ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր
Том 118 2018 № 1
Volume

МЕХАНИКА

УДК 539.3

А. В. Геворкян

Поверхностные P-SV волны на границе раздела конечнопроводящих полупространств

(Представлено чл.-кор. НАН РА А.С. Аветисяном 15/I 2018)

Ключевые слова: *P-SV волны, конечнопроводящее полупространство, граница раздела, магнитное поле.*

Исследуется вопрос распространения магнитоупругих поверхностных типа P-SV волн на границе раздела двух конечнопроводящих полупространств с проскальзыванием при наличии внешнего постоянного магнитного поля, параллельного границе раздела.

Пусть упругие конечнопроводящие полупространства отнесены к прямоугольной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$: ось x_1 – направлена вдоль границы, ось x_2 – в глубь нижнего полупространства.

Начальное магнитное поле $\vec{H}_0 \equiv [0, 0, H_0]$ направлено по оси x_3.

Магнитные проницаемости материалов полупространств принимаются равными единице.

Учитывая, что в плоской деформации поле смещений и характеристики индуцированного электромагнитного поля имеют вид соответственно:

$$\vec{u} \equiv \left[u_1(x_1, x_2, t),\ \ u_2(x_1, x_2, t),\ 0\right],\ \vec{h} \equiv \left[0, 0, h_3(x_1, x_2, t)\right],$$
$$\vec{e} \equiv \left[e_1(x_1, x_2, t),\ \ e_2(x_1, x_2, t),\ 0\right].$$

Из системы линеаризованных уравнений магнитоупругости, описывающей поведение электромагнитного поля и движение проводящего упругого тела, при пренебрежении током смещения относительно тока проводимости получим следующую систему уравнений [1–3]:

$$\begin{gathered}
c_{tn}^2\nabla^2\vec{u}^{(n)} + \left(c_{ln}^2 - c_{tn}^2\right)\nabla\left(\nabla\cdot\vec{u}^{(n)}\right) + \frac{H_0}{4\pi\rho_n}\left(\nabla\times\vec{h}^{(n)}\right)x\vec{i}_3 = \partial_t^2\vec{u}^{(n)},\\
D_n\vec{h}^{(n)} = \frac{4\pi\sigma_n}{c^2}H_0\partial_t\left(\nabla x\left(\vec{i}_3\times\vec{u}^{(n)}\right)\right),\quad \nabla\cdot\vec{h}^{(n)} = 0, \qquad (1)\\
\nabla\times\vec{h}^{(n)} = \frac{4\pi\sigma_n}{c}\left(\vec{e}^{(n)} + \frac{1}{c}\partial_t\vec{u}^{(n)}\times\vec{H}_0\right),
\end{gathered}$$

$$\nabla\times\vec{e}^{(n)}=-\frac{1}{c}\partial_t\vec{h}^{(n)},$$

$$\nabla\equiv\vec{i}_1\partial_1+\vec{i}_2\partial_2,\quad \nabla^2\equiv\partial_1^2+\partial_2^2,\quad \partial_r\equiv\frac{\partial}{\partial x_r},\quad r=1,2,t,$$

$$n=\begin{cases}1, & x_2<0\\ 2, & x_2>0,\end{cases}$$

где $c_{ln}^2=\dfrac{\lambda_n+2G_n}{\rho_n}$, $\quad c_{tn}^2=\dfrac{G_n}{\rho_n}$ – квадрат скоростей продольных и поперечных волн материалов полупространств, λ_n и G_n – упругие постоянные, ρ_n, σ_n – соответственно плотность и удельная электропроводимость материалов полупространств, c – электродинамическая постоянная, $\vec{i}_p$ – единичный вектор оси x_p.

Представляя вектор смещения $\vec{u}^{(n)}$ через потенциальную и соленоидальную части [4]

$$\vec{u}^{(n)}=\nabla\varphi_n+\nabla\times\left(\psi_n\vec{i}_3\right),\tag{2}$$

после простых преобразований будем иметь

$$\nabla\left(\Box_{ln}\varphi_n-\frac{H_0}{4\pi\rho_n}h_3^{(n)}\right)+\nabla\times\left(\Box_{tn}\psi_n\vec{i}_3\right)=0,\tag{3}$$

$$\begin{gathered}D_n\vec{h}^{(n)}=-\frac{4\pi\sigma_n}{c^2}H_0\nabla\times\left(\nabla\times\varphi_n\vec{i}_3\right),\\ \Box_{ln}\equiv c_{ln}^2\nabla^2-\partial_t^2,\ \ \Box_{tn}\equiv c_{tn}^2\nabla^2-\partial_t^2,\Box_n\equiv\nabla^2-4\pi\sigma_n c^{-2}\partial_t,\end{gathered}\tag{4}$$

$n=1,2$ – свободный индекс.

