ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր / Том / Volume 117 2017 № 2

МЕХАНИКА

УДК 539.3

А. А. Саркисян[1], член-корреспондент НАН РА С. О. Саркисян[1], Л. И. Маневич[2], С. А. Тиман[2]

Модель ортотропной тонкой пластинки по моментной теории со стесненным вращением с приложениями к полимерным материалам

(Представлено 6/IV 2017)

Ключевые слова: *модель, тонкая пластинка, моментная теория, полимеры.*

Введение. Задача о количественной связи макроскопических механических свойств твёрдых тел с параметрами их микроструктуры, является основной в структурной механике [1, 2]. Соответственно, одной из главных задач микроскопической теории является вывод феноменологической (континуальной) теории [1]. В работе [3] на основе молекулярной модели кристалла полиэтилена построена трехмерная континуальная модель этого кристалла. В работе [4] показано, что эта модель соответствует моментной (микрополярной, несимметричной) теории упругости со стеснённым вращением для ортотропного тела. В работах [5, 6] определены все упругие постоянные континуальной моментной теории упругости кристаллического полиэтилена.

В данной работе на основе континуальной моментной теории полиэтилена построена математическая модель тонкой пластинки из такого материала.

1. Постановка задачи. Основные уравнения феноменологической моментной теории упругости со стеснённым вращением, наиболее точно описывающие упругие деформации кристалла полиэтилена, имеют вид [4]:

Уравнения равновесия (движения)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3}=0\quad\left(\rho\frac{\partial^2V_1}{\partial t^2}\right), &&\frac{\partial\mu_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial\mu_{31}}{\partial x_3}+\sigma_{23}-\sigma_{32}=0,\\
&\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_3}=0\quad\left(\rho\frac{\partial^2V_2}{\partial t^2}\right), &&\frac{\partial\mu_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial\mu_{32}}{\partial x_3}+\sigma_{31}-\sigma_{13}=0,\\
&\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3}=0\quad\left(\rho\frac{\partial^2V_3}{\partial t^2}\right), &&\frac{\partial\mu_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu_{23}}{\partial x_2}+\frac{\partial\mu_{33}}{\partial x_3}+\sigma_{12}-\sigma_{21}=0.
\end{aligned}\tag{1}$$

Определяющие (физические) соотношения

$$\varepsilon_{11}=\frac{1}{E_1}\sigma_{11}-\frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_{22}-\frac{\nu_{31}}{E_3}\sigma_{33},\quad \varepsilon_{13}=\varepsilon_{31}=\frac{\sigma_{13}+\sigma_{31}}{2c_{13}^{13}},$$
$$\varepsilon_{22}=-\frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_{11}+\frac{1}{E_2}\sigma_{22}-\frac{\nu_{32}}{E_3}\sigma_{33},\ \varepsilon_{23}=\varepsilon_{32}=\frac{\sigma_{23}+\sigma_{32}}{2c_{23}^{23}},\tag{2}$$
$$\varepsilon_{33}=-\frac{\nu_{13}}{E_1}\sigma_{11}-\frac{\nu_{23}}{E_2}\sigma_{22}+\frac{1}{E_3}\sigma_{33},\ \varepsilon_{12}=\varepsilon_{21}=\frac{\sigma_{12}+\sigma_{21}}{2c_{12}^{12}},$$

$$\chi_{11}=\frac{\mu_{11}}{2\gamma},\quad \chi_{22}=\frac{\mu_{22}}{2\gamma},\quad \chi_{33}=\frac{\mu_{33}}{2\gamma},$$
$$\chi_{21}=\frac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{21}-\frac{\gamma-\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{12},\quad \chi_{12}=\frac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{12}-\frac{\gamma-\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{21},$$
$$\chi_{31}=\frac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{31}-\frac{\gamma-\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\ \mu_{13},\quad \chi_{13}=\frac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{13}-\frac{\gamma-\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{31},\tag{3}$$
$$\chi_{32}=\frac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{32}-\frac{\gamma-\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{23},\quad \chi_{23}=\frac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{23}-\frac{\gamma-\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{32}.$$

