ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 116 2016 № 4

МАТЕМАТИКА

УДК 517.984.46

П. Э. Мелик-Адамян

Об операторе приведения Калкина для обратимых симметрических операторов

(Представлено академиком Н. У. Аракеляном 28/VII 2016)

Ключевые слова: *симметрический оператор, точка регулярного типа, оператор приведения Калкина, самосопряженное расширение, граничные операторы Вишика.*

В гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ со скалярным произведением $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ рассматривается простой замкнутый симметрический оператор T с областью определения $\mathcal{D}(\mathrm{T})$, плотной в $\mathfrak{H}$, так что определен и сопряженный оператор T^* с областью $\mathcal{D}(\mathrm{T}^*)\supset\mathcal{D}(\mathrm{T})$.

Через $[\mathfrak{H}]$ обозначается пространство линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathfrak{H}$, а ядро, образ и резольвентное множество оператора – через $\mathcal{K}(\cdot)$, $\mathcal{R}(\cdot)$ и $\rho(\cdot)$ соответственно.

В работе предполагается, что для оператора T существует ограниченный обратный T^{-1}, так что $\mathcal{R}(\mathrm{T})$ является подпространством и $\mathcal{D}(\mathrm{T}^{-1})=\mathcal{R}(\mathrm{T})$, $\mathcal{R}(\mathrm{T}^{-1})=\mathcal{D}(\mathrm{T})$, $\|\mathrm{T}^{-1}\|<\infty$. Тогда справедливо ортогональное разложение

$$\mathfrak{H}=\mathcal{R}(\mathrm{T})\oplus\mathcal{K}(\mathrm{T}^*),\tag{1}$$

и пусть $\mathrm{P}_{\mathcal{R}}$, $\mathrm{P}_{\mathcal{K}}$ – соответствующие ортогональные проекторы в $\mathfrak{H}$.

Поскольку точка 0 является точкой регулярного типа для T и множество таких его точек открыто, то дефектные числа оператора T равны, $n_+=n_-=\dim\mathcal{K}(\mathrm{T}^*)$, следовательно, он обладает самосопряженными расширениями. Предполагается, что $\dim\mathcal{K}(\mathrm{T}^*)=\infty$.

В работе Дж. Калкина [1] доказано существование самосопряженного расширения S оператора T такого, что $0\in\rho(\mathrm{S})$, т. е. определен всюду на $\mathfrak{H}$ ограниченный оператор S^{-1}, являющийся самосопряженным расширением оператора T^{-1}. Посредством S^{-1} представлен и оператор приведения для T^* – объект, введенный им же в [2] для описания максимальных расширений симметрических операторов.

В настоящей работе предложен подход к расширениям оператора T, несколько отличный от [1]. Здесь оператор приведения для T^* строится на основе определенного прямого разложения области $\mathcal{D}(T^*)$, с помощью которого приводится описание множества самосопряженных расширений оператора T методом Калкина [2]. Такой подход позволяет достаточно просто выделить те из них, для которых точка 0 является регулярной точкой.

1. Прямое разложение области $\mathcal{D}(T^*)$. Поскольку оператор T^{-1} ограничен, то $\mathcal{R}(T^*) = \mathfrak{H}$ и, более того, для любого $h \in \mathfrak{H}$ найдется единственный в силу (1) вектор $g_h = Tf_h \in \mathcal{D}(T^*)$ такой, что $T^*g_h = h$ (см. [3] с. 563). Обозначая $\mathcal{R}_*(T) = \mathcal{R}(T) \cap \mathcal{D}(T^*)$, имеем $\mathfrak{H} = T^*\mathcal{R}_*(T)$. Из (1) также следует, что $\mathcal{R}_*(T) \neq \mathcal{R}(T)$, а из плотности $\mathcal{D}(T)$ в $\mathfrak{H}$ нетрудно видеть, что $\mathcal{R}_*(T)$ плотно в $\mathcal{R}(T)$.

Введем в рассмотрение оператор

$$\check{T}^* = T^* \big| \mathcal{R}_*(T), \qquad (2)$$

обратный к которому $\check{T}^{-*}$ существует, определен на $\mathfrak{H}$, значит существует и оператор $(\check{T}^{-*})^*$.

