-(17) представится в виде

$$\begin{aligned} B_{*i}^{(e)} = 0, \quad B_{*i} = 0, \quad H_{*i}^{(e)} = 0, \quad H_{*i} = 0, \quad M_{*i}^{(e)} = 0, \quad i = 1, 2, \\ B_{*3}^{(e)} = B_{03}, \quad H_{*3}^{(e)} = \frac{B_{03}}{\mu_0}, \quad M_{*3}^{(e)} = 0, \\ B_{*3} = B_{03}, \quad H_{*3} = \frac{B_{03}}{\mu_0 \mu_r}, \quad M_{*3} = H_{*3}. \end{aligned} \quad (18)$$

Для приведения трехмерных уравнений колебания (2), (3) к двумерным принимается гипотеза недеформируемых нормалей для всего пакета в целом [9], согласно которой имеем

$$\begin{aligned} u_1 = u - x_3 \frac{\partial w}{\partial x_1}, \\ u_2 = v - x_3 \frac{\partial w}{\partial x_2}, \\ u_3 = w(x_1, x_2, t), \end{aligned} \quad (19)$$

где  $u(x_1, x_2, t), v(x_1, x_2, t), w(x_1, x_2, t)$  – перемещения точек срединной поверхности нижнего слоя пластинки.

Пользуясь формулами (4), (12), (13) и пренебрегая влияниями напряжения  $s_{33} = 0$ , с уже принятой точностью  $\mu_0 B_{ijkl} M_{*k} M_{*l} / \mu \ll 1$ , получаем следующие выражения для компонент  $s_{11}, s_{22}$  и  $s_{12}$  тензора магнитоупругих напряжений:

$$\begin{aligned} s_{11}^{(1)} &= (\bar{\lambda}^{(1)} + 2\mu^{(1)}) \varepsilon_{11} + \bar{\lambda}^{(1)} \varepsilon_{22} + \sigma h_3 + \frac{\sigma}{2\mu_0 \mu_r} B_{03}, \\ s_{22}^{(1)} &= (\bar{\lambda}^{(1)} + 2\mu^{(1)}) \varepsilon_{22} + \bar{\lambda}^{(1)} \varepsilon_{11} + \sigma h_3 + \frac{\sigma}{2\mu_0 \mu_r} B_{03}, \\ s_{12} &= 2\mu^{(1)} \varepsilon_{12}, \end{aligned} \quad (20)$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned}\sigma &= \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_3 + 2\mu} f - g \right), \quad g = -\frac{\chi^2 e_2}{\mu_r} B_{03}, \quad f = -\frac{\chi^2 e_1 e_2}{\mu_r} B_{03}, \\ \bar{\lambda} &= \lambda_1 - \frac{\lambda_2^2}{\lambda_3 + 2\mu}, \quad \lambda_1 = \lambda - \frac{\chi^3 e_2^2}{\mu_0 \mu_r^2} B_{03}^2, \\ \lambda_2 &= \lambda - \frac{\chi^3 e_1 e_2}{\mu_0 \mu_r^2} B_{03}^2, \quad \lambda_3 = \lambda - \frac{\chi^3 e_1^2}{\mu_0 \mu_r^2} B_{03}^2,\end{aligned}\tag{21}$$

Подставляя соотношения (20) в уравнения (2) и усредняя полученные при этом уравнения по толщине пластинки с учетом поверхностных условий (7)-(11), получим следующие двумерные уравнения колебаний рассматриваемой пластинки относительно  $u, v, w$ :

$$\begin{cases} L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w + L_1(h_3) = X_1, \\ L_{21}u + L_{22}v + L_{23}w + L_2(h_3) = X_2, \\ L_{312}(u, v) + L_{33}w + L_3(h_3) = X_3. \end{cases}\tag{22}$$

В системе (22)  $L_{ij}$  – линейные дифференциальные операторы

$$L_{ii} = \left[ (\bar{\lambda}^{(1)} + 2\mu^{(1)})\delta + (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})h \right] \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \left[ \mu^{(1)}\delta + \mu^{(2)}h \right] \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}; \quad i = 1, 2,$$

при этом  $j = \begin{cases} 2 & \text{если } i = 1 \\ 1 & \text{если } i = 2 \end{cases}$ ,

$$\begin{aligned}L_{12} &= L_{21} = \left[ (\bar{\lambda}^{(1)} + \mu^{(1)})\delta + (\lambda^{(2)} + \mu^{(2)})h \right] \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}; \\ L_{i3} &= \frac{h(h+\delta)}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \Delta, \quad i = 1, 2; \\ L_{312}(u, v) &= \frac{h(h+\delta)}{2} (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) \Delta \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \right); \\ L_{33} &= - \left[ (\bar{\lambda}^{(1)} + 2\mu^{(1)}) \frac{\delta^3}{12} + (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) \frac{h^3}{12} \theta(\delta, h) \right] \Delta^2 - \\ &\quad - \frac{\chi}{\mu_0 \mu_r} (B_{03})^2 \left[ \left( 1 - \frac{\chi}{\mu_r} \left( \frac{e_1 - 3e_2}{2} \right) \right) - \frac{d_2}{B_{03}} \right] \delta \Delta; \\ \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}; \\ \theta(\delta, h) &= 1 + 3 \left( 1 + \frac{\delta}{h} \right)^2;\end{aligned}\tag{23}$$