Геометрические соотношения

$$\varepsilon_{11}=\frac{\partial V_1}{\partial x_1},\quad \varepsilon_{22}=\frac{\partial V_2}{\partial x_2},\quad \varepsilon_{33}=\frac{\partial V_3}{\partial x_3},$$
$$\varepsilon_{12}=\frac{\partial V_2}{\partial x_1}+\frac{\partial V_1}{\partial x_2},\quad \varepsilon_{13}=\frac{\partial V_1}{\partial x_3}+\frac{\partial V_3}{\partial x_1},\quad \varepsilon_{23}=\frac{\partial V_3}{\partial x_2}+\frac{\partial V_2}{\partial x_3},\tag{4}$$

$$\chi_{11}=\frac{\partial\omega_1}{\partial x_1},\quad \chi_{22}=\frac{\partial\omega_2}{\partial x_2},\ \chi_{33}=\frac{\partial\omega_3}{\partial x_3},\ \chi_{12}=\frac{\partial\omega_2}{\partial x_1},\ \chi_{21}=\frac{\partial\omega_1}{\partial x_2},$$
$$\chi_{13}=\frac{\partial\omega_3}{\partial x_1},\quad \chi_{31}=\frac{\partial\omega_1}{\partial x_3},\quad \chi_{23}=\frac{\partial\omega_3}{\partial x_2},\quad \chi_{32}=\frac{\partial\omega_2}{\partial x_3},\quad \vec{\omega}=\frac{1}{2}rot\vec{V},\tag{5}$$

$$\omega_1=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_3}{\partial x_2}-\frac{\partial V_2}{\partial x_3}\right),\ \omega_2=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_1}{\partial x_3}-\frac{\partial V_3}{\partial x_1}\right),\quad \omega_3=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1}-\frac{\partial V_1}{\partial x_2}\right).\tag{6}$$

Здесь (V_1,V_2,V_3) – компоненты вектора перемещения; $(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ – компоненты вектора вращения; $\varepsilon_{11},\varepsilon_{22},\varepsilon_{33},\varepsilon_{12},\varepsilon_{13},\varepsilon_{23}$ – компоненты тензора деформации; $\chi_{11},\chi_{22},\chi_{33},\chi_{12},\ \chi_{21},\chi_{13},\chi_{23},\chi_{31},\chi_{32}$ – компоненты тензора изгибов-кручений; $\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{33},\sigma_{12},\sigma_{21},\sigma_{13},\ \sigma_{31},\sigma_{23},\ \sigma_{32}$ – компоненты тензора силовых напряжений; $\mu_{11},\mu_{22},\mu_{33},\mu_{12},\ \mu_{21},\mu_{13},\mu_{31},\mu_{23},\mu_{32}$ – компоненты тензора моментных напряжений; $E_1,E_2,E_3,\nu_{21},\nu_{12},\nu_{31},\nu_{13},\nu_{23},\nu_{32},\gamma,\varepsilon$ или $c_{11}^{11},c_{22}^{11},$ $c_{33}^{11},c_{22}^{22},c_{33}^{22},c_{33}^{33},c_{13}^{13},c_{23}^{23},c_{12}^{12},\gamma,\varepsilon$ – упругие коэффициенты ортотропного материала; ρ – плотность материала.

Будем считать, что тело имеет форму пластинки толщиной $2h$. Координатная плоскость x_1x_2 расположим в срединной плоскости пластинки.

Будем считать, что на лицевых плоскостях $(x_3 = \pm h)$ заданы значения напряжений $\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}, \mu_{31}, \mu_{32}$, а на боковой поверхности, в общем случае, могут быть заданы: либо напряжения (силовые и моментные), либо перемещения и повороты, либо смешанные условия.

В случае динамической задачи будем считать заданными значения $V_1, V_2, V_3, \frac{\partial V_1}{\partial t}, \frac{\partial V_2}{\partial t}, \frac{\partial V_3}{\partial t}$ при $t = 0$.

Нашей целью является построение прикладной теории изгиба пластинки, считая, что пластинка тонкая. Отметим, что в задаче изгиба пластинки V_3, ω_1, ω_2 – четные по x_3 функции, а V_1, V_2, ω_3 – нечетные по x_3 функции.

Итак, рассмотрим задачу построения прикладной теории изгиба ортотропной пластинки по указанной трехмерной моментной теории упругости со стесненным вращением.

