ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 117 2017 № 4

МЕХАНИКА

УДК 539.3

М. В. Белубекян

О граничных условиях свободного края теории упругих пластин

(Представлено академиком С.А. Амбарцумяном 11/X 2017)

Ключевые слова: *упругая пластинка, свободная граница, колебания, самосопряженность.*

Введение. В последнее время появился ряд исследований по общей постановке теории устойчивости и колебаний упругих пластин, обзор которых приводится в статье [1]. В частности, в статье В.В.Васильева [2] показывается, что для прямоугольной пластинки с закрепленными и свободно опертыми краями в рамках теории Кирхгофа не имеет смысла использование понятия обобщенного перерезывающего усилия (ОПУ). Возникает вопрос – имеет ли смысл применять в этих задачах теории, учитывающие поперечные сдвиги? Можно ли в задачах со свободным краем применять теорию Кирхгофа с использованием условия равенства нулю ОПУ взамен двух условий – равенства нулю крутящего момента и перерезывающего усилия?

В теории пластин Кирхгофа граничные условия равенства нулю на свободном крае крутящего момента и перерезывающей силы заменяется одним условием – равенства нулю обобщенного перерезывающего усилия. Такое граничное условие, вместе с условием равенства нулю изгибающего момента, является также достаточным условием самосопряженности задач колебаний и устойчивости пластин. В настоящей статье предлагаются другие варианты граничных условий на свободном крае пластинки, удовлетворяющие требованию самосопряженности. Приводится сравнение для частных задач.

1. Постановка задачи. В теории пластин Кирхгофа предлагается три условия свободного края (равенство нулю изгибающего момента, крутящего момента, перерезывающей силы) заменить двумя – равенством нулю изгибающего момента и ОПУ. В частности, условие равенства нулю ОПУ появляется при требовании выполнения условия самосопряженности задачи свободных колебаний пластинки [3].

Пусть прямоугольная пластинка в прямоугольной декартовой системе координат Oxyz занимает область *0≤x≤a, 0≤y≤b, -h≤z≤h*. Уравнение свободных колебаний пластинки имеет вид [4]

$$D\Delta^2 w + 2\rho h \partial^2 \mathrm{w}/\partial t^2 = 0, \tag{1.1}$$

где

$$D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \tag{1.2}$$

– жесткость пластинки на изгиб, ρ – плотность материала пластинки, $w(x,y,t)$ – функция погиба. Предполагается, что три края пластинки свободно оперты

$$w = 0, \partial^2 \mathrm{w}/\partial x^2 = 0 \text{ при } x = a,$$
$$w = 0, \partial^2 \mathrm{w}/\partial y^2 = 0 \text{ при } y = 0, b. \tag{1.3}$$

Пусть край пластинки $x = a$ свободен и имеет место условие равенства нулю изгибающего момента (по Кирхгофу)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \tag{1.4}$$

Каким должно быть второе условие при $x = 0$, чтобы приведенная задача колебаний пластинки была самосопряженной?

Представляя решение уравнения (1.1) в виде ряда, удовлетворяющего граничным условиям при $y = 0$ из (1.3)

$$w = e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \sin \lambda_n y,\ \lambda_n = n\pi / b, \tag{1.5}$$

для функций $f_n(x)$ получим следующую последовательность задач: решить уравнения

$$L(f_n) = f_n^{IV} - 2\lambda_n^2 f_n^{II} + \lambda_n^4 (1+\eta_n^2) f_n = 0,$$
$$\eta_n^2 = 2ghD^{-1}\lambda_n^{-4} w^2 \tag{1.6}$$

с граничными условиями

$$f_n^{II} - \nu\lambda_n^2 f_n = 0, \mathrm{L}_0(f_u) = 0 \quad \text{при } x = 0,$$
$$f_n = 0,\ f_n^{II} = 0 \text{ при } x = a. \tag{1.7}$$

При этом требуется установить граничное условие при $L_0(f_n) = 0$ из равенства самосопряженности [3]

$$\int_0^a U_n L(f_n) dx = \int_0^a f_n L(U_n) dx, \tag{1.8}$$

где функции U_n удовлетворяют тем же граничным условиям (1.7), что и функции f_n.