Далее, применяя к уравнению операции div и rot и с учетом (4), приходим к разрешающим уравнениям для рассматриваемой задачи

$$\left(D_n\Box_{ln}-4\pi\sigma_n v_n^2 c^{-2}\partial_t\nabla^2\right)\varphi_n=0,\tag{5}$$

$$h_3^{(n)}=H_0 v_n^{-2}\Box_{ln}\varphi_n,\tag{6}$$

$$\Box_{tn}\psi_n=0,\quad v_n^2=\frac{H_0^2}{4\pi\rho_n},\quad n=1,2.\tag{7}$$

Граничные условия рассматриваемой задачи имеют вид:

$$\begin{gathered}u_2^{(1)}=u_2^{(2)}=0,\ \ G_1\left(\partial_2u_1^{(1)}+\partial_1u_2^{(1)}\right)=G_2\left(\partial_2u_1^{(2)}+\partial_1u_2^{(2)}\right)=0,\\ h_3^{(1)}=h_3^{(2)},\ e_1^{(1)}=e_1^{(2)},\ x_2=0.\end{gathered}\tag{8}$$

Решения уравнений (5) и (7) будем искать в виде

$$\varphi_n=A_n e^{k\eta_n x_2}\cdot e^{i(kx_1-\omega t)},\tag{9}$$

$$\psi_n=B_n e^{k\xi_n x_2}\cdot e^{i(kx_1-\omega t)},\quad n=1,2.\tag{10}$$

Подставляя (9), (10) в (5) и (7), приходим к соответствующим характеристическим уравнениям

$$\eta_n^4-\left[2-\alpha_n\left(1+s_n\right)z_n+z_n^2\right]\eta_n^2+\left(1-\alpha_n z_n\right)\left(1+z_n^2\right)-\alpha_n s_n z_n=0,\tag{11}$$

$$\xi_n^2-\left(1+c_{ln}^2\cdot c_{tn}^{-2}z_n^2\right)=0,$$
$$\alpha_n=\frac{4\pi\sigma_n c_{ln}}{kc^2},\quad z_n=\frac{i\omega}{kc_{ln}},\quad s_n=\frac{\mathrm{v}_n^2}{c_{ln}^2},\quad n=1,2. \tag{12}$$

Так как рассматриваются поверхностные волны, то из корней уравнений (11) и (12) выберем только те, которым соответствуют затухающие по глубине волны.

Тогда решения уравнений (5) и (7) запишутся в следующем виде:

$$\varphi_1=\left(A_+^+e^{k\eta_{1(+)}x_2}+A_-^+e^{k\eta_{1(-)}x_2}\right)e^{i(kx_1-\omega t)}, \tag{13}$$

$$\psi_1=D_1e^{k\xi_1x_2}e^{i(kx_1-\omega t)}, \tag{14}$$

$$\varphi_2=\left(B_+^-e^{-k\eta_{2(+)}x_2}+B_-^-e^{-k\eta_{2(-)}x_2}\right)e^{i(kx_1-\omega t)}, \tag{15}$$

$$\psi_2=D_2e^{-k\xi_2x_2}e^{i(kx_1-\omega t)}, \tag{16}$$

$$\eta_{n(\pm)}=\sqrt{\frac{2-\alpha_n(1+s_n)z_n+z_n^2}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{2-\alpha_n(1+s_n)z_n+z_n^2}{2}\right)^2-(1-\alpha_nz_n)\left(1+z_n^2\right)+\alpha_ns_nz_n}}, \tag{17}$$

$$\xi_n=\sqrt{1+c_{ln}^2\cdot c_{tn}^{-2}z_n^2}, \tag{18}$$

$$\operatorname{Re}\eta_{n(\pm)}>0,\quad \operatorname{Re}\xi_n>0,\quad n=1,2. \tag{19}$$

С другой стороны, исключение падающих волн на границе раздела конечнопроводящих полупространств приводит к следующим ограничениям:

$$\operatorname{Im}\eta_{n(\pm)}\le 0,\quad \operatorname{Im}\xi_n\le 0,\quad n=1,2. \tag{20}$$