2. Основные гипотезы. Перемещения и повороты; деформации, изгиб-кручения; силовые и моментные напряжения. Примем следующие достаточно общие гипотезы [7]:

1) кинематическую гипотезу Тимошенко: в процессе деформации первоначально прямолинейные и нормальные к срединной плоскости волокна свободно поворачиваются в пространстве как жесткое целое на некоторый угол, не изменяя при этом своей длины и не оставаясь перпендикулярными к деформированной срединной плоскости.

Запишем принятую гипотезу математически: тангенциальные перемещения распределены по толщине пластинки по линейному закону, а нормальное перемещение не зависит от поперечной координаты x_3, т. е.

$$v_1 = x_3 \psi_i(x_1, x_2, t), \quad i = 1,2; \qquad v_3 = w(x_1, x_2, t). \tag{7}$$

В этом случае для углов вращения точек тела получим

$$\begin{aligned} &\omega_1 = \Omega_1(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2} - \psi_2\right), \qquad \omega_2 = \Omega_2(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2}\left(\psi_1 - \frac{\partial w}{\partial x_1}\right), \\ &\omega_3 = x_3 \iota(x_1, x_2, t), \qquad \iota = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}\right); \end{aligned} \tag{8}$$

2) силовым напряжением σ_{33} в обобщенном законе Гука для $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$ можно пренебречь относительно силовых напряжений σ_{11}, σ_{22};

3) в выражении для χ_{13} (из (3)) перенебрегаем моментным напряжением μ_{31} относительно μ_{13};

4) предполагаем, что пластинка тонкостенная (т.е. примем следующее приближенное равенство: $1 + \frac{2h}{a} \approx 1$, где $2h$ – толщина пластинки, a – линейный наименьший размер пластинки в плане);

5) для определения деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений, для силовых напряжений σ_{3i} $(i = 1,2)$ примем:

$$\sigma_{3i} = \overset{0}{\sigma}_{31}(x_1, x_2, t) \quad (\mathrm{i} = 1,2). \tag{9}$$

После определения указанных величин значения σ_{3i} $(\mathrm{i}=1,2)$ окончательно определим, соответственно, как сумму значения (9) и результата интегрирования первого и второго из (1) уравнений равновесия (движения), для каждого из этих интегралов потребуется условие, чтобы усредненная по толщине пластинки величина была равна нулю.

Изучение изгиба микрополярной упругой ортотропной пластинки на основе принятых выше гипотез начнем с определения компонентов тензоров деформаций и изгибов-кручений.

Исходя из формул для перемещений (7) и поворотов (8), используя выражения (4) и (5) для компонентов тензоров деформаций и изгибов-кручений, имеем:

$$\begin{gathered}\varepsilon_{11}=x_3K_{11},\quad \varepsilon_{22}=x_3K_{22},\quad \varepsilon_{12}=x_3K_{12},\quad \varepsilon_{13}=\Gamma_{13},\quad \varepsilon_{23}=\Gamma_{23},\quad \varepsilon_{33}=0,\\ \chi_{11}=k_{11},\quad \chi_{22}=k_{22},\quad \chi_{12}=k_{12},\quad \chi_{21}=k_{21},\quad \chi_{13}=x_3l_{13},\quad \chi_{23}=x_3l_{23},\\ \chi_{31}=0,\quad \chi_{32}=0,\end{gathered}\tag{10}$$

где приняты следующие обозначения

$$\begin{gathered}K_{11}=\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1},\;K_{22}=\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2},\;K_{12}=K_{21}=\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}+\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2},\quad \Gamma_{13}=\psi_1+\frac{\partial w}{\partial x_1},\quad \Gamma_{23}=\psi_2+\frac{\partial w}{\partial x_2},\\ k_{11}=\frac{\partial\Omega_1}{\partial x_1},\quad k_{22}=\frac{\partial\Omega_2}{\partial x_2},\quad k_{12}=\frac{\partial\Omega_2}{\partial x_1},\quad k_{21}=\frac{\partial\Omega_1}{\partial x_2},\quad l_{13}=\frac{\partial\iota}{\partial x_1},\quad l_{23}=\frac{\partial\iota}{\partial x_2},\quad k_{33}=\iota.\end{gathered}\tag{11}$$

Теперь перейдем к исследованию силовых и моментных напряжений в пластинке.

