ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 117 2017 № 1

МАТЕМАТИКА

УДК 517.518.34

К. А. Керян

О базисности в $H^1(R)$ ортонормальных систем сплайнов на R с нулевыми средними

(Представлено академиком Г. Г. Геворкяном 28/XII 2016)

Ключевые слова: *сплайн система, базисность, пространство Харди.*

Детальное изучение ортонормальных сплайн систем начато З. Чисиельским [1, 2] в 1960-х гг. Эти системы с двоичными узлами являются базисами или безусловными базисами в некоторых пространствах, таких как $L^p[0,1], 1 \le p < \infty,\ C[0,1],\ H^p[0,1], 0 < p \le 1$, в пространствах Соболева $W^{p,k}[0,1]$. Эти результаты получены в работах З. Чисиельского, Ж. Домсты, С. Бочкарева, П. Войтащчика, П. Щелина, Ж.-О. Стромберга (более подробные ссылки см. в [3-5]).

Эти результаты для ортонормальных сплайн систем с произвольными узлами получили распространение со случая системы Франклина, т. е. с ортонормальной системы сплайнов второго порядка. Безусловная базисность в $L^p[0,1]$, для $1 < p < \infty$, системы Франклина, соответствующая произвольной последовательности узлов, доказана в [6]. Г. Г. Геворкян и А. Камонт [4] получили простую геометрическую характеризацию последовательностей узлов, для которых соответствующая система Франклина является базисом или безусловным базисом в $H^1[0,1]$.

Случай сплайнов высшего порядка гораздо сложнее. Отметим, что гипотеза де Боора о равномерной оценке норм ортогональных проекторов на пространство сплайнов порядка r, выдвинутая в 1973 г. [7], получила положительный ответ в общем случае Ю. Щадриным в 2001 г. [8]. Недавно М. В. Голитчек дал более простое и короткое доказательство этой теоремы [9]. Из теоремы Щадрина немедленно следует, что если последовательность узлов всюду плотна в $[0,1]$, то соответствующая ортонормальная система сплайнов порядка r является базисом в $L^p[0,1],\ 1 \le p < \infty$

и $C[0,1]$. Более того, З. Чисиельский получил несколько следствий результата Щадрина, в частности, оценки для обратной от матрицы Грамма *B*-сплайнов [10]. Используя эти оценки, Г. Г. Геворкян и А. Камонт [5] распространили часть их результатов из [4] для ортонормальных сплайн систем любого порядка и получили характеризацию последовательностей узлов, для которых соответствующая ортонормальная сплайн система порядка r является базисом в $H^1[0,1]$. Недавно М. Пассенбруннер доказал, что для всякой всюду плотной последовательности узлов соответствующая ортонормальная система сплайнов порядка r является базисом в $L^p[0,1]$, $1 < p < \infty$ [11]. А в [12] получена характеризация последовательностей узлов, для которых соответствующая ортонормальная система сплайнов порядка r является безусловным базисом в $H^1[0,1]$.

Г. Г. Геворкян и К. Керян получили характеризацию последовательностей узлов, для которых соответствующая система функций Франклина с нулевыми средними является базисом в $H^1(R)$ [13]. Далее автор получил характеризацию последовательностей, для которых последняя система является безусловным базисом в $H^1(R)$ [14]. Отметим, что условия полученные в этих работах, не совпадают с полученными для интервала $[0,1]$ в [4].

Главным результатом настоящей работы является характеризация тех последовательностей, для которых соответствующая ортонормальная система сплайнов порядка r, состоящая из функций с нулевыми средними, является базисом в $H^1(R)$.

Дадим необходимые определения.

Определение 1. *Последовательность (разбиение)* $T=\{t_n : n\ge 0\}$ *называется допустимой (на* R*), если* T *всюду плотно в* R *и* $t_i \ne t_j$, *когда* $i \ne j$.

Зафиксируем натуральное число r. Для допустимой последовательности $T=\{t_n : n\ge 0\}$ и $n \ge 1$ обозначим $T_n = \{t_i : 0 \le i \le n+1\}$. Пусть π_n получается из T_n неубывающей перестановкой:

$$\pi_n = \{\tau_i^n : \tau_i^n \le \tau_{i+1}^n, 0 \le i \le n\}, \ \ \pi_n = T_n.$$

Обозначим $\tau_i^n := \tau_1^n$ для $-r+2 \le i \le 0$ и $\tau_i^n := \tau_{n+r+1}^n$ для $n+r+2 \le$ $\le i \le n+2r$. Пусть $(N_{n,i})_{i=-r+2}^{n+r}$ последовательность B-сплайнов порядка r, соответствующая $(\tau_i^n)_{i=-r+2}^{n+2r}$. Известно, что функции $N_{n,i}$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\operatorname{supp} N_{n,i} = [\tau_i^n, \tau_{i+r}^n], N_{n,i} \ge 0, \int_R N_{n,i}(t)dt = \frac{\nu_{n,i}}{r}, \sum_{i=-r+2}^{n+r} N_{n,i}(t) = 1_{\Delta_n}(t),$$

где $\nu_{n,i} := \tau_{i+r}^n - \tau_i^n, \Delta_n := [\tau_1^n, \tau_{n+r+1}^n]$, а 1_E – характеристическая функция множества E.

