

где величины s_{im}^H , H_k^H и $M_i^H = \chi H_i^H$, отмеченные индексом “Н”, являются компонентами магнитоупругих напряжений, магнитного поля и намагниченности среды в невозмущенном состоянии, ρ_0 – плотность среды;

уравнения во внешней области

$$\operatorname{rot} \mathbf{h}^{(e)} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{b}^{(e)} = 0, \quad \mathbf{b} = \mu_0 \mathbf{h}^{(e)}, \quad (1.2)$$

где индекс е означает принадлежность к внешней среде;

граничные условия на свободной поверхности S_0 недеформированного тела

$$\begin{aligned} \left[s_{ik} + s_{mk}^H \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \right] N_k^0 &= [t_{ki}^{(e)} - t_{ki}] N_k^0 + [T_{km}^{H(e)} - T_{km}^H] \frac{\partial u_i}{\partial x_m} N_k^0, \\ [b_k - b_k^{(e)}] N_k^0 - [B_i^H - B_i^{H(e)}] \frac{\partial u_m}{\partial x_i} N_m^0 &= 0, \\ \epsilon_{nmk} \left\{ [h_n - h_n^{(e)}] N_m^0 - [H_n^H - H_n^{H(e)}] \frac{\partial u_i}{\partial x_m} N_i^0 \right\} &= 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где \mathbf{N}^0 – единичный вектор внешней нормали к поверхности S_0 ,

$$\begin{aligned} t_{ki} &= H_i^H b_k + h_i B_k^H - \mu_0 \delta_{ik} \mathbf{H}^H \cdot \mathbf{h}, \\ t_{ki}^{(e)} &= \mu_0 [H_k^{H(e)} h_i^{(e)} + h_k^{(e)} H_i^{H(e)} - \delta_{ki} \mathbf{H}^{H(e)} \cdot \mathbf{h}^{(e)}], \end{aligned} \quad (1.4)$$

$T_{km}^{H(e)}$ и T_{km}^H определяются согласно (1.8).

В уравнениях (1.1) использованы следующие приближенные выражения для тензоров:

$$\begin{aligned} \bar{c}_{ijkl} &= c_{ijkl}, \quad e_{ijk} = B_{ijkl} M_l^H, \quad g_{ikl} = B_{klri} M_r^H \\ c_{ijkl} &= \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{kj}), \quad A_{ik} = \chi^{-1} \delta_{ik}, \\ B_{ijkl} &= e_2 \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{e_1 - e_2}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \end{aligned} \quad (1.5)$$

где λ и μ – постоянные Ляме, $\chi = \mu_r - 1$ – магнитная восприимчивость, μ_r – относительная магнитная проницаемость, e_1 и e_2 – коэффициенты магнитострикции материала среды. В представлениях (1.5), имея в виду, что основных магнитострикционных материалов $30 < \chi < 10^4$, $5 < e_1 < 5 \cdot 10^2$, λ и $\mu \sim 10^{11} \text{ Н} / \text{м}^2$, $B \leq B_s \sim 2 \text{ Тл}$ (B_s – индукция насыщения), принято, что $\chi e_i \gg 1$ и $e_i B_s^2 (\mu_0 \lambda)^{-1} \ll 1$.

Рассматривая линеаризованные уравнения и соотношения (1.1) – (1.5), замечаем, что в коэффициенты этих выражений входят величины с индексом “н”, определяемые из линейных уравнений и граничных условий невозмущенного состояния. Эти уравнения и поверхностные условия также получены в работе [2] на основе следующих предположений: а) магнитное поле невозмущенного состояния совпадает с магнитным полем недеформированного тела; б) напряжения и деформации невозмущенного состоя-

ния можно определить из решения следующей статической задачи теории упругости:

уравнения равновесия

$$\frac{\partial s_{ik}^H}{\partial x_i} + \mu_0 M_n^H \frac{\partial H_k^H}{\partial x_n} = 0, \quad (1.6)$$

$$s_{ij}^H = c_{ijkl} \varepsilon_{kl}^H + \mu_0 A_{ik} M_j^H M_k^H + \frac{1}{2} \mu_0 B_{ijkl} M_k^H M_l^H;$$