При помощи формул (9), используя гипотезы 2), 4) и выражения обобщенного закона Гука (2), (3), для силовых и моментных напряжений получим

$$\sigma_{11}=x_3\frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\left(K_{11}+\nu_{21}K_{22}\right),\quad \sigma_{22}=x_3\frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\left(K_{22}+\nu_{12}K_{11}\right),\tag{12}$$

$$\sigma_{12}+\sigma_{21}=2G_{12}x_3K_{12},\qquad \sigma_{13}+\overset{0}{\sigma}_{31}=2G_{13}\Gamma_{13},\qquad \sigma_{23}+\overset{0}{\sigma}_{32}=2G_{23}\Gamma_{23},\tag{13}$$

$$\begin{gathered}\mu_{11}=2\gamma k_{11},\quad \mu_{22}=2\gamma k_{22},\;\mu_{33}=2\gamma k_{33},\quad \mu_{21}=(\gamma+\varepsilon)k_{21}+(\gamma-\varepsilon)k_{12},\\ \mu_{12}=(\gamma+\varepsilon)k_{12}+(\gamma-\varepsilon)k_{21},\quad \mu_{13}=x_3\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{13},\;\mu_{23}=x_3\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{23},\end{gathered}\tag{14}$$

$$\sigma_{33}=-x_3\left[\left(\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2}\right)-\rho\frac{\partial^2w}{\partial t^2}\right],\tag{15}$$

$$\sigma_{31}=\overset{0}{\sigma}_{31}+\left(\frac{h^2}{6}-\frac{x_3^2}{2}\right)\left(\frac{\partial\overset{1}{\sigma}_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\overset{1}{\sigma}_{21}}{\partial x_2}-\rho\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}\right)\quad(1\leftrightarrow2),\tag{16}$$

$$\mu_{31}=-x_3\left(\frac{\partial\mu_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu_{21}}{\partial x_2}\right)+x_3\left(\overset{0}{\sigma}_{32}-\sigma_{23}\right)\quad(1\leftrightarrow2),\tag{17}$$

Легко убедиться, что используя выражения для напряжений $\sigma_{31},\sigma_{32},\sigma_{33},\mu_{31},\mu_{32}$, можем удовлетворять граничным условиям на плоскостях $x_3=\pm h$ (при изгибе):

$$\sigma_{33}\big|_{x_3=\pm h}=\pm\frac{1}{2}q_3,\sigma_{31}\big|_{x_3=\pm h}=\frac{1}{2}q_1\quad(1\to 2), \tag{18}$$

$$\mu_{31}\big|_{x_3=\pm h}=\pm\frac{1}{2}m_1\quad(1\to 2). \tag{19}$$

Для построения прикладной теории микрополярной пластинки введем интегральные по ее толщине усредненные характеристики: усилия, моменты и гипермоменты:

$$\begin{gathered}N_{i3}=\int_{-h}^{h}\sigma_{i3}dx_3,\quad N_{3i}=\int_{-h}^{h}\sigma_{3i}dx_3,\quad M_{ii}=\int_{-h}^{h}x_3\sigma_{ii}dx_3,\quad H_{ij}=\int_{-h}^{h}x_3\sigma_{ij}dx_3,\\ L_{ii}=\int_{-h}^{h}\mu_{ii}dx_3,L_{ij}=\int_{-h}^{h}\mu_{ij}dx_3,\ \Lambda_{i3}=\int_{-h}^{h}x_3\mu_{i3}dx_3,\quad i=1,2.\end{gathered} \tag{20}$$

На основе формул для напряжений, удовлетворяя граничным условиям (19), приходим к уравнениям равновесия (движения) прикладной теории моментной упругости со стесненным вращением для тонкой пластинки:

$$\begin{gathered}\frac{\partial N_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial N_{23}}{\partial x_2}=\left(2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)-q_3,\quad \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial H_{21}}{\partial x_2}-N_{31}=\left(\frac{2}{3}\rho h^3\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}\right)-q_1h,\\ \frac{\partial H_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial M_{22}}{\partial x_2}-N_{32}=\left(\frac{2}{3}\rho h^3\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2}\right)-q_2h,\quad \frac{\partial L_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial L_{21}}{\partial x_2}+N_{23}-N_{32}=-m_1,\\ \frac{\partial L_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial L_{22}}{\partial x_2}+N_{31}-N_{13}=-m_2,\quad -\left(\frac{\partial\Lambda_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\Lambda_{23}}{\partial x_2}\right)+H_{21}-H_{12}=m_3h.\end{gathered} \tag{21}$$