Предложение 1. *Пусть симметрический оператор* T *имеет ограниченный обратный. Тогда* $(\check{T}^{-*})^* = T^{-1}P_{\mathcal{R}}$, *и оператор* $\check{T}^{-*}$ *ограничен*

$$\| \check{T}^{-*} \| = \| (\check{T}^{-*})^* \| = \| T^{-1} \|.$$

Доказательство. Для произвольного вектора $h \in \mathfrak{H}$ из определениия (2) следует, что $\check{T}^{-*}h = Tf_h$, где $f_h \in \mathcal{D}(T)$ – единственный вектор такой, что $Tf_h \in \mathcal{D}(T^*)$ и $T^*Tf_h = h$. Тогда

$$\| \check{T}^{-*}h \|^2 = \langle Tf_h, Tf_h \rangle = \langle f_h, T^*Tf_h \rangle = \langle f_h, h \rangle =$$
$$\langle T^{-1}\check{T}^{-*}h, h \rangle \le \| T^{-1} \| \, \| \check{T}^{-*}h \| \, \| h \|,$$

следовательно $\| \check{T}^{-*} \| \le \| T^{-1} \|$.

Если $\hat{h} = P_{\mathcal{R}}\hat{h} + P_{\mathcal{K}}\hat{h} = Tf_0 + P_{\mathcal{K}}\hat{h} \in \mathfrak{H}$, то

$$\langle \check{T}^{-*}h, \hat{h} \rangle = \langle Tf_h, \hat{h} \rangle = \langle Tf_h, Tf_0 \rangle = \langle h, f_0 \rangle = \langle h, T^{-1}P_{\mathcal{R}}\hat{h} \rangle,$$

и доказано, что $(\check{T}^{-*})^* = T^{-1}P_{\mathcal{R}}$.

Очевидно, оператор $(\check{T}^{-*})^*$ является расширением оператора T^{-1}, так что $\| \check{T}^{-*} \| \ge \| T^{-1} \|$ и из $\| \check{T}^{-*} \| = \| (\check{T}^{-*})^* \|$ следует доказываемое предложение.

Введем линейное многообразие

$$\mathcal{L}(T^*) = \check{T}^{-*}\mathcal{K}(T^*) \subset \mathcal{R}_*(T). \qquad (3)$$

Основой настоящей работы является следующий факт.

Теорема 1. *Пусть симметрический оператор* T *имеет ограниченный обратный. Тогда область определения сопряженного оператора допускает прямое разложение*

$$\mathcal{D}(T^*) = \mathcal{D}(T) \dotplus \mathcal{K}(T^*) \dotplus \mathcal{L}(T^*). \qquad (4)$$

Доказательство. Из определения (3) имеем $\mathcal{K}(T^*) \perp \mathcal{L}(T^*)$, а из обратимости оператора T следует, что $\mathcal{D}(T) \cap \mathcal{K}(T^*) = \{0\}$.

Пусть $f_0 \in \mathcal{D}(T)$, $k \in \mathcal{K}(T^*)$, $l \in \mathcal{L}(T^*)$. Так как $T^* l \in \mathcal{K}(T^*)$, то, предполагая, что $f_0 + k = l$, получим противоречивое $Tf_0 = T^* l$, следовательно, и $[\mathcal{D}(T) \dotplus \mathcal{K}(T^*)] \cap \mathcal{L}(T^*) = \{0\}$.

Рассмотрим вектор $f \in \mathcal{D}(T^*)$, не принадлежащий $\mathcal{D}(T)$.

Если $P_{\mathcal{K}} T^* f = 0$, то $T^* f = Tf_0$ и $f = f_0 + k$, если же $P_{\mathcal{R}} T^* f = 0$, то $T^* f = k$ и $f = l$, в согласии с доказываемой формулой.

Пусть $T^* f = Tf_0 + k_0$, где $f_0 \neq 0$, $k_0 \neq 0$.

Очевидно, что $f - \check{T}^{-*} T^* f \in \mathcal{K}(T^*)$ и $f = \check{T}^{-*} T^* f + k_1$, где не исключается, что $k_1 = 0$. Отсюда имеем

$$f = \check{T}^{-*}(Tf_0 + k_0) + k_1 = \check{T}^{-*} Tf_0 + l_0 + k_1, \; l_0 = \check{T}^{-*} k_0. \qquad (5)$$

Из определения (2) следует, что $\check{T}^{-*} Tf_0 = Tf'_0 \in \mathcal{D}(T^*)$ и $T^* Tf'_0 = Tf_0$.

Если $Tf'_0 \in \mathcal{D}(T)$, то $Tf'_0 = f_0$ и из (5) следует требуемое.