условия на поверхности S_0 недеформированного тела

$$s_{ki}^H N_k^0 = [T_{ki}^{H(e)} - T_{ki}^H] N_k^0, \quad (1.7)$$

$$T_{ki}^{H(e)} = \mu_0 \left\{ H_k^{H(e)} H_i^{H(e)} - \frac{1}{2} \delta_{ik} [H^{H(e)}]^2 \right\}, \quad (1.8)$$

$$T_{ki}^H = H_i^H B_k^H - \frac{1}{2} \mu_0 \delta_{ik} (H^H)^2.$$

Входящие в (1.6) – (1.8) характеристики невозмущенного магнитного поля, согласно принятому предположению, определяются из следующей задачи магнитостатики для недеформированного тела:

уравнения магнитостатики во внутренней области

$$\text{rot } H^H = 0, \quad \text{div } B^H = 0, \quad (1.9)$$

$$B^H = \mu_0 (H^H + M_H), \quad H_k^H = A_{kl} M_l^H;$$

уравнения во внешней области

$$\text{rot } H_H^{(e)} = 0, \quad \text{div } H_H^{(e)} = 0, \quad (1.10)$$

$$M_H^{(e)} = 0, \quad B_H^{(e)} = \mu_0 H_H^{(e)};$$

условия сопряжения на поверхности S_0

$$[B_H - B_H^{(e)}] N_0 = 0, \quad [H_H - H_H^{(e)}] \times N_0 = 0 \quad (1.11)$$

и условия на бесконечности

$$H_H^{(e)} \rightarrow H_0 \quad \text{їдї} \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \rightarrow \infty. \quad (1.12)$$

Таким образом, вопрос исследования поведения возмущений магнитоупругих величин некоторого состояния сводится к поэтапному решению следующих трех задач:

- 1) определение характеристик магнитного поля недеформируемого тела на основе (1.9) – (1.12);
- 2) определение магнитоупругих величин невозмущенного состояния на основе (1.6) – (1.8) с использованием решения первой задачи;
- 3) исследование поведения магнитоупругих возмущений на основе (1.1) – (1.5) с использованием решения первых двух задач.

2. Уравнения и граничные условия плоских поверхностных волн.

Из приведенных уравнений и поверхностных условий выведем граничные

задачи, описывающие распространение двумерных поверхностных волн в магнестрикционном полупространстве при наличии внешнего постоянного магнитного поля, перпендикулярного к плоскости движения. Пусть упругая магнестрикционная среда занимает полубесконечную область $x_2 \leq 0$ (в декартовой системе координат x_1, x_2, x_3) и находится во внешнем постоянном магнитном поле с вектором индукции, направленной вдоль оси x_3 . Тогда задача (1.9)-(1.12) имеет следующее решение:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= B_0 \hat{\mathbf{e}}_3, & \mathbf{H} &= \mu_r B_0 \hat{\mathbf{e}}_3, \\ \mathbf{H} &= \mu_0^{-1} \mathbf{H}^{(e)}, & \mathbf{H} &= (\mu_0 \mu_r)^{-1} \mathbf{H}^{(e)}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\hat{\mathbf{e}}_k$ – единичные векторы координатных осей, B_0 – заданная индукция внешнего магнитного поля в вакууме при отсутствии ферромагнитной среды.

Задачу будем решать в двумерной постановке, предполагая, что все искомые величины не зависят от координаты x_3 . Тогда из уравнений $\text{rot } \mathbf{h} = 0$, $\text{rot } \mathbf{h}^{(e)} = 0$, и последнего условия из (1.3) легко получить, что $h_3^{(e)} = h_3 = 0$. Кроме того, поскольку \mathbf{H} параллельна границе полупространства, то из решений (2.1) задачи (1.2)-(1.12) следует, что

$$M_i^H \frac{\partial H_k^H}{\partial x_i} \equiv 0, \quad \left[T_{ki}^{H(e)} - T_{ki}^H \right] N_k^0 \Big|_{s_0} = 0.$$