Отметим, что уравнения равновесия (движения) можно получить так же, если к трехмерным уравнением равновесия (движения) (1), соответственно, применять интегральные операторы

$$\int_{-h}^{h}(\cdot)\,dx_3\ \text{ или }\int_{-h}^{h}x_3(\cdot)\,dx_3$$

и понятия усредненных усилий, моментов и гипермоментов (20).

Соотношения упругости прикладной моментной теории изгиба тонких пластин со стесненным вращением получим на основе выражений закона Гука (2), (3):

$$\begin{gathered}M_{11}=\frac{2E_1h^3}{3(1-\nu_{12}\nu_{21})}(K_{11}+\nu_{21}K_{22}),\quad M_{22}=\frac{2E_2h^3}{3(1-\nu_{12}\nu_{21})}(K_{22}+\nu_{12}K_{11}),\\ H_{12}+H_{21}=\frac{4G_{12}h^3}{3}K_{12},\quad N_{13}+N_{31}=4G_{13}h\Gamma_{13},\quad N_{23}+N_{32}=4G_{23}h\Gamma_{23},\\ L_{11}=4\gamma hk_{11},\quad L_{22}=4\gamma hk_{22},\quad L_{21}=2h\left[(\gamma+\varepsilon)k_{21}+(\gamma-\varepsilon)k_{12}\right],\\ L_{12}=2h\left[(\gamma+\varepsilon)k_{12}+(\gamma-\varepsilon)k_{21}\right],\quad \Lambda_{13}=\frac{2h^3}{3}\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{13},\quad \Lambda_{23}=\frac{2h^3}{3}\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{23}.\end{gathered} \tag{22}$$

Уравнения равновесия (движения) (21), соотношения упругости (22) и геометрические соотношения (11) определяют модель микрополярной упругой ортотропной тонкой пластинки со стесненным вращением. К этой основной системе уравнений следует присоединить граничные условия и начальные условия (в случае динамики).

3. **Уравнение баланса энергии статики прикладной моментной теории тонкой пластинки со стесненным вращением**. На основе уравнений равновесия (1) моментной теории трехмерной упругости со стесненным вращением известным способом можем получить уравнение баланса энергии в виде

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{2}\iiint\limits_{(V)}\Big[\sigma_{11}\varepsilon_{11}+\frac{1}{2}(\sigma_{12}+\sigma_{21})\varepsilon_{12}+\frac{1}{2}(\sigma_{13}+\sigma_{31})\varepsilon_{13}+\sigma_{22}\varepsilon_{22}+\frac{1}{2}(\sigma_{23}+\sigma_{32})\varepsilon_{23}+\sigma_{33}\varepsilon_{33}+ \\
+\mu_{11}\chi_{11}+\mu_{21}\chi_{21}+\mu_{31}\chi_{31}+\mu_{12}\chi_{12}+\mu_{22}\chi_{22}+\mu_{32}\chi_{32}+\mu_{13}\chi_{13}+\mu_{23}\chi_{23}\Big]dv= \\
=\frac{1}{2}\iiint\limits_{(V)}\Big[\frac{\partial}{\partial x_1}(\sigma_{11}u_1+\sigma_{12}u_2+\sigma_{13}u_3+\mu_{12}\omega_2+\mu_{13}\omega_3)+ \\
+\frac{\partial}{\partial x_2}(\sigma_{21}u_1+\sigma_{22}u_2+\sigma_{23}u_3+\mu_{21}\omega_1+\mu_{23}\omega_3)+ \\
+\frac{\partial}{\partial x_3}(\sigma_{31}u_1+\sigma_{32}u_2+\sigma_{33}u_3+\mu_{31}u_1+\mu_{32}\omega_2)dv.
\end{gathered}
\tag{23}
$$