$L_i(h_3)$  – члены, учитывающие влияние индуцированного в пластинке магнитного поля  $\mathbf{h}$ :

$$L_i(h_3) = \left( \sigma + \frac{\chi B_{03}}{\mu_r} \right) \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \frac{\partial h_3}{\partial x_i} dx_3, i = 1, 2; \quad (24)$$

$$L_3(h_3) = \left( \sigma + \frac{\chi B_{03}}{\mu_r} \right) \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} x_3 \Delta h_3 dx_3 + \chi B_{03} \left( 1 - \frac{d_1}{\mu_0 \mu_r} \right) \left( h_3 \Big|_{x_3 = \frac{\delta}{2}} - h_3 \Big|_{x_3 = -\frac{\delta}{2}} \right);$$

$X_i$  – компоненты объемной силы инерционного происхождения

$$X_1 = \left[ \delta \rho^{(1)} + h \rho^{(2)} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\rho^{(2)} h (h + \delta)}{2} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial t^2},$$

$$X_2 = \left[ \delta \rho^{(1)} + h \rho^{(2)} \right] \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\rho^{(2)} h (h + \delta)}{2} \frac{\partial^3 w}{\partial x_2 \partial t^2}, \quad (25)$$

$$X_3 = \left[ \delta \rho^{(1)} + h \rho^{(2)} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\rho^{(2)} h (h + \delta)}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) -$$

$$- \left( \rho^{(1)} \frac{\delta^3}{12} + \rho^{(2)} \frac{h^3}{12} \theta(\delta, h) \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta w.$$

**3. Определение индуцированного магнитного поля.** Для замыкания системы (19) следует определить компоненты  $h_i$  индуцированного магнитного поля во всем пространстве. С этой целью вводятся потенциальные функции  $\varphi^{(j)}$  посредством

$$\mathbf{h}^{(j)} = \text{grad } \varphi^{(j)}. \quad (26)$$

Здесь индекс  $j = 1$  соответствует областям  $x_3 < -\delta/2$  и  $x_3 > \delta/2$ , причем  $\varphi^{(1)}$  является решением уравнения Лапласа

$$\Delta_3 \varphi^{(1)} = 0;$$

индекс  $j = 2$  соответствует области  $-\delta/2 \leq x_3 \leq \delta/2$ , причем  $\varphi^{(2)}$  удовлетворяет уравнению

$$\mu_0 \mu_r \Delta_3 \varphi = d_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} + (c - d_2) \Delta_2 w, \quad (27)$$

где  $\Delta_2, \Delta_3$  – соответственно трехмерный и двумерный операторы Лапласа,

$$d_1 = -\frac{\chi^4 e_1^2}{\mu_r^2 (\lambda_3 + 2\mu)} B_{03},$$

$$d_2 = \frac{\chi^2}{\mu_r} \left[ \frac{e_1 - e_2}{2} - \frac{\lambda e_1}{\lambda_3 + 2\mu} \right] B_{03},$$

$$c = \frac{\chi^2 B_0^3}{2\mu_r} (e_1 - 3e_2),$$

индекс  $j = 3$  соответствует области  $\delta/2 \leq x_3 \leq \delta/2 + h$ , причем  $\varphi^{(3)}$  является решением уравнения Лапласа

$$\Delta_3 \varphi^{(3)} = 0.$$

Указанные уравнения решаются при поверхностных условиях (9). Решая таким образом сформулированные граничные задачи в случае бесконечной пластинки, находим  $\varphi^{(j)}$  и, в частности, для интересующей нас функции  $\varphi^{(2)}$  в магнитоупругом слое, необходимой для замыкания системы (19), получается следующее представление:

