

МЕХАНИКА

УДК 539.3

Академик Г. Е. Багдасарян^{1,3}, Э. А. Даноян¹, М. А. Микилян^{2,3}

**Колебания и статическая устойчивость трехслойных
магнотстрикционных пластин под действием
магнитного поля**

(Представлено 22/1 2018)

Ключевые слова: *трехслойные магнотстрикционные пластинки, колебания, устойчивость.*

Введение. На основе теории магнитоупругости магнотстрикционных твердых тел и классической теории тонких упругих пластин в [1] получены основные уравнения и граничные условия, описывающие колебания и устойчивость трехслойных магнотстрикционных ферромагнитных пластин в стационарном магнитном поле. В настоящей работе на основе уравнений и граничных условий, полученных в указанной работе [1], путем решения конкретной задачи установлено, что благодаря магнотстрикционному эффекту а) возможна потеря статической устойчивости пластинки под действием постоянного поперечного магнитного поля; б) при помощи магнитного поля можно существенно изменить величину частоты собственных колебаний. Исследовано также влияние неоднородности пластинки на рассматриваемые процессы.

1. Постановка задачи. Рассмотрим тонкую пластинку, составленную из трех однородных изотропных упругих слоев. Слои, симметрично расположенные относительно срединной плоскости пластинки, изготовлены из одинаковых диэлектрических неферромагнитных материалов и имеют одинаковую толщину. Материал среднего слоя пластинки является ферромагнитным диэлектриком, обладающим магнотстрикционными свойствами. Пластинка отнесена к прямоугольной декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 так, что координатная плоскость Ox_1x_2 совпадает со срединной плоскостью среднего слоя. В слое с номером i координата x_3 изменяется в интервале $(\delta_{i3} - \delta_{i2})\delta - \delta_{i1}h < x_3 < (\delta_{i2} - \delta_{i1})\delta + \delta_{i3}h$, где δ_{ij} – символ Кронеккера, $i = 1, 2, 3$. Считается, что слои после деформации остаются упругими и работают совместно без скольжения. Окружающая тело среда и материал внешних слоев пластинки в отношении электромагнитных

свойств принимаются в приближении вакуума. Пусть пластинка помещена в магнитное поле, которое в отсутствии пластинки характеризуется индукцией внешнего поляризующего магнитного поля $\vec{B}_0(0,0,B_{03})$. Под \vec{B}_0 понимается магнитная индукция в вакууме (окружающая пластинку среда) при отсутствии пластинки.

Для математического моделирования процессов магнитоупругого взаимодействия в рассматриваемой пластинке принимаются основные положения следующих теорий и методов, используемых в задачах механики тонких пластин и оболочек:

- линеаризованная теория упругой устойчивости магнитоэластичных твердых тел [2];
- классическая теория упругих пластин [3];
- асимптотический метод исследования упругих колебаний тонких пластин [4, 5].

Учитывая вышеизложенное и поступая так же, как в [2, 6] (в этих работах подробно изложено метод математического моделирования магнитоупругих процессов в магнитомягкой ферромагнитной пластинке, материал которой не обладает магнитоэластичными свойствами), в [1] получены линеаризованные двумерные уравнения и соответствующие условия, описывающие колебания и устойчивость трехслойных магнитоэластичных пластин в поперечном магнитном поле. Для простоты и наглядности здесь рассматривается случай прямоугольной пластинки, торцы которой неподвижны в своей плоскости. Тогда согласно [1] возможны чисто изгибные колебания и задача исследования поведения магнитоупругих возмущений в рассматриваемой пластинке при поперечных колебаниях сводится к решению следующего уравнения:

$$D_* \Delta^2 w + 2A[\rho] \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + T \Delta w + 2A[\rho \epsilon] \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad (1.1)$$

при классических граничных условиях [2] на контуре пластинки.