Если $Tf_0 \notin \mathcal{D}(T)$, то $T^*(Tf'_0 - f_0) = 0$, так что $Tf'_0 - f_0 = k_2$, $k_2 \neq 0$, и из (5) окончательно получим

$$f = Tf'_0 + l_0 + k_1 = f_0 + l_0 + (k_1 + k_2),$$

доказывая теорему.

Из приведенного доказательства и предложения 1 следует, что слагаемые вектора $f \in \mathcal{D}(T^*)$ в представлении (4) определяются формулами

$$f_0 = T^{-1} P_{\mathcal{R}} T^* f = (\check{T}^{-*})^* T^* f, \; k = P_{\mathcal{K}}[f - (\check{T}^{-*})^* T^* f],$$

$$l = \check{T}^{-*} P_{\mathcal{K}} T^* f. \qquad (6)$$

2. Метод Калкина для оператора T**.** В основе теории, предложенной Калкиным в [2] для расширений симметрических операторов, лежит следующее понятие, которое приводится здесь с допущением определенной вольности (см. [2], опр.1.1).

Пусть T *– простой замкнутый симметрический оператор с областью определения* $\mathcal{D}(T)$, *плотной в* $\mathfrak{H}$, и $\mathcal{H}$ *– некоторое гильбертово пространство.*

Оператор Γ *с* $\mathcal{D}(\Gamma) = \mathcal{D}(T^*)$, $\mathcal{R}(\Gamma) = \mathcal{H}$, $\mathcal{K}(\Gamma) = \mathcal{D}(T)$ *называется ограниченным оператором приведения для* T^*, *если существует унитарный оператор* $J \in [\mathcal{H}]$ *такой, что* $J^* = -J$, $J^2 = -I_{\mathcal{H}}$ *и для любых* $f, g \in \mathcal{D}(T^*)$ *имеет место тождество* (*тождество Лагранжа*)

$$\{f, g\} := \langle T^* f, g \rangle - \langle f, T^* g \rangle = \langle J\Gamma f, \Gamma g \rangle_{\mathcal{H}}. \qquad (7)$$

Показано, что если $\mathcal{H}_{\pm}$ – собственные подпространства оператора J, отвечающие собственным значениям $\pm i$, то $\dim \mathcal{H}_{\pm} = n_{\pm}$, где $n_{\pm}$ – дефектные числа оператора T (см. [2], т.3.7). Если $\dim \mathcal{H}_{+} = \dim \mathcal{H}_{-}$, то существуют подпространства $\mathcal{H}_\mathcal{J} \subset \mathcal{H}$, которые называются гипермаксимальными J-симметрическими (нейтральными), такие, что $J\mathcal{H}_\mathcal{J} = \mathcal{H}_\mathcal{J}^{\perp}$, и формула

$$T_\mathcal{J} = T^* \big|\mathcal{D}(T_\mathcal{J}),\ \mathcal{D}(T_\mathcal{J}) = \{ f \in \mathcal{D}(T^*);\ \Gamma f \in \mathcal{H}_\mathcal{J} \} \tag{8}$$

устанавливает взаимно-однозначное соответствие между множествами всех гипермаксимальных нейтральных подпространств и всех самосопряженных расширений симметрического оператора T (см. [2], т.2.2).

Пусть $f, g \in \mathcal{D}(T^*)$ и, согласно разложению (3),

$$f = f_0 + k_f + \check{T}^{-*}k'_f,\ g = g_0 + k_g + \check{T}^{-*}k'_g\ . \tag{9}$$

Предложение 2. *Для симметрического оператора с ограниченным обратным тождество Лагранжа допускает представление в форме*

$$\{f, g\} = \langle k'_f, k_g\rangle - \langle k_f, k'_g\rangle. \tag{10}$$

Доказательство этой формулы сводится к прямым вычислениями с учетом симметричности оператора T и ортогональности $\mathcal{K}(T^*) \perp \mathcal{L}(T^*)$, поскольку $\check{T}^{-*}k'_f, \check{T}^{-*}k'_g \in \mathcal{L}(T^*)$.

Обозначим через $\mathcal{H}_0$ гильбертово пространство $\mathcal{K}(T^*)$, введем новое

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_0 = \{[k_1,k_2];\ k_1,k_2 \in \mathcal{H}_0\}$$

и определим операторы Γ и J как

$$\Gamma f = [k_f