

МЕХАНИКА

УДК 539.3

Академик С. А. Амбарцумян, М. В. Белубекян

**О проблеме электромагнитоупругости тел
 с «ортотропной» электропроводностью**

(Представлено 23/III 2017)

Ключевые слова: упругая деформация, объёмное расширение, электропроводность.

Введение. В статье предлагается вариант учета влияния деформационных свойств электропроводящих материалов на удельное электрическое сопротивление. Приводятся решения задач для токопроводов, электропроводность которых зависит от изменения поперечного сечения.

1. Экспериментально показано [1,2], что в однородных изотропных проводниках коэффициент электропроводности $\sigma = 1/R$ (R – удельное электрическое сопротивление) зависит от напряженно-деформированного состояния тела. Классические уравнения электродинамики имеют вид [3-5]

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{H} &= \frac{4\pi}{c} \bar{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}, \operatorname{div} \bar{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \bar{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}, \operatorname{div} \bar{D} = 4\pi \rho_e, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где \bar{E} – вектор напряженности электрического поля, \bar{H} – вектор напряженности магнитного поля, \bar{D} – вектор электрической индукции, \bar{B} – вектор магнитной индукции, \bar{J} – вектор плотности полного электрического тока, ρ_e – плотность электрического заряда, c – электродинамическая постоянная $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/с, t – время.

Все это замыкается известными материальными уравнениями [3-5]

$$\begin{aligned} \bar{B} &= \mu \bar{H} - \frac{\epsilon\mu - 1}{c} \bar{v} \times \bar{E}, \\ \bar{D} &= \epsilon \bar{E} + \frac{\epsilon\mu - 1}{c} \bar{v} \times \bar{B}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Наконец, для полного замыкания системы уравнений с учетом «ортотропии» электропроводности «изотропного», «однородного» тела имеем новое представление вектора плотности электрического тока \bar{J}

$$\bar{J} = \sigma(1 - \alpha \operatorname{div} \bar{u}) \left(\bar{E} + \frac{\mu}{c} \bar{v} \times \bar{B} \right) + \rho_e \bar{v}, \quad (1.3)$$

где μ – магнитная проницаемость, σ – коэффициент электропроводности в условиях отсутствия деформации, ϵ – диэлектрическая проницаемость, \bar{v} – вектор скорости перемещения частиц тела \bar{u} , α – новая постоянная, характеризующая влияние деформированного состояния тела.

Рассматривая приведенные выше уравнения (1.1)-(1.3), можно констатировать, что здесь имеет место нечто новое – ортотропная электропроводность деформационного характера. Для полного замыкания системы (всех уравнений) приведем также соответствующие уравнения движения [4, 5]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + R_i &= \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad i, j = 1, 2, 3 = x, y, z, \\ \sigma_{ij} &= 2G \epsilon_{ij} + \delta_{ij} \lambda \epsilon_{ij}, \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \end{aligned} \quad (1.4)$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, ρ – плотность материала, $G = E/2(1 + \nu)$, $\lambda = \nu E / (1 + \nu)(1 - 2\nu)$ – постоянные Ламе, E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона, \bar{R}_i – объемная сила – сила Лоренца, которая при наличии электрического тока и электрического заряда имеет вид

$$\bar{R} = \frac{\mu}{c} (\bar{J} + \bar{B}) + \rho_e \bar{E}. \quad (1.5)$$

2. Рассмотрим одномерную задачу. Одномерные уравнения электродинамики при пренебрежении токами смещения и членами типа $\rho_e \bar{v}$, что допустимо для хорошо проводящих материалов, при учете влияния деформаций имеют вид

$$\begin{aligned} J_1 &= 0, \quad \frac{\partial H_3}{\partial x} = -\frac{4\pi}{c} J_2, \quad \frac{\partial H_2}{\partial x} = \frac{4\pi}{c} J_3, \quad \frac{\partial B_1}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial B_1}{\partial t} &= 0, \quad \frac{\partial E_3}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial B_2}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_2}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_3}{\partial t}, \Rightarrow B_1 = 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

При этом материальные уравнения (1.3) запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} J_1 &= \sigma \left(1 - \alpha \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) E_1 \Rightarrow E_1 = 0, \\ J_2 &= \sigma \left(1 - \alpha \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \left(E_2 - \frac{\mu}{c} v_1 H_3 \right), \\ J_3 &= \sigma \left(1 - \alpha \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \left(E_3 + \frac{\mu}{c} v_1 H_2 \right). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Уравнения движения (1.4) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} (\lambda + 2G) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{1}{c} (J_2 B_3 - J_3 B_2) \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \\ G \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \\ G \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Наиболее простая одномерная задача – одномерная задача при наличии следующего электрического поля (рис. 1):

$$E_2 = E_{20} = \text{const}, \quad E_{10} = 0, \quad E_{30} = 0. \quad (2.4)$$

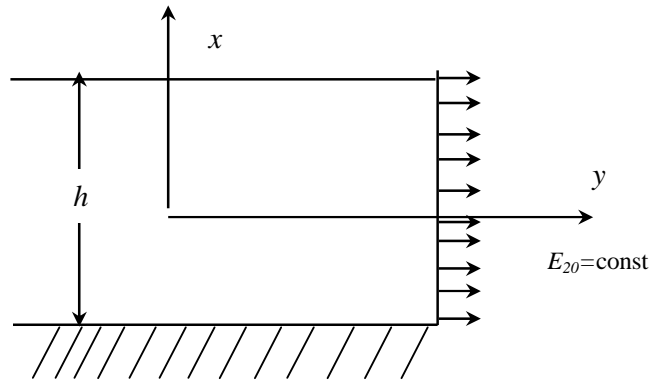


Рис. 1.