Используя здесь соотношения упругости (2), уравнение баланса энергии представим в форме Лагранжа:

$$
\iiint\limits_{(V)}WdV=A, \tag{24}
$$

где

$$
\begin{gathered}
W=\frac{1}{2}\Big[C_{11}^{11}\varepsilon_{11}^2+C_{22}^{22}\varepsilon_{22}^2+C_{33}^{33}\varepsilon_{33}^2+2C_{22}^{11}\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}+2C_{33}^{11}\varepsilon_{11}\varepsilon_{33}+2C_{33}^{22}\varepsilon_{22}\varepsilon_{33}+C_{12}^{12}\varepsilon_{12}^2+ \\
+C_{13}^{13}\varepsilon_{13}^2+C_{23}^{23}\varepsilon_{23}^2+2\gamma\left(\chi_{11}^2+\chi_{22}^2\right)+(\gamma+\varepsilon)\chi_{21}^2+(\gamma+\varepsilon)\chi_{12}^2+2(\gamma-\varepsilon)\chi_{12}\chi_{21}+ \\
+(\gamma+\varepsilon)\chi_{31}^2+(\gamma+\varepsilon)\chi_{13}^2+2(\gamma-\varepsilon)\chi_{31}\chi_{13}+(\gamma+\varepsilon)\chi_{32}^2+(\gamma+\varepsilon)\chi_{23}^2+ \\
2(\gamma-\varepsilon)\chi_{32}\chi_{23}\Big]
\end{gathered}
\tag{25}
$$

представляет собой плотность потенциальной энергии деформации для рассматриваемой моментной теории упругости, а $A-$ работа внешних поверхностных силовых и моментных напряжений.

Если в уравнение баланса энергии трехмерной теории (23) примем гипотезы параграфа два или, что то же самое, применим законы для перемещений, поворотов, деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений (7)-(17), а также понятия (20), можем получить уравнение баланса энергии прикладной моментной теории тонких пластин со стесненным вращением:

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{2}\iint\limits_{(S)}\Big[M_{11}K_{11}+\frac{1}{2}(H_{12}+H_{21})K_{12}+\frac{1}{2}(N_{13}+N_{31})\Gamma_{13}+\frac{1}{2}(N_{23}+N_{32})\Gamma_{23}+ \\
+M_{22}K_{22}+L_{11}k_{11}+L_{21}k_{21}+L_{12}k_{12}+L_{22}k_{22}+\Lambda_{13}l_{13}+\Lambda_{23}l_{23}\Big]dx_1dx_2= \\
=\frac{1}{2}\iint\limits_{(S)}\left(q_1h\psi_1+q_2h\psi_2+q_3w+m_1\Omega_1+m_2\Omega_2+m_3h\iota\right)dx_1dx_2+\frac{1}{2}A_{\text{çîíñ}}.
\end{gathered}
\tag{26}
$$

Используя соотношения упругости (22), уравнение баланса энергии микрополярной тонкой пластинки можем представить в форме Лагранжа:

$$\frac{1}{2}\iint\limits_{(S)}\left[\frac{2E_1h^3}{3(1-\nu_{12}\nu_{21})}K_{11}^2+\frac{2E_2h^3}{3(1-\nu_{12}\nu_{21})}K_{22}^2+\frac{2h^3\left(E_1\nu_{21}+E_2\nu_{12}\right)}{3(1-\nu_{12}\nu_{21})}K_{11}K_{22}+\frac{2G_{12}h^3}{3}K_{12}^2+\right.$$
$$+2G_{13}h\Gamma_{13}^2+2G_{23}h\Gamma_{23}^2+4\gamma hk_{11}^2+4\gamma hk_{22}^2+2h\left(\gamma+\varepsilon\right)k_{21}^2+2h\left(\gamma+\varepsilon\right)k_{12}^2+$$
$$\left.+4h\left(\gamma-\varepsilon\right)k_{12}k_{21}+\frac{2h^3}{3}\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{13}^2+\frac{2h^3}{3}\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{23}^2\right]dx_1dx_2= \tag{27}$$
$$=\frac{1}{2}\iint\limits_{(S)}\left(q_1h\psi_1+q_2h\psi_2+q_3w+m_1\Omega_1+m_2\Omega_2+m_3h\iota\right)dx_1dx_2+\frac{1}{2}A_{конт}.$$