Здесь

$$D_* = \frac{2}{3} \left\{ (h^3 - \delta^3) \frac{E^{(1)}}{1 - (\nu^{(1)})^2} + \delta^3 \left[\frac{E}{1 - \nu^2} \frac{1 + g_1}{1 - g_2} + \frac{1}{\sqrt{1 - \beta}} \frac{1}{1 + \mu_r k \delta} \left(\sigma - \frac{\chi B_{03}}{\mu_r} \right) \frac{\chi B_{03}}{\mu_0} \left(1 + \frac{\chi}{\mu_r} e_2 - \frac{\chi}{\mu_r} \frac{\lambda_2 e_1}{\lambda_3 + 2\mu} \right) \right] \right\}, \quad (1.2)$$

$$T = \frac{2\delta\chi^2 B_{03}^2}{\mu_0 \mu_r^2} \left\{ \left[\frac{\lambda_2 e_1}{\lambda_3 + 2\mu} - e_2 \right] \left[1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \beta}} \frac{1}{1 + \mu_r k \delta} \gamma \right] + \frac{1}{2} \frac{\nu}{1 - \nu} e_1 + \frac{1}{2} \left[\frac{5\mu_r}{1 + \mu_r k \delta} - 1 \right] e_2 \right\},$$

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad k^2 = k_1^2 + k_2^2,$$

$$A[\alpha] = (h - \delta)\alpha^{(1)} + \delta\alpha^{(2)},$$

где

$$\begin{aligned}
\sigma &= \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3 + 2\mu} f - g \right), & g &= -\frac{\chi^2 e_2}{\mu_r} B_{03}, & f &= -\frac{\chi^2 e_1 e_2}{\mu_r} B_{03}, \\
\lambda_1 &= \lambda - \frac{\chi^3 e_2^2}{\mu_0 \mu_r^2} B_{03}^2, & \lambda_2 &= \lambda - \frac{\chi^3 e_1 e_2}{\mu_0 \mu_r^2} B_{03}^2, & \lambda_3 &= \lambda - \frac{\chi^3 e_1^2}{\mu_0 \mu_r^2} B_{03}^2, \\
g_1 &= \frac{1+\nu}{E} \left[(1-\nu)(e_1^2 + e_2^2) - 2\nu e_1 e_2 \right] \frac{\chi^3}{\mu_0 \mu_r^2} B_{03}^2, \\
g_2 &= \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E} e_1^2 \frac{\chi^3}{\mu_0 \mu_r^2} B_{03}^2, \\
\lambda &= \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)}, & \mu &= \frac{E}{2(1+\nu)}, \\
\gamma &= 1 + \frac{5}{2} \frac{\chi}{\mu_r} + \frac{2}{\sqrt{1-\beta}} + \frac{1}{2} \frac{\chi^2 B_{03}^2}{\mu_0 \mu_r^2} \frac{\chi^2}{\mu_r} \frac{1}{\lambda_3 + 2\mu}, \\
\beta &= \frac{d_1}{\mu_0 \mu_r}, & d_1 &= -\frac{\chi^4 e_1^2}{\mu_r^2 (\lambda_3 + 2\mu)} B_{03}, & d_2 &= \frac{\chi^2}{\mu_r} \left[\frac{e_1 - e_2}{2} - \frac{\lambda e_1}{\lambda_3 + 2\mu} \right] B_{03}.
\end{aligned}$$

В (1.1) и (1.2) $w(x_1, x_2, t)$ – прогиб пластинки; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} N/A^2$ – магнитная константа; E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона, ρ – плотность, χ – магнитная восприимчивость, $\mu_r = \chi + 1$ – магнитная проницаемость, e_1 и e_2 – магнитострикционные постоянные материала магнитострикционного слоя, $E^{(1)}$ – модуль упругости; $\nu^{(1)}$ – коэффициент Пуассона внешних немагнитострикционных слоев пластинки, индексом (1) обозначены величины, относящиеся в внешним слоям, индексом (2) – к срединному слою пластинки; t – время, членом $2\rho h \varepsilon \partial w / \partial t$ учтено влияние сил внутреннего трения, где ε – коэффициент линейного затухания материала слоев. Здесь и в дальнейшем, если соответствие каких-либо величин и уравнений конкретному слою очевидно, будем записывать их, пропуская указанные индексы.