Из (2.1) и (2.2) следует

$$\frac{\partial H_{30}}{\partial x} = \frac{4\pi\sigma}{c} \left(1 - \alpha \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) E_{20} \quad H_{20} = 0, \quad H_{30} = 0. \quad (2.5)$$

Ввиду симметричности относительно плоскости $x=0$ следует

$$u_{30} = 0, \quad u_1 = 0 \quad \text{при} \quad x = 0. \quad (2.6)$$

Из (2.5) с учетом (2.6) следует

$$H_{30} = -\frac{4\pi\sigma}{c} (x - \alpha u_1) = E_{20}. \quad (2.7)$$

Подставляя H_{30} из (2.7) в первое уравнение (2.3), получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = A \left(x - \alpha u_1 - \alpha x \frac{\partial u_1}{\partial x} + \alpha^2 u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \right), \quad (2.8)$$

где

$$A = \frac{4\pi\sigma^2 E_{20}^2}{c^2 (\lambda + 2G)}, \quad (2.9)$$

Таким образом, мы получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами с нелинейным членом $u_1 du_1/dx$.

Задачу эту можно несколько упростить в предположении, что толщина рассматриваемого слоя мала и рассматриваются лишь малые упругие перемещения.

В этом случае исходное уравнение (2.8) примет вид

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + A_\alpha u_1 = A_x \quad (2.10)$$

при следующих граничных условиях:

$$\text{при } x=0, u_1=0; \text{ при } x=\frac{h}{2}, \sigma_{xx}=0. \quad (2.11)$$

Общее решение уравнения (2.10) имеет вид

$$u_1 = c_1 \sin \sqrt{A\alpha} x + c_2 \cos \sqrt{A\alpha} x + \frac{x}{\alpha}. \quad (2.12)$$

Удовлетворяя граничным условиям (2.11), из (2.12)

$$u_1 = -\frac{\sin \sqrt{A\alpha} x}{\alpha \sqrt{A\alpha} \cos \sqrt{A\alpha} \frac{h}{2}} + \frac{x}{\alpha}, \quad (2.13)$$

получим

$$u_1(0,5h) = -\frac{1}{\alpha \sqrt{A\alpha}} \operatorname{tg} \sqrt{A\alpha} \frac{h}{2} + \frac{h}{2\alpha}. \quad (2.14)$$

Безусловно, уравнение (2.8) можно решать, не прибегая к вышеприведенным упрощениям (не пренебрегая нелинейным членом и членом с переменным коэффициентом), при помощи метода Бубнова –Галеркина. Тогда можно получить результаты для достаточно широких слоев (для достаточно больших h). При этом эффекты изменения коэффициента электропроводности от напряженно-деформируемого состояния будут более существенными.

3. В работах [1, 2] приводятся результаты экспериментального исследования токонесущих проводников в случае, когда проводник находится под действием поперечно сжимающих нагрузок. В этом случае граничные условия (условия свободной границы) (2.11) несколько преобразуются и принимают вид

$$\text{при } x=0 \quad u_1=0; \text{ при } x=\pm \frac{h}{2} \quad \sigma_{xx} = \mp q. \quad (3.1)$$

Удовлетворяя граничным условиям (3.1), для упругого перемещения получим

$$u_1 = -\left(\frac{q}{\lambda+2G} + \frac{1}{\alpha}\right) \frac{\sin \sqrt{A\alpha} x}{\sqrt{A\alpha} \cos\left(\sqrt{A\alpha} \frac{h}{2}\right)} + \frac{x}{\alpha}. \quad (3.2)$$

4. Рассмотрим случай, когда одна из плоскостей рассматриваемого слоя $x = -\frac{h}{2}$ закреплена, а другая $x = \frac{h}{2}$ равномерно нагружена сжимающим усилием q_0 (рис. 2).

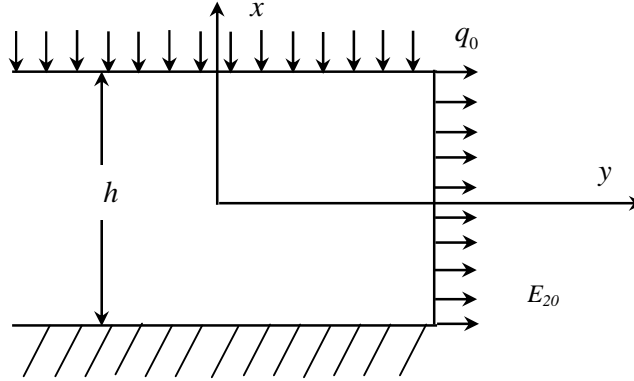


Рис. 2.