Здесь

$$W_0=\frac{1}{2}\left[\frac{2E_1h^3}{3(1-\nu_{12}\nu_{21})}K_{11}^2+\frac{2E_2h^3}{3(1-\nu_{12}\nu_{21})}K_{22}^2+\frac{2h^3\left(E_1\nu_{21}+E_2\nu_{12}\right)}{3(1-\nu_{12}\nu_{21})}K_{11}K_{22}+\right.$$
$$+\frac{2G_{12}h^3}{3}K_{12}^2+2G_{13}h\Gamma_{13}^2+2G_{23}h\Gamma_{23}^2+4\gamma hk_{11}^2+4\gamma hk_{22}^2+2h\left(\gamma+\varepsilon\right)k_{21}^2+ \tag{28}$$
$$\left.+2h\left(\gamma+\varepsilon\right)k_{12}^2+4h\left(\gamma-\varepsilon\right)k_{12}k_{21}+\frac{2h^3}{3}\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{13}^2+\frac{2h^3}{3}\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{23}^2\right]$$

представляет собой плотность потенциальной энергии деформации, $A_{конт}$ – работу контурных усилий.

4. Статическая задача и задача о свободных колебаниях, прямоугольной пластинки. Рассмотрим прямоугольную пластинку, шарнирно опертую по контуру и загруженную распределенной нагрузкой интенсивностью $q(x,y)$. Начало координат расположим в углу пластинки. Размер пластинки в направлении оси x_1 равен a в направлении оси x_2-b.

Граничные условия шарнирного операния имеют вид

$$w=0,\quad M_{11}=0,\quad L_{i12}=0,\quad \Omega_1=0,\quad \psi_2=0,\quad \Lambda_{13}=0,\ \text{при}\ x_1=0,a;$$
$$w=0,\quad M_{22}=0,\quad L_{i21}=0,\quad \Omega_2=0,\quad \psi_1=0,\quad \Lambda_{23}=0,\ \text{при}\ x_2=0,a. \tag{29}$$

Решение системы уравнений (21), (22), (11) представим в виде двойных тригонометрических рядов

$$w(x_1,x_2)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}W_{mn}\sin\frac{m\pi x_1}{a}\sin\frac{m\pi x_2}{b},$$
$$\psi_1(x_1,x_2)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Psi_{1mn}\cos\frac{m\pi x_1}{a}\sin\frac{m\pi x_2}{b}, \tag{30}$$
$$\psi_2(x_1,x_2)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Psi_{2mn}\sin\frac{m\pi x_1}{a}\cos\frac{m\pi x_2}{b},$$

где $\mathrm{W}_{mn},\psi_{1mn},\psi_{2mn}$ - коэффициенты рядов – неизвестные постоянные числа; $m,n-$ целые положительные числа. Отметим, что решение в виде (30) автоматически удовлетворяет граничным условиям шарнирного опирания (28). В случае задачи о свободных колебаниях под суммой формул (30) необходимо добавить еще множитель $e^{ip_{mn}t}$.

Разложив приложенную нагрузку $q(x,y)$, также в двойной ряд Фурье в прямоугольной области $0 \le x_1 \le a, \quad 0 \le x_2 \le b,$ получим

$$q(x_1,x_2)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} q_{mn}\sin\frac{m\pi x_1}{a}\sin\frac{n\pi x_2}{b}, \tag{31}$$

где

$$q_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b q(x_1,x_2)\sin\frac{m\pi x_1}{a}\sin\frac{m\pi x_2}{b}\,dx_1dx_2. \tag{32}$$

Результаты численных вычислений таковы: данные задачи: $2h=1\textit{нм}$ (нанометр), $a=b=100\textit{нм}$; $\mathrm{q}=0.5\times10^{3}\,\frac{\textit{кг}}{\textit{м}^2}$. Физические постоянные полиэтилена [5, 6]:

$$C_{11}^{11}=18.1\ \textit{ГПа},\ C_{22}^{22}=17.3\ \textit{ГПа},\ C_{33}^{33}=193\ \textit{ГПа},$$
$$C_{22}^{11}=11\ \textit{ГПа},\ C_{33}^{11}=4\ \textit{ГПа},\ C_{33}^{22}=5\ \textit{ГПа},\ C_{12}^{12}=8.63\textit{ГПа},$$
$$C_{13}^{13}=0.75\textit{ГПа},\ C_{23}^{23}=2.18\textit{ГПа},\ \gamma=400H,\ \varepsilon=400H\ .$$
$$W_{\max}^{\textit{мом}}=2.6346\times10^{-13}\,\textit{м},\ W_{\max}^{\textit{кл}}=1.0913\times10^{-11}\,\textit{м}$$
$$p_{11\textit{мом}}^{1}=1.1008\times10^{11}\textit{сек}^{-1},\ p_{11\textit{кл}}^{1}=2.7839\times10^{9}\textit{сек}^{-1}$$