Через $S_n^{(r)}$ обозначается пространство кусочно-полиномиальных функций на R, соответствующих последовательности узлов π_n, т. е. $S_n^{(r)}$ – пространство $r-2$ раза непрерывно дифференцируемых на R функций f с носителем $\Delta_n = [\tau_1^n, \tau_{n+r+1}^n]$, которые являются полиномами степени меньше r на каждом отрезке $[\tau_i^n; \tau_{i+1}^n]$, $i = 1,2,...,n+r$. Очевидно, что $S_n^{(r)}$ является линейной оболочкой функций $(N_{n,i})_{i=1}^{n+1}$, и они формируют базис в $S_n^{(r)}$, следовательно $\dim S_n^{(r)} = n+1$. Заметим, что функции $N_{n,i} \notin S_n^{(r)}$ для $i = -r+2,...,0$ и $i = n+2,...,n+r$.

Определение 2. *Пусть* $S_n^{r,0}$ *– подпространство всех функций из* $S_n^{(r)}$, *чьи интегралы по* R *равны нулю.*

Ясно, что $S_n^{r,0}$ имеет коразмерность 1 в $S_n^{(r)}$, откуда $\dim S_n^{r,0} = n$. Так как $S_{n-1}^{r,0} \subset S_n^{r,0}$, следовательно, для $n \geq 1$существует (с точностью до знака) единственная функция $F_n^{(r)} \in S_n^{r,0}$, которая ортогональна $S_{n-1}^{r,0}$ и $\| F_n^{(r)} \|_2 = 1$.

Система функций $(F_n^{(r)})_{n=1}^{\infty}$ называется ортонормальной системой сплайнов с нулевыми средними на R, соответствующей последовательности T.

Понятия регулярности последовательностей сыграли важную роль при исследовании системы Франклина$(r=2)$ на $[0,1]$ и общей системы Франклина функций с нулевыми средними на R.

Дадим определения регулярных последовательностей.

Определение 3. *Пусть* T *– допустимая последовательность. Назовем* T ***r-регулярной*** *с параметром* $\gamma \geq 1$, *если для* $n \geq 1$ *и* $i = 1,2,...,n$ *имеют место неравенства*

$$\gamma^{-1} \leq \frac{\nu_{n,i+1}}{\nu_{n,i}} \leq \gamma.$$

Определение 4. *Пусть* T *– допустимая последовательность. Назовем* T ***r-регулярной на*** R *с параметром* $\gamma \geq 1$, *если* T *r-регулярна и для* $n \geq 1$ *имеют место неравенства*

$$\gamma^{-1} \leq \frac{\nu_{n,1}}{|\Delta_n|}, \ \gamma^{-1} \leq \frac{\nu_{n,n+1}}{|\Delta_n|}.$$

Главный результат этой статьи – характеризация последовательностей, для которых $(F_n^{(r)})_{n=1}^{\infty}$ является базисом в $H^1(R)$ **.**

Теорема 1. *Пусть* $T = \{t_n : n \geq 0\}$ *– допустимая последовательность на* R, *тогда соответствующая ей система* $(F_n^{(r)})_{n=1}^{\infty}$ *является базисом в* $H^1(R)$ *тогда и только тогда, когда* T *r-регулярна на* R *с некоторым параметром* $\gamma \geq 1$.

Введем следующие обозначения. Через $D_n(t,s)$ и $K_n(t,s)$ обозначим ядра (Дирихле) ортогональных проекций P_n и P_n из $L^1(R)$ в $S_n^{r,0}$ и $S_n^{(r)}$ соответственно.

Теорема 1 доказывается с применением лемм 1-6. Эти леммы найдут применение при дальнейшем исследовании системы $(F_n^{(r)})_{n=1}^{\infty}$.