В этом случае имеем следующие граничные условия:

$$\text{при } x = -\frac{h}{2}, \quad u_1 = 0, \quad (4.1)$$

$$\text{при } x = \frac{h}{2}, \quad \sigma_{xx} = -q_0,$$

А для напряженности магнитного поля имеем

$$H_{30} = -\frac{4\pi\sigma}{c} [x - \alpha(u_1 - u_0)] E_0, \quad (4.2)$$

где

$$u_0 = u_1(0). \quad (4.3)$$

Согласно (4.2) уравнение статики упругого слоя (2.8) запишется следующим образом:

$$\frac{d^2 u_1}{dx^2} = A \left(1 - \alpha \frac{du_1}{dx} \right) [x - \alpha(u_1 - u_0)]. \quad (4.4)$$

Пренебрегая, как и раньше, в уравнении (4.4) нелинейным членом и членом с переменным коэффициентом, получим

$$\frac{d^2 u_1}{dx^2} + A\alpha u_0 \frac{du_1}{dx} + A\alpha u = A(\alpha u_1 + x). \quad (4.5)$$

Решение уравнения (4.5) имеет вид

$$u_1(x) = e^{-\varepsilon x} (c_1 \sin px + c_2 \cos px) + \alpha^{-1} x, \quad (4.6)$$

где c_1 и c_2 – постоянные интегрирования, которые определяются согласно граничным условиям (4.1), а новые обозначения ε и p имеют вид

$$\varepsilon = \frac{u_0 A \alpha}{2}, \quad p = A \alpha \sqrt{1 - 0,25 u_0^2}. \quad (4.7)$$

Здесь следует иметь в виду, что в p входит неизвестное пока u_0 . При этом из (4.6) следует, что $u_1(0) = u_0 = c_0$. Т. е. после определения c_2 необ-

ходимо еще определить и u_0 . В общем случае для определения u_0 получается сложное трансцендентное уравнение.

Для определения u_0 , вообще говоря, можно воспользоваться приближением для тонкого слоя, т.е. следующими неравенствами:

$$\left(\frac{Ph}{2}\right)^2 \ll 1, \quad \frac{\varepsilon h}{2} \ll 1. \quad (4.8)$$

С учетом этого приближения, удовлетворяя граничным условиям (4.1), получим

$$c_1 = -\frac{1}{\alpha}, \quad c_2 = \frac{h}{22}(1-p). \quad (4.9)$$

С учетом (4.7) и равенства $c_2 = u_0$ для определения u_0 получим следующее алгебраическое уравнение:

$$2\alpha \frac{u_0}{h} = 1 - A\alpha\sqrt{1 - 0,25u_0^2}, \quad (4.10)$$

откуда с точностью принятого приближения (4.8) для u_0 получим уравнение

$$u_0 \approx \frac{h}{2\alpha}. \quad (4.11)$$

Институт механики НАН РА

Академик С. А. Амбарцумян, М. В. Белубекян

О проблеме электромагнитоупругости тел с «ортотропной» электропроводностью

Исследуется влияние изменения объемного расширения металлических материалов на величину удельного электрического сопротивления. Приводятся решения задач для токопроводов с учетом зависимости электропроводности от изменения поперечного сечения.

Ակադեմիկոս Ս.Ա. Համբարձումյան, Մ.Վ. Բելուբեկյան

«Օրտոտրոպ» էլեկտրահաղորդչության մարմնի էլեկտրամագնիսաառաձգականության հիմնախնդրի մասին

Հետազոտված է մետաղական նյութերի ծավալային ընդարձակման փոփոխության ազդեցությունը էլեկտրական տեսակարար դիմադրության մեծության վրա: Բերվում են խնդիրների լուծումներ հոսանքատարների համար՝ հաշվի առնելով հաղորդականության կախվածությունը ընդլայնական կտրվածքից:

Academician S. A. Ambartsumian, M. V. Belubekyan

**On the Electromagnetoelasticity Problem of the Body with
“Orthotropic” Electroconductivity**

The influence of the volume divergence changes of the metal materials on the specific electrical resistance value is investigated. The solution of the current carrying problems with the account of the electroconductivity dependence on the cross section is given.

Литература

1. *Улыбин А. В.* – Инженерно-строительный журнал. 2010. №7. С.4-9.
2. *Созыкин С. А., Бескачко В. П.* – Вестник Южно-Уральского ун-ета. Серия матем., мех., физ. 2011. Вып. 5.
3. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества. М. Наука. 1976. 388 с.
4. *Амбарцумян С. А., Белубекян М. В.* Колебание и устойчивость токонесущих упругих пластин. Ереван: Изд-во АН Армении. 1992. 123 с.
5. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М. Наука. 1977 288 с.