Задачи, аналогичные сформулированным выше краевым задачам, в которых присутствуют неизвестные волновые числа k_1 и k_2 , решены в [2, 4-6] путем применения асимптотического метода интегрирования [4, 5]. В результате в зависимости от граничных условий и форм колебаний получены соответствующие трансцендентные уравнения для определения k_1 и k_2 . Приведем указанные трансцендентные уравнения в случае сформулированной задачи при различных классических граничных условиях.

Пластинка жестко закреплена по контуру. Граничными условиями задач для рассматриваемого случая жесткого защемления являются [1, 3]:

$$\begin{aligned}
w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0 & \quad \text{при} \quad x_1 = 0, \quad x_1 = a_1, \\
w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x_2} = 0 & \quad \text{при} \quad x_2 = 0, \quad x_2 = a_2.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Тогда в зависимости от симметрии (по отношению к координатным осям $0x_1$ и $0x_2$) для определения k_1 и k_2 получены следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \frac{a_1 k_1}{2} &= -k_1 \left(k_1^2 + 2k_2^2 - \frac{T}{D_*} \right)^{-\frac{1}{2}}, \\ \operatorname{ctg} \frac{a_2 k_2}{2} &= -k_2 \left(2k_1^2 + k_2^2 - \frac{T}{D_*} \right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (1.4)$$

для симметричных в обоих направлениях форм колебаний, и

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{a_1 k_1}{2} &= k_1 \left(k_1^2 + 2k_2^2 - \frac{T}{D_*} \right)^{-\frac{1}{2}}, \\ \operatorname{tg} \frac{a_2 k_2}{2} &= k_2 \left(2k_1^2 + k_2^2 - \frac{T}{D_*} \right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (1.5)$$

для антисимметричных в обоих направлениях форм колебаний.

Для остальных смешанных форм колебаний уравнения относительно k_1 и k_2 получаются из приведенных комбинированием соответствующим образом одного из уравнений (1.4) с другим из (1.5).

Пластинка шарнирно закреплена по контуру. Граничные условия для рассматриваемого случая имеют вид [1, 3]:

$$\begin{aligned} w=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} &= 0 \quad \text{при} \quad x_1=0, \quad x_1=a_1, \\ w=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} &= 0 \quad \text{при} \quad x_2=0, \quad x_2=a_2. \end{aligned} \quad (1.6)$$

В этом случае для k_1 и k_2 получены выражения:

$$k_1 = \frac{m\pi}{a_1}, \quad k_2 = \frac{n\pi}{a_2}, \quad (m, n = 1, 2, 3, \dots). \quad (1.7)$$

Соответствующим образом, комбинируя приведенные уравнения (1.3)-(1.7), можно получить уравнения относительно k_1 и k_2 для других видов опорного закрепления. Например, если стороны $x_1=0$ и $x_1=a_1$ жестко защемлены, а стороны $x_2=0$ и $x_2=a_2$ шарнирно оперты, то в случае симметричных колебаний из (1.4) и (1.7) имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \frac{a_1 k_1}{2} &= -k_1 \left(k_1^2 + 2k_2^2 - \frac{T}{D_*} \right)^{-\frac{1}{2}}, \\ k_2 &= \frac{(2n-1)\pi}{2a_2}. \end{aligned}$$

На основе уравнения (1.1) и граничных условий (1.6) (шарнирно опертая прямоугольная пластинка) рассмотрим конкретные задачи с целью выявления эффектов, обусловленных взаимодействием пластинки и внешнего магнитного поля, а также неоднородного строения пластинки.