Следовательно, магнитные объемные и поверхностные силы невозмущенного состояния равны нулю, и поэтому задача (1.6)-(1.8) имеет нулевое решение: $\sigma_{ij}^H \equiv 0$. Учитывая сказанное, из (1.1) и (1.5) в силу (2.1) и принятого предположения о двумерности движения получим следующие уравнения, описывающие распространение двумерных волн в магнестрикционной среде:

уравнения относительно $u_i(x_1, x_2, t)$ ($i = 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned} (\bar{\lambda} + 2\mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + (\bar{\lambda} + \mu) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} &= \rho_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \\ (\bar{\lambda} + 2\mu) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + (\bar{\lambda} + \mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} &= \rho_0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}; \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{cases} \bar{\mu} \Delta u_3 = \rho_0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \\ \Delta \varphi = \frac{\chi}{\mu_r} M_3 \frac{e_1 - e_2}{2} \Delta u_3, & \Delta \varphi^{(e)} = 0, \\ h_k = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}, & h_k^{(e)} = \frac{\partial \varphi^{(e)}}{\partial x_k}, \end{cases} \quad (2.3)$$

где

$$\bar{\lambda} = \lambda - \mu_0 \chi M_3^2 e_2^2, \quad \bar{\mu} = \mu - \mu_0 M_3^2 \frac{\chi}{\mu_r} \left(\frac{e_1 - e_2}{2} \right)^2,$$

φ и $\varphi^{(e)}$ – потенциалы индуцированного магнитного поля в области вакуума и в среде соответственно, Δ – двумерный оператор Лапласа.

Аналогичным образом из (1.3) получаются следующие граничные условия на плоскости $x_2 = 0$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} &= 0, \\ \bar{\lambda} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) + 2\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \varphi^{(e)}, \quad \frac{\partial \varphi^{(e)}}{\partial x_2} = \mu_r \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \chi M_3 \frac{e_1 - e_2}{2} \frac{\partial u_3}{\partial x_2}, \\ \left[\mu - \mu_0 \chi M_3^2 \left(\frac{e_1 - e_2}{2} \right)^2 \right] \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \mu_0 \chi M_3 \frac{e_1 - e_2}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Из (2.2) – (2.6) следует, что: а) задача (2.2), (2.5) (плоская задача для определения u_1 и u_2 или задача распространения магнитоупругих волн Рэлея) отделена от задачи (2.3), (2.6) (антиплоская задача для определения u_3 , φ , $\varphi^{(e)}$ или задача распространения магнитоупругих сдвиговых поверхностных волн); б) существование сдвиговой поверхностной волны обусловлено исключительно учетом магнитострикционного эффекта (вспомним, что при отсутствии магнитного поля чисто упругая сдвиговая поверхностная волна не существует [2,3]).

В дальнейшем приводятся исследования, относящиеся только к существованию и характеру распространения магнитоупругих сдвиговых поверхностных волн.

3. Сдвиговые поверхностные магнитоупругие волны. На основе уравнений (2.3) и граничных условий (2.6) рассмотрим вопросы существования и распространения сдвиговых поверхностных волн. Для этой цели решение указанной граничной задачи представим в виде

$$\begin{aligned} u_3 &= w(x_2) e^{i(kx_1 - \omega t)}, \\ \varphi &= \varphi_0(x_2) e^{i(kx_1 - \omega t)}, \\ \varphi^{(e)} &= \varphi_0^{(e)}(x_2) e^{i(kx_1 - \omega t)}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $w(x_2)$, $\varphi_0(x_2)$, $\varphi_0^{(e)}$ – неизвестные функции, подлежащие определению.