Таким образом, учет моментности в статической задаче приведет к повышению жесткости пластинки, а для частот колебаний – к частотам, находящимся в терагерцовом диапазоне.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА и РФФИ (РФ) в рамках совместных научных программ 15RF-063 и 15-53-05093 соответственно.

[1]Ширакский государственный университет им. М. Налбандяна
[2]Институт химической физики им. Н. Н. Семенова РАН

А. А. Саркисян, член-корреспондент НАН РА С. О. Саркисян, Л. И. Маневич, С. А. Тиман

Модель ортотропной тонкой пластинки по моментной теории со стесненным вращением с приложениями к полимерным материалам

Построена модель ортотропной тонкой пластинки на основе моментной (микрополярной) теории упругости со стесненным вращением. Для этой модели пластинки получено выражение закона сохранения механической энергии. Теоретическим путем получены решения задач статики и свободных колебаний прямоугольной пластинки.

Ա. Հ. Սարգսյան, ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ս. Հ. Սարգսյան, Լ. Ի. Մաննիչ, Ս. Ա. Տիման

Կաշկանդված պտույտներով մոմենտային տեսությամբ օրթոտրոպ բարակ սալի մոդելը և կիրառությունները պոլիմերային նյութերի համար

Կառուցված է օրթոտրոպ բարակ սալի մոդելը կաշկանդված պտույտով մոմենտային տեսության հիման վրա: Սալի այս մոդելի համար ստացված է մեխանիկական էներգիայի պահպանման օրենքը: Տեսական ճանապարհով ստացված են ուղղանկյուն սալի հավասարակշռության և ազատ տատանումների խնդիրների լուծումները:

A. H. Sargsyan, corresponding member of NAS RA S. H. Sargsyan, L. I. Manevich, S. A. Timan

Model of Orthotropic Thin Plate with Constrained Rotation by Moment Theory and with Application for Polymer Materials

A model of orthotropic thin plate is constructed based on the moment (micropolar) theory of elasticity with constrained rotation. The expression for the law of conservation of mechanical energy is obtained for this plate model. Problems of statics and free vibrations of rectangular plate are studied theoretically.

Литература

1. Введение в микро- и наномеханику. Математические модели и методы. Нижний Новгород. Изд-во Нижегородск. гос.технического ун-та им. Р. Е. Алексеева. 2010. 303 с.
2. Физическая мезомеханика и компьютерное конструирование материалов. Под.ред. В. Е. Панина. Новосибирск. Наука. 1995. Т. 1. 298 с. Т. 2. 320 с.
3. *Маневич Л. И., Саркисян С. О., Тиман С. А.* В кн.: Континуальная моментная динамическая модель кристалла полиэтилена. Сб. трудов XVII ежегодной научной конференции отдела полимеров и композиционных материалов. Москва, 15-17 февраля 2016 М. Изд-во ин-та химической физики РАН им. Н.Н. Семенова. 2016. С. 128-129.
4. *Берлин А. А., Маневич Л. И., Саркисян С. О., Тиман С. А.* – Доклады НАН Армении. 2016. Т. 116. № 3. С. 210-218.
5. *Стрельников И. А., Мазо М. А., Зубова Е. А., Маневич Л. И., Саркисян С. О., Берлин А. А.* - Вестник Тверского гос. ун-та. Серия “Химия”. 2016. №1. С. 33-39.
6. *Зубова Е. А., Стрельников И. А., Балабаев Н. К., Савин А. В. , Мазо М. А., Маневич Л. И.* -Высокомолекулярные соединения. 2017. Серия А. Т.59. №1. С. 101-110.
7. *Саркисян С. О.* -Упругость и неупругость. Материалы международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 100-летию со дня рождения А.А. Ильюшина. Москва. 20-21 января 2011 года. М.:Изд-во МГУ. 2011. С. 231-235.