$$\varphi = \left( \gamma_2 - \frac{\delta_2}{\delta_1} \gamma_1 \right) w \operatorname{ch} \tilde{k} x_3 + \operatorname{sh} \tilde{k} x_3 \frac{a}{k} \left( \operatorname{ch} \frac{\tilde{k} \delta}{2} - \frac{\delta_1}{\delta_2} \operatorname{sh} \frac{\tilde{k} \delta}{2} \right) \frac{d_2}{\mu_0} \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) + F_0 w, \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} a &= \frac{k}{n \tilde{k}}, \quad n = \mu_r - \frac{d_1}{\mu_0}, \quad \tilde{k} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\mu_0 \mu_r - d_1}} k, \\ \delta_1 &= \operatorname{sh} \frac{\tilde{k} \delta}{2} + a \operatorname{ch} \frac{\tilde{k} \delta}{2}, \quad \delta_2 = \operatorname{ch} \frac{\tilde{k} \delta}{2} + a \operatorname{sh} \frac{\tilde{k} \delta}{2}, \\ \gamma_1 &= r \operatorname{sh} \frac{\tilde{k} \delta}{2} - \frac{\delta a}{2k} z \operatorname{ch} \frac{\tilde{k} \delta}{2}, \quad \gamma_2 = r \operatorname{ch} \frac{\tilde{k} \delta}{2} - \frac{\delta a}{2k} \operatorname{sh} \frac{\tilde{k} \delta}{2}, \\ r &= \frac{\chi}{\mu_0 \mu_r} B_{03} - F_0, \quad z = \frac{d_2 k^2}{\mu_0}, \\ F(0) &= \frac{c - d_2}{\mu_0 \mu_r}. \end{aligned}$$

Подставляя (28) в (26), для интересующей нас компоненты  $h_3^0$  индуцированного магнитного поля получается следующее выражение:

$$h_3 = \tilde{k} \left( \gamma_2 - \frac{\delta_2}{\delta_1} \gamma_1 \right) w \operatorname{sh} \tilde{k} x_3 + \frac{d_2 a \tilde{k}}{\mu_0 k} \operatorname{ch} \tilde{k} x_3 \left( \operatorname{ch} \frac{\tilde{k} \delta}{2} - \frac{\delta_1}{\delta_2} \operatorname{sh} \frac{\tilde{k} \delta}{2} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \right).$$

**4. Граничные условия на торцах пластинки.** На торцах пластинки можно рассматривать различные граничные условия. В частности, пусть на торце пластинки  $x_1 = \operatorname{const}$  ( $x_1 = 0$  или  $x_1 = a$ ) имеют место следующие условия:

1) условия жесткой заделки:

$$\begin{aligned} u &= 0, \quad v = 0, \\ w &= 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

2) отмеченный край свободен от внешних механических воздействий. Тогда согласно (7) получаются следующие условия (при  $-\delta/2 \leq x_3 \leq \delta/2$ ):

$$\begin{aligned} s_{11} &= \left( (2\mu + \lambda_1) - \frac{\lambda_2^2}{\lambda_3 + 2\mu} \right) \varepsilon_{11} + \left( \lambda_1 - \frac{\lambda_2^2}{\lambda_3 + 2\mu} \right) \varepsilon_{22} + \\ &+ \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_3 + 2\mu} f - g \right) h_3 = T_{11}^{(e)} - T_{11}, \quad \text{при } (-\delta/2 \leq x_3 \leq \delta/2) \quad (30) \\ s_{11} &= \left( (2\mu + \lambda) - \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} \right) \varepsilon_{11} + \left( \lambda - \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} \right) \varepsilon_{22} = 0, \quad \text{при } (\delta/2 \leq x_3 \leq \delta/2 + h) \end{aligned}$$



$$u_2 = v - x_3 \frac{\partial w}{\partial x_2} = 0, \quad (31)$$

$$u_3 = w = 0.$$

Интегрируя условие (30) в пределах  $[-\delta/2, \delta/2 + h]$  по  $x_3$ , затем, умножая это же условие на  $x_3$  и интегрируя в указанных пределах, получаем следующие условия:

$$\begin{aligned} & \left[ (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})\delta + (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})h \right] \frac{\partial u}{\partial x_1} - (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) \frac{h(h+\delta)}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = -\frac{\sigma\delta}{2\mu_0\mu_r} B_{03}, \\ & (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) \frac{h(h+\delta)}{2} \frac{\partial u}{\partial x_1} - \left[ (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) \frac{\delta^3}{12} + (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) \frac{h^3}{12} \theta(\delta, h) \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0, \end{aligned} \quad (32)$$

а из второго и третьего условий (31), как и в предыдущем случае, получаем

$$v = 0, \quad w = 0 \quad (x_1 = 0, x_1 = a). \quad (33)$$

Аналогично можно рассматривать граничные условия на торце пластинки  $x_2 = \text{const}$ .

Таким образом, задача колебаний двухслойных магнитоэластичных пластин в поперечном магнитном поле приведена к решению системы (22) при краевых условиях (32) и (33). Легко заметить, что полученная краевая задача является неоднородной. А это значит:

а) если магнитное поле стационарное, то под действием таких полей происходит изгиб пластинки;

б) если внешнее магнитное поле нестационарное (в частности  $B(t) = B_0 + B_1 \cos \omega t$ ), то пластинка совершает вынужденные колебания, т.е. однородная пластинка в гармоническом во времени магнитном поле становится источником распространения возмущений.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 15T-2C134.