Подставляя (3.1) в первое уравнение системы (2.3), получим уравнение относительно неизвестной функции $w(x_2)$:

$$\frac{d^2 w}{dx_2^2} - (k^2 - k_3^2) w = 0, \quad (3.2)$$

где

$$k_3 = \frac{\omega}{c_2}, \quad c_2^2 = \frac{\bar{\mu}}{\rho_0}.$$

В соответствии с условием на бесконечности ($x_2 \rightarrow -\infty$) необходимо, чтобы

$$\beta^2 = k^2 - k_3^2 > 0. \quad (3.3)$$

Из условия (3.3) следует, что величина c фазовой скорости ($c = \omega k^{-1}$) сдвиговой поверхностной волны (если она существует) должна быть меньше модуля скорости объемных поперечных магнитоупругих волн ($c < \bar{c}_2 < c_2$).

Находя общее решение уравнения (3.2) и требуя, чтобы $u_3(x_1, x_2, t)$ описывало поверхностную волну, получим представление для перемещения $u_3(x_1, x_2, t)$

$$u_3(x_1, x_2, t) = A e^{\beta x_2} e^{i(kx_1 - \omega t)}, \quad (3.4)$$

где A – произвольная постоянная.

В силу (3.4) из второго уравнения системы (2.3) получим неоднородное дифференциальное уравнение относительно $\Phi_0(x_2)$:

$$\frac{d^2 \Phi_0}{dx_2^2} - k^2 \Phi_0 = \Phi_0 e^{\beta x_2}, \quad (3.5)$$

где

$$\Phi_0 = -M_3 \frac{\chi}{\mu_r} \frac{e_1 - e_2}{2} k_3^2 A.$$

Находя общее решение уравнения (3.5) и удовлетворяя условию на бесконечности, получим следующее представление для потенциальной функции $\Phi(x_1, x_2, t)$:

$$\Phi(x_1, x_2, t) = \left[B e^{kx_2} + \frac{\chi}{\mu_r} M_3 \frac{e_1 - e_2}{2} A e^{\beta x_2} \right] C e^{i(kx_1 - \omega t)}, \quad (3.6)$$

где B – произвольная постоянная.

Наконец решение последнего уравнения из (2.3), удовлетворяющего условию на бесконечности, имеет вид:

$$\Phi^{(e)}(x_1, x_2, t) = C e^{-kx_2} e^{i(kx_1 - \omega t)}, \quad (3.7)$$

C – произвольная постоянная.

Удовлетворяя граничным условиям (2.6), получим линейную систему однородных алгебраических уравнений относительно A, B, C . Из условия совместности этой системы получается характеристическое уравнение

$$\left[1 - \frac{\mu \theta}{\mu - \delta} \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\chi \delta}{\mu - \delta}, \quad (3.8)$$

$$\delta = \mu_0 M_3^2 \frac{\chi}{\mu_r} \left(\frac{e_1 - e_2}{2} \right)^2,$$

определяющее безразмерную фазовую скорость $\theta = c_2^{-2} C^2$ поверхностной волны.

В уравнении (3.8) параметр δ характеризует намагниченность среды и при $\delta = 0$ имеем $\theta = 1$, что не удовлетворяет необходимому условию (3.3) существования сдвиговой поверхностной волны. Если же $\delta > 0$, то

уравнение будет иметь действительное положительное решение, удовлетворяющее условию на бесконечности только в том случае, когда

$$\delta < \mu \mu_r^{-1}. \quad (3.9)$$

Учитывая (3.9), из уравнения (3.8) получаем формулу:

$$C = C_2 \left[1 - \frac{\delta}{\mu} \left(1 + \frac{\chi^2 \delta}{\mu - \delta} \right) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.10)$$

определяющую скорость распространения сдвиговой поверхностной волны в магнитострикционном полупространстве, если среда находится в нормальном относительно плоскости движения магнитном поле. Из формулы (3.10) видно, что с увеличением интенсивности поляризирующего магнитного поля величина скорости распространения сдвиговой поверхностной волны уменьшается.

Для определенности отметим, что для основных (отмеченные в пункте 1) магнитострикционных материалов условие (3.9) выполняется вплоть до $M_3 = M_s$.