Из (6) определяется индуцированное магнитное поле

$$h_3^{(1)}=s_1^{-1}k^2H_0\left(a_{1(+)}A_+^+e^{k\eta_{1(+)}x_2}+a_{1(-)}A_-^+e^{k\eta_{1(-)}x_2}\right)e^{i(kx_1-\omega t)}, \tag{21}$$

$$h_3^{(2)}=s_2^{-1}k^2H_0\left(a_{2(+)}B_+^-e^{k\eta_{2(+)}x_2}+a_{2(-)}B_-^+e^{-k\eta_{2(-)}x_2}\right)e^{i(kx_1-\omega t)}, \tag{22}$$

$$a_{1(\pm)}=\eta_{1(\pm)}^2-z_1^2-1,\quad a_{2(\pm)}=\eta_{2(\pm)}^2-z_2^2-1. \tag{23}$$

Подставляя выражения (13)–(16) и (21)–(22) в граничные условия (8), получим систему алгебрических однородных линейных уравнений для произвольных постоянных и из условия совместности этой системы – дисперсионное уравнение в следующем виде:

$$\frac{\eta_{1(+)}\eta_{1(-)}+z_1^2+1}{\eta_{1(+)}\eta_{1(-)}\left(\eta_{1(+)}+\eta_{1(-)}\right)}+\sigma_*\cdot\frac{\eta_{2(+)}\eta_{2(-)}+z_2^2+1}{\eta_{2(+)}\eta_{2(-)}\left(\eta_{2(+)}+\eta_{2(-)}\right)}=0, \tag{24}$$

$$z_2=\gamma_*\cdot z_1,\quad \gamma_*=\frac{c_{l1}}{c_{l2}},\quad \sigma_*=\frac{\sigma_2}{\sigma_1}=\gamma_*\cdot\frac{\alpha_2}{\alpha_1}.$$

Если материалы полупространств являются одинаковыми, то дисперсионное уравнение (24) записывается в форме [5]

$$\eta_+\cdot\eta_-+1+z^2=0,\quad z_1=z_2=z. \tag{25}$$

При $\sigma_*\ll 1$ уравнение (24) принимает вид

$$\eta_{1(+)}\cdot\eta_{1(-)}+1+z_1^2=0, \tag{26}$$

т.е. магнитоупругие поверхностные P-SV волны практически распространяются в верхнем полупространстве $x_2 < 0$, а в случае $\sigma_* \gg 1$–в нижнем полупространстве $x_2 > 0$

$$\eta_{2(+)} \cdot \eta_{2(-)} + 1 + z_2^2 = 0. \tag{27}$$

Подробное изучение уравнений (25)–(27), проведено в работе [6].

Дисперсионные уравнения (25)–(27) совпадают с аналогичным уравнением (13), полученным в [4–7] формальным переходом $c_{ln} \leftrightarrow c_{tn}$.

В заключение отметим, что при отсутствии внешнего магнитного поля с граничными условиями (8) поверхностные волны Рэлея для полупространства отсутствуют.

Институт механики НАН РА

А. В. Геворкян

Поверхностные P-SV волны на границе раздела двух конечнопроводящих полупространств

Исследуется вопрос распространения магнитоупругих поверхностных типа P-SV волн на границе раздела двух конечнопроводящих полупространств с проскальзыванием при наличии внешнего постоянного магнитного поля, параллельного границе раздела. Показано существование поверхностных типа P-SV волн.

Ա. Վ. Գևորգյան

Մակերևութային P-SV տիպի ալիքները վերջավոր հաղորդիչ կիսատարածությունների բաժանման եզրով

Դիտարկված է P-SV տիպի մակերևութային ալիքների տարածման հարցը սահող եզրերով վերջավոր հաղորդիչ կիսատարածություններում՝ բաժանման եզրին զուգահեռ արտաքին հաստատուն մագնիսական դաշտի առկայությամբ: Ցույց է տրված P–SV տիպի մակերևութային ալիքների գոյությունը:

A. V. Gevorgyan

Surface P-SV Waves on the Interface of Two Finite Conductive Semi-Spaces

The propogation of P-SV magnetoelastic surface waves on the sliding interface of two finite conductive semi-spaces is considered under the action of external constant magnetic field parallel to the interface. The existence of surface P-SV waves is shown.

Литература

1. *Новацкий В.* Теория упругости. М. Мир. 1975. 872 с.
2. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т.1. М. Наука. 1983. 492 с.
3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М. Наука. 1982. 624 с.
4. *Геворкян А.В.* - Изв. НАН РА. Механика. 2001. Т.54. №3. С. 26-31.
5. *Белубекян М.В.,Геворкян А.В.* – ДНАН РА. 1995. Т.95. №2. С. 86–88.
6. *Геворкян А.В.* – Изв. НАН РА. Механика. 1994. Т.47. №1–2. С. 44–52.
7. *Геворкян А. В.* В кн.: Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Труды VII междунар. конф., сентябрь 19–23. Горис–Степанакерт, 2011. С. 117-120.