2. Собственные колебания. С учетом (1.7) решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям (1.6), представим в виде

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn}(t) \sin \lambda_m x_1 \sin \mu_n x_2, \quad (2.1)$$

$$\lambda_m = \frac{m\pi}{a_1}, \quad \mu_n = \frac{n\pi}{a_2}.$$

Подставляя (2.1) в уравнение (1.1), для определения неизвестных функций $f_{mn}(t)$ получим следующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{d^2 f_{mn}}{dt^2} + \varepsilon \frac{df_{mn}}{dt} + \Omega_{mn}^2 (1 - B_{mn}) f_{mn} = 0, \quad (2.2)$$

где

$$\Omega_{mn}^2 = \frac{D_*}{2A[\rho]} k_{mn}^4, \quad B_{mn} = \frac{T}{D_* k_{mn}^2}, \quad (2.3)$$

$$k_{mn}^2 = \lambda_m^2 + \mu_n^2, \quad \varepsilon = \frac{A[\varepsilon\rho]}{A[\rho]}.$$

Удовлетворяя уравнению (2.2) решением вида $f_{mn}(t) = A_{mn} \exp(s_{mn} t)$, находим характеристические числа s_{mn} , определяемые формулой

$$s_{mn} = -\frac{\varepsilon}{2} \pm \left[\left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^2 - \Omega_{mn}^2 (1 - B_{mn}) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.4)$$

Рассматривая (2.4), замечаем, что если величина магнитной индукции внешнего заданного магнитного поля удовлетворяет условию

$$B_{mn} < 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2\Omega_{mn}} \right)^2, \quad (2.5)$$

то затухание возмущений имеет колебательный характер с частотой

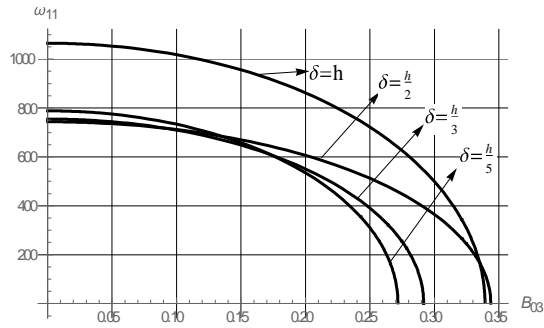
$$\omega_{mn} = \Omega_{mn} \left[1 - \left(\frac{\varepsilon}{2\Omega_{mn}} \right)^2 - B_{mn} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.6)$$

На основе формулы (2.6), при следующих исходных данных: $E^{(2)} = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$, $\nu^{(2)} = 0.33$, $\chi^{(2)} = 30$, $e_2 = 42$ (Ферроскуб 7А1), $a = 100h$, $b = a$, и, пренебрегая затуханием, произведены численные исследования зависимости ω_{11} от значения индукции B_{03} магнитного поля и от параметра δ/h (характеризующего неоднородность пластинки) при различных значениях геометрических параметров пластинки. Результаты расчетов приведены на рис. 1 для материала Текстолит ПТ, у которого $E_1 \approx E_2/2$, $\nu_1 = 0.28$) и на рис. 2 для стекла, у которого $E_1 \approx 2E_2$, $\nu_1 = 0.23$.