Лемма 1. *Для ядра $D_n(t,s)$ имеет место следующее разложение:*

$$D_n(t,s) = K_n(t,s) - \frac{\int_R K_n(x,s)dx}{\iint_{R^2} K_n(x,y)dxdy} \cdot \int_R K_n(t,x)dx.$$

Лемма 2. *Пусть последовательность T r-регулярна на R с некоторым параметром $\gamma \geq 1$, тогда существуют постоянная $C_\gamma > 0$, зависящая только от γ, r, и постоянная $q \in (0,1)$, зависящая только от r так, что для любых $x \in [\tau_i^n, \tau_{i+r}^n]$, $y \in [\tau_j^n, \tau_{j+r}^n]$ имеет место*

$$|K_n(x,y)| \leq C_\gamma \frac{q^{|j-i|}}{\max\{\nu_{n,k};\ \min(i,j) \leq \mathrm{k} \leq \max(i,j)\}}.$$

Лемма 3. *Существует постоянная $c_r > 0$, зависящая только от r такая, что ядро $K_n(x,y)$ удовлетворяет следующему неравенству:*

$$\iint_{R^2} K_n(x,y)dxdy \geq c_r\, |\Delta_n|.$$

Лемма 4. *Существует постоянная $C_r > 0$, зависящая только от r такая, что для $n \geq 1$ имеют место неравенства*

$$\int_R |D_n(t,s)|\, ds \leq C_r, \ \forall t \in R.$$

Необходимость r-регулярности на R последовательности T в теореме 1 вытекает из следующих двух лемм.

Лемма 5. *Существуют постоянные $C_1, C_2 > 0$ такие, что*

$$\sup \| \mathrm{P}_n(\mathrm{f}) \|_{H^1} > C_1 \ln M - C_2,$$

где $M = \max_{1 \leq i \leq n-1} \left\{ \frac{\nu_{n,i+1}}{\nu_{n,i}}, \frac{\nu_{n,i}}{\nu_{n,i+1}} \right\}$, а супремум взят по всем атомам f.

Лемма 6. *Пусть последовательность T r-регулярна с некоторым параметром $\gamma \geq 1$. Если существует постоянная $\theta > 0$ такая, что для любой функции $F \in H^1(R)$ имеет место неравенство*

$$\| \mathrm{P}_n(\mathrm{F}) \|_{H^1} \leq \theta \cdot \| \mathrm{F} \|_{H^1},$$

то существует постоянная $C_{\gamma,\theta} > 0$ такая, что

$$\frac{\nu_{n,1}}{|\Delta_n|} > C_{\gamma,\theta},\ \frac{\nu_{n,n+1}}{|\Delta_n|} > C_{\gamma,\theta}.$$

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта 15T-1A006.

Ереванский государственный университет
e-mail: karenkeryan@ysu.am

К. А. Керян

О базисности в $H^1(R)$ ортонормальных систем сплайнов на R с нулевыми средними

Получена геометрическая характеризация последовательностей, для которых соответствующая ортонормированная система сплайнов порядка r с нулевыми средними является базисом в пространстве Харди $H^1(R)$.

Կ. Ա. Քերյան

R -ի վրա զրո միջին ունեցող օրթոնորմալ սպլայն համակարգերի $H^1(R)$ -ում բազիսության վերաբերյալ

Ստացվել է երկրաչափական բնութագրություն բոլոր այն հաջորդականություն-ների համար, որոնց համապատասխան R -ի վրա զրո միջին ունեցող r –րդ կարգի օր-թոնորմալ սպլայն համակարգերը բազիս են Հարդիի $H^1(R)$ տարածությունում:

K. A. Keryan

Orthonormal Spline Systems on R with Zero Means as Bases in $H^1(R)$

Geometric characterization of knot sequences for which the corresponding orthonormal spline system of arbitrary order r with zero mean is a basis in Hardy space $H^1(R)$ is received.

Литература

1. *Ciesielski Z.* – Studia Math. 1963.V. 23. P. 141-157.
2. *Ciesielski Z.* – Studia Math. 1966. V. 27. P. 289-323.
3. *Gevorkyan G. G., Kamont A.* – Dissertationes Mathematicae (Rozprawy Matematy-czne) 1998. V. 374. P. 1-59.
4. *Gevorkyan G. G., Kamont A.* – Studia Math. 2005. V. 167. P. 259 -292.
5. *Gevorkyan G. G., Kamont A.* – East J. Approx. 2008. V. 14. P. 161-182.
6. *G. G. Gevorkyan, A. Kamont,* – Studia Math. 2004. V. 164. P. 161 - 204.
7. *de Boor C.* Approximation Theory (Austin, TX, 1973). Academic Press, New York, 1973. P. 269-276.
8. *Shadrin A.* – Acta Math. 2001. V. 187. P. 59-137.

9. *v. Golitschek M.* – J. Approx. Theory. 2014. V. 181. P. 30-42.
10. *Ciesielski Z.* – Function spaces (Poznan, 1998). Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 213. Dekker. New York. 2000. P. 133-140.
11. *Passenbrunner M.* – Studia Math. 2014. V. 222. P. 51-86.
12. *Gevorkyan G. G., Kamont A., Keryan K., Passenbrunner M.* – Studia Math. 2015. V. 226. P. 123-154.
13. *Gevorkyan G. G., Keryan K.* – J. Contemp. Math. Anal. 2016. V, 51. N 2. P. 68-78.
14. *Keryan K. A.* – J. Contemp. Math. Anal. 2016. V, 51. N 6. P. 269-288.