Используя (3.3), легко получить формулу, определяющую глубину проникания $\gamma = \beta^{-1}$ поверхностной волны в полупространство

$$\gamma = \frac{1}{k} \left[1 - \frac{\mu \theta}{\mu - \delta} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.11)$$

Используя (3.10), из (3.11) получим окончательную формулу, определяющую зависимость глубины проникания поверхностной волны от величины вектора намагничивания:

$$\gamma = \frac{1}{k} \frac{\mu - \delta}{\chi \delta}. \quad (3.12)$$

Формула (3.12) показывает, что глубина проникания пропорциональна длине волны и уменьшается с увеличением величины напряженности внешнего магнитного поля. Следовательно, существенная локализация волны у поверхности среды происходит в случае коротких волн, и это явление усиливается с увеличением интенсивности магнитного поля.

Ереванский государственный университет
Институт механики НАН РА

Академик Г. Е. Багдасарян

Существование и характер распространения сдвиговых поверхностных волн в магнитострикционном полупространстве

Известно, что в упругой среде при отсутствии магнитного поля сдвиговые поверхностные волны не могут распространяться, а поверхностные волны Рэлея

при указанных условиях всегда существуют. Известно также, что в магнитомягком ферромагнитном полупространстве (материал которого не обладает магнитострикционными свойствами) при распространении в нем рэлеевской волны, как следствие, возбуждается сдвиговая поверхностная волна, если присутствует наклонное к плоскости движения магнитное поле. В настоящей работе установлено, что в магнитострикционном полупространстве независимо друг от друга могут распространяться рэлеевские и сдвиговые поверхностные волны, если присутствует перпендикулярное к плоскости движения магнитное поле. Более того, существование сдвиговой поверхностной волны обусловлено исключительно учетом магнитострикционного эффекта.

Ակադեմիկոս Գ. Ե. Բաղդասարյան

Սահքի մակերևութային ալիքների գոյությունը և տարածման բնույթը մագնիսաստրիկցիոն կիսատարածությունում

Հայտնի է, որ առաձգական միջավայրում մագնիսական դաշտի բացակայության դեպքում սահքի մակերևութային ալիքներ տարածվել չեն կարող, իսկ նշված պայմաններում Ռեյլեյի ալիքներ միշտ գոյություն ունեն: Հայտնի է նաև, որ մագնիսապես փափուկ ֆերոմագնիսական կիսատարածությունում (որի նյութն օժտված չէ մագնիսաստրիկցիոն հատկություններով) Ռեյլեյի ալիքի տարածման ժամանակ որպես հետևանք գրգռվում է սահքի մակերևութային ալիք, եթե առկա է շարժման հարթությանը թեք մագնիսական դաշտ: Այս աշխատանքում ցույց է տրված, որ մագնիսաստրիկցիոն կիսատարածությունում իրարից անկախ կարող են տարածվել Ռեյլեյի և սահքի մակերևութային ալիքներ՝ շարժման հարթությանն ուղղահայաց մագնիսական դաշտի առկայության դեպքում: Ավելին, սահքի մակերևութային ալիքի գոյությունը բացառապես պայմանավորված է կիսատարածության մագնիսաստրիկցիոն հատկություններով:

Academician G. Y. Baghdasaryan

Existence and Propagation Character of Shear Surface Waves in Magnetostrictive Half-Space

It is known that shear surface waves cannot propagate in elastic media in the absence of a magnetic field, and Rayleigh surface waves always exist under the indicated conditions. It is also known that in a magnetosoft ferromagnetic half-space (the material of which does not possess magnetostrictive properties) at Rayleigh waves propagation, as a result, shear surface wave generates in presence of inclined to the motion surface magnetic field]. It is established that Rayleigh and shear surface waves can propagate independently of each other in a magnetostrictive half-space, if there is a magnetic field perpendicular to the plane of motion. Moreover, the existence of a shear surface wave is caused solely by the magnetostrictive effect.

Литература

1. *Багдасарян Г.Е.* – Изв. НАН Армении. Механика. 2009. Т. 43. N 2. С. 38-43.
2. *Багдасарян Г.Е.* – Мат. методы и физико-механические поля. 1998. Т. 41. N 3. С. 70-75.
3. *Новацкий В.* Теория упругости. М. Мир. 1987. 872 с.