Рис. 1 показывает, что а) функция $\omega_{11}(B_{03})$ является монотонно убывающей и при определенном значении величины индукции B_{03} магнитного поля принимает нулевое значение, б) когда модуль упругости материала срединного слоя, обладающего магнитоупругими свойствами, меньше чем модуль упругости материала внешних слоев, то частота колебаний

слоистой пластинки существенно меньше, чем частота колебаний одно-
 слойной пластинки с материалом срединного слоя.

$$E^{(1)} < E^{(2)}$$



$$E^{(1)} > E^{(2)}$$

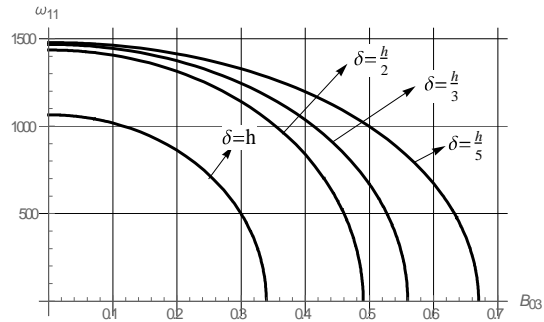


Рис. 1. Зависимость $\omega_{11}(B_{03})$ при разных значениях толщины магнестрикционного слоя.

В противном случае (в противоположном соотношении между моду-
 лями упругости) неоднородность приводит к существенному увеличению
 частоты.

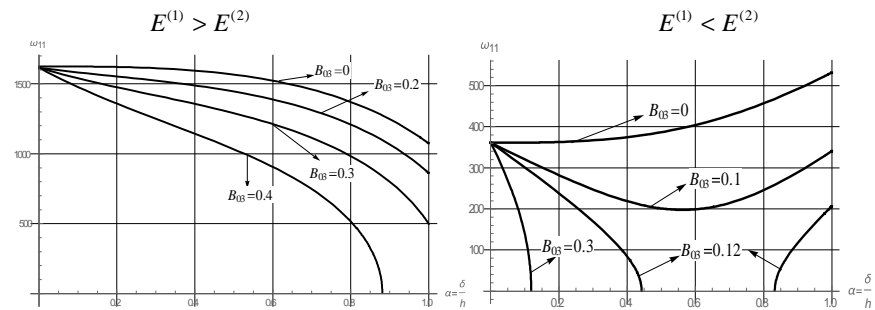


Рис.2. Зависимость $\omega_{11}(\delta/h)$ при разных значениях величины интенсивности магнитного поля

Рис. 2 показывает, что а) когда модуль упругости материала срединного слоя, обладающего магнитоотрицательными свойствами, меньше, чем модуль упругости материала внешних слоев, то функция $\omega_{11}(\delta/h)$ является монотонно убывающей функцией, более того, в зависимости от величины индукции магнитного поля, а также от знака и значений магнитоотрицательных констант срединного слоя пластинки она может не достичь нулевого значения; б) если модуль упругости материала срединного слоя, обладающего магнитоотрицательными свойствами, больше, чем модуль упругости материала внешних слоев, при отсутствии магнитного поля частота упругих колебаний монотонно возрастает с увеличением толщины магнитоотрицательного слоя; в) при больших значениях индукции магнитного поля с увеличением толщины магнитоотрицательного слоя частота магнитоупругих колебаний уменьшается, достигая нулевого значения, которое сохраняется в определенном интервале изменения параметра толщины магнитоотрицательного слоя δ/h , дальнейшее увеличение значения параметра δ/h приводит к резкому увеличению частоты колебаний слоистой пластинки; г) при «средних» значениях индукции магнитного поля частота магнитоупругих колебаний от параметра δ/h имеет экстремальный характер (существует точка минимума).

Отметим также, что все указанные явления обусловлены магнитоотрицательными свойствами материала срединного слоя и неоднородностью пластинки. Нужно отметить особо, что приведенная зависимость $\omega_{11}(\delta/h)$ в случае $E^{(1)} < E^{(2)}$ является аналогом зависимости $\omega_{11}(B_{03})$ в случае проводящих неферромагнитных пластин и оболочек [2, 7].