Интегрирование по частям левой части равенства (1.8) и использование условий (1.7) дает

$$L_0(f_n) \equiv f_n^{III} - (2-\nu)\lambda_n^2 f_n^I = 0 \text{ при } x = 0. \tag{1.9}$$

С другой стороны, условие (1.9) получится, если требовать равенство нулю ОПУ в виде

$$\tilde{N}_x = -D\frac{\partial}{\partial x}[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}]. \tag{1.10}$$

2. Спрашивается, а почему нельзя принять на свободном краю условие равенства нулю перерезывающего усилия и определить второе условие из требования самосопряженности? Тогда второе условие будет типа обобщенного изгибающего момента. Или более обобщенно – можно взять условия на свободном крае в виде

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \alpha\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) = 0 \tag{2.1}$$

и требовать, чтобы α и β были определены из условия самосопряженности задачи для функций f_n из (1.5) и (1.6) с заменой условий на свободном крае в соответствии с (2.1).

$$f_n^{II} - \alpha\lambda_n^2 f_n = 0, \quad f_n^{III} - \beta\lambda_n^2 f^{I} = 0, \text{ при } x = 0. \tag{2.2}$$

Требование самосопряженности (1.8) приводит к условию относительно коэффициентов α и β

$$\beta = 2 - \alpha. \tag{2.3}$$

В частности, при $\alpha = \nu$ получаются общепринятые граничные условия равенства нулю изгибающего момента и ОПУ. Другой крайний случай $\alpha = 2$ дает равенство нулю “обобщенного” изгибающего момента и перерезывающего усилия.

Известная задача Коненкова [5] о локализованных колебаниях пластинки в окрестности свободного края полубесконечной пластинки-полосы исследовалась для случаая $\alpha = \nu$.

В случае произвольного α из (2.3) эта задача также приводит к решению уравнений (1.6) с условиями затухания на бесконечности

$$\lim \omega = 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} f_n = 0, \tag{2.4}$$

но с условиями

$$f_n^{II} - \alpha\lambda_n^2 f_n = 0, \quad f_n^{III} - (2-\alpha)\lambda_n^2 f^{I} = 0, \text{ при } x = 0. \tag{2.5}$$

Решение задачи приводит к уравнению Коненкова с заменой коэффициента Пуассона ν на α

$$P^2 + 2(1-\alpha)p - \alpha^2, \tag{2.6}$$

где

$$P = \sqrt{1-\eta_n^2}. \tag{2.7}$$

Уравнение (2.6) имеет решение, удовлетворяющее условию затухания $0 < \eta_n < 1$, если $-3 < \alpha < 0, 0 < \alpha < 1$.

При $\alpha = 0, \alpha = 3, \alpha = -3$ получается предельный случай $\eta_n = 1$.

Заключение. На основе принципа самосопряженности задач изгибных колебаний тонких пластин предлагаются новые варианты граничных условий для свободного края. Эти варианты являются обобщением условий равенства нулю изгибающего момента и обобщенного перерезывающего усилия.

Институт механики НАН РА
e-mail: mbelubekyan@yahoo.com

М. В. Белубекян

О граничных условиях свободного края теории упругих пластин

Вместо общепринятых граничных условий теории пластин Кирхгофа – Томсона – Тета предлагается новый вариант граничных условий. Доказывается самосопряженность задачи колебаний прямоугольной пластинки. Приводится сравнение результатов для разных вариантов граничных условий свободного края.

Մ. Վ. Բելուբեկյան

Առաձգական սալերի տեսության ազատ եզրի պայմանների մասին

Սալերի տեսության ընդունված Կիրհոֆ – Տոմսոն - Տէտեի եզրային պայմանների փոխարեն առաջարկվում է եզրային պայմանների նոր տարբերակ: Ապացուցվում է ուղղանկյուն սալերի տատանումների խնդրի ինքնահամալույծ լինելը: Ազատ եզրի տարբեր պայմանների արդյունքների համար բերված են համեմատություններ:

M. V. Belubekyan

On the Free Edge Boundary Conditions of the Elastic Plate Theory

A new version of the boundary conditions is suggested in the paper insted of the Kirchhoff-Thomson-Tait conditions in the elastic plate theory. The selfadyontess of the rectangular plate vibration problems is proved. The comparison of results is bringing for different version of the free edge boundary conditions.

Литература

1. *Elishakoff I., Kaprlunov J.* – Applied Mechanics Reviews. 2015. V. 67. 060802 – 1- 060-802-11 (November).

2. *Васильев В. В.* – Изв РАН. МТТ. 2012. N5. С. 98-107.
3. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения (с механическими приложениями) М. Наука. 1968. 504 с.
4. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. М. Наука. 1989. 360 с.
5. *Коненков Ю. К.* – Акуст. журн. 1960. Т. 6. N1. С. 124-126.