<sup>1</sup>Ереванский государственный университет  
e-mail: gevogb@rau.am, edan@ysu.am

<sup>2</sup>Российско-Армянский университет  
e-mail: marine.mikilyan@rau.am

<sup>3</sup>Институт механики НАН РА

**Академик Г. Е. Багдасарян, Э. А. Даноян, М. А. Микилян**

### **Математическое моделирование колебаний двухслойной магнитоэластичной пластинки**

Рассматривается математическое моделирование колебаний двухслойной магнитоэластичной пластинки в нестационарном магнитном поле. На основе теории тонких пластин и линеаризованной теории магнитоупругости ферромагнитных тел получены основные уравнения и граничные условия, описывающие

динамическое поведение рассматриваемой магнитоупругой системы. Исходя из полученных уравнений сформулирована соответствующая задача математической физики. Исследованием сформулированной задачи установлено, что: а) если магнитное поле стационарное, то под действием таких полей происходит изгибание пластинки; б) если внешнее магнитное поле нестационарное, то пластинка совершает вынужденные колебания, т.е. однородная пластинка в гармоническом во времени магнитном поле становится источником распространения возмущений.

**Ակադեմիկոս Գ. Ե. Բաղդասարյան, Է. Հ. Դանոյան,  
Մ. Ա. Միկիլյան**

**Երկշերտ մագնիսաստրիկցիոն սալի տատանումների  
մաթեմատիկական մոդելավորումը**

Դիտարկվում է երկշերտ մագնիսաստրիկցիոն սալի և ոչ ստացիոնար մագնիսական դաշտի փոխազդեցության մաթեմատիկական մոդելավորումը: Բարակ սալերի տեսության և ֆերոմագնիսական մարմինների մագնիսաառաձգականության գծայնացված տեսության հիման վրա ստացված են հիմնական հավասարումները և եզրային պայմանները, որոնք նկարագրում են դիտարկվող մագնիսաառաձգական համակարգի դինամիկական վարքը: Ստացված հավասարումների հիման վրա ձևակերպված է մաթեմատիկական ֆիզիկայի համապատասխան խնդիր: Ձևակերպված խնդրի հետազոտմամբ ցույց է տրված, որ ա) երբ մագնիսական դաշտը ստացիոնար է, ապա այդպիսի դաշտերի ազդեցության տակ տեղի է ունենում սալի ծռում, բ) եթե արտաքին մագնիսական դաշտը ոչ ստացիոնար է, ապա սալը կատարում է ստիպողական տատանումներ: Այսինքն համասեռ սալը, ըստ ժամանակի, մագնիսական դաշտում դառնում է զրգռումների տարածման աղբյուր:

**Academician G. Y. Baghdasaryan, E. H. Danoyan, M. A. Mikilyan**

**Mathematical Modeling of Vibrations of Two-Layered  
Magnetostrictive Plate**

Mathematical modeling of vibrations of two-layered magnetostrictive plate in non-stationary magnetic field is considered. On the basis of the theory of thin plates and linearized theory of magnetoelasticity of ferromagnetic bodies the main equation and boundary conditions, describing the dynamical behavior of the examined magnetoelastic system are obtained. On the basis of the obtained equations the corresponding problem of mathematical physics is addressed. By the study of the formulated problem it is established, that: a) in the case of stationary magnetic field the plate bends under the action of such fields, b) if the external magnetic field is non-stationary, then the plate does forced vibrations. It means that the homogeneous plate in the harmonic magnetic field acts as a source of propagation of disturbances.

**Литература**

1. *Багдасарян Г.Е.* Колебания и устойчивость магнитоупругих систем. Ереван. Изд-во ЕГУ. 1999. 440 с.

2. *Багдасарян Г.Е., Даноян Э.А.* – МГТ. 1992. №3. С. 87-94.
3. *Багдасарян Г.Е.* – Мат. методы и физ.-мех. поля. 1998. Т. 41. №3. С 70-75.
4. *Pao Y.- H., Yen C.-S.* – Int. J. Eng. Sci. 1973. V. 11. №4. P. 415-436.
5. *Brown W.F.* Magnetoelastic Interactions. N. Y. Springer-Veriag. 1966. 155 p.
6. *Maugin G. A.* Continuum mechanics of electromagnetic solids. North-Holand–Amsterdam–New York–Oxford–Tokyo. 1988. 560 p.
7. *Багдасарян Г.Е., Даноян Э.А.* – Доклады НАН РА. 2015. Т. 115. №3. С. 218-226
8. *Bagdasarian G.E., Philiposian G.T.* In: Proc. North American Conf. on Smart Structure and Materials (SPIE). USA. 1997. V. 3039. P. 715-725.
9. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. М. Наука. 1974. 446 с.