3. Возможность потери устойчивости. Рассматривая (2.4), замечаем, что при $B_{mn} > 1$ одно из двух характеристических чисел становится положительным, означающим потерю устойчивости пластинки. Условием устойчивости, очевидно, является $B_{mn} = 1$. Из этого условия в силу (2.3) для определения $B_{0*}(m, n)$ (где $B_{0*}(m, n)$ минимальное значение магнитной индукции заданного внешнего магнитного поля, при котором пластинка теряет устойчивость) получается следующее уравнение:

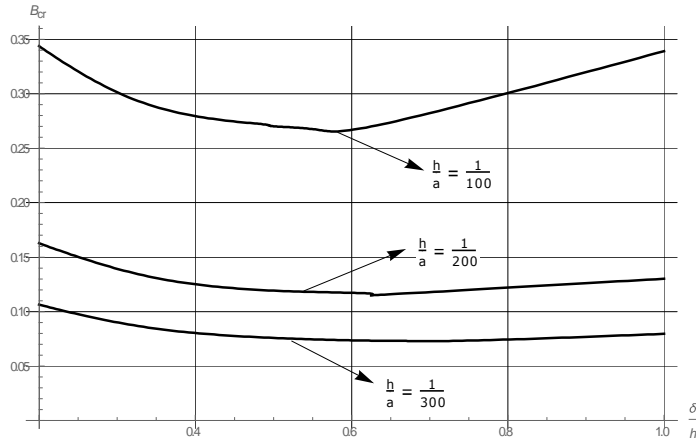
$$D_* k_{mn}^2 = T. \quad (3.1)$$

Вычисления показывают, что для основных магнитоотрицательных материалов минимальное значение $B_{0*}(m, n)$ достигается приближенно при $m = n = 1$. В силу этого, на основании (3.1) определены значения $B_{0*}(1, 1)$ в зависимости от физико-механических и геометрических параметров задачи. Численные исследования произведены при уже приведенных выше исходных данных с целью выявить: а) возможность потери устойчивости пластинки под действием магнитного поля; б) зависимость критического значения индукции магнитного поля от магнитоотрицательных свойств и неоднородности пластинки. Результаты приведены на рис. 3.

Рис.3 показывает, что а) если модуль упругости материала срединного слоя, обладающего магнитоотрицательными свойствами, больше,

чем модуль упругости материала внешних слоев, то критическое значение индукции магнитного поля в зависимости от параметра δ/h имеет экстремальный характер (функция $B_{0*}(\delta/h)$ имеет минимум); б) $B_{0*}(h/a)$ является монотонно убывающей функцией; в) если модуль упругости материала срединного слоя, обладающего магнитострикционными свойствами, меньше, чем модуль упругости материала внешних слоев, то критическое значение магнитного поля в зависимости от параметра δ/h имеет монотонно убывающий характер независимо от значения относительной толщины слоистой пластинки. Указанные результаты получены, когда $e_1 > 0$. Численные расчеты показывают также, что если $e_1 < 0$, то уравнение (3.1) не имеет действительных решений, т.е. при $e_1 < 0$ исключается возможность потери статической устойчивости.

$$E^{(1)} < E^{(2)}$$



$$E^{(1)} > E^{(2)}$$

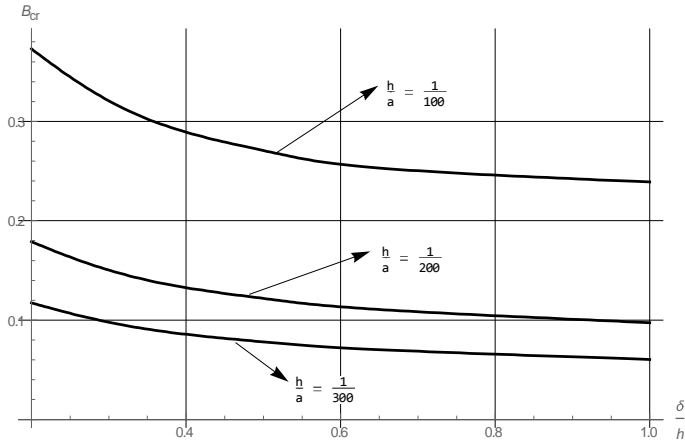


Рис. 3. Зависимость $B_{0*}(1,1)$ от параметра δ/h .

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 15Т-2С134.

¹Ереванский государственный университет

e-mail: gevorgb@rau.am, edan@ysu.am

²Российско-Армянский университет

e-mail: marine.mikilyan@rau.am

³ Институт механики НАН РА

Академик Г. Е. Багдасарян, Э. А. Даноян, М. А. Микилян

Колебания и статическая устойчивость трехслойных магнестрикционных пластин под действием магнитного поля

Исследованы вопросы колебания и статической устойчивости трехслойных магнестрикционных ферромагнитных пластин в постоянном поперечном магнитном поле. Путем решения конкретной задачи установлено, что благодаря магнестрикционному эффекту а) возможна потеря статической устойчивости пластинки под действием постоянного поперечного магнитного поля; б) при помощи магнитного поля можно существенно изменить величину частоты собственных колебаний. Исследовано также влияние неоднородности пластинки на рассматриваемые процессы.

**Ակադեմիկոս Գ. Ե. Բաղդասարյան, Է. Հ. Դանոյան,
Մ. Ա. Միկիլյան**

Մագնիսաստրիկցիոն եռաշերտ սալերի տատանումներն ու ստատիկական կայունությունը մագնիսական դաշտում

Հետազոտված են արտաքին հաստատուն ընդլայնական մագնիսական դաշտի ազդեցության տակ գտնվող եռաշերտ մագնիսաստրիկցիոն սալերի տատանումների և ստատիկական կայունության հարցերը: Որոշակի խնդրի լուծմամբ ցույց է տրված, որ սալի նյութի մագնիսաստրիկցիոն հատկությունների շնորհիվ՝ ա) ստատիկական կայունության կորստի հնարավորությունը մագնիսական դաշտի ազդեցության տակ, բ) մագնիսական դաշտի օգնությամբ հնարավոր է էապես փոխել սեփական տատանումների հաճախության մեծությունը: Հետազոտված է նաև սալի անհամասեռության ազդեցությունը դիտարկվող պրոցեսների վրա:

Academician G. Y. Baghdasaryan, E. H. Danoyan, M. A. Mikilyan

Vibrations and Static Stability of Three-Layered Magnetostrictive Plates under the Action of Magnetic Field

The issues of vibrations and static stability of three-layered magnetostrictive ferromagnetic plates in constant transversal magnetic field are studied. Having solved the certain problem it is established, that due to the magnetostrictive properties of plate material: a) it is possible the loss of static stability of the plate under the action of transversal constant magnetic field; b) with the help of magnetic field it is possible to

change essentially the value of the frequency of natural vibrations of the plate. The influence of heterogeneity of the plate on the examined processes is also studied.

Литература

1. *Багдасарян Г.Е., Даноян Э.А.* – Изв. НАН РА. Механика. 2018. Т. 71. N 1.
2. *Багдасарян Г.Е.* Колебания и устойчивость магнитоупругих систем. Ереван. Изд-во ЕГУ. 1999. 439 с.
3. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М. Физматгиз. 1963. 653 с.
4. *Болотин В. В., Макаров Б.П., Мищенко Г.В., Швейко Ю.Ю.* В кн.: Расчеты на прочность. Т. 6. М. Машгиз. 1960. С. 231-253.
5. *Багдасарян Г.Е.* – Мат. методы и физ.-мех. поля. 1986. N 24. С.72-75.
6. *Багдасарян Г.Е., Микилян М.А.* – Изв. НАН Армении, Механика, 1996, т. 49, N4, pp. 1-18.
7. *Baghdasaryan G., Mikilyan M.* Effects of Magnetoelastic Interactions in Conductive Plates and Shells. Springer. ISBN 978-3-319-19161-4. 2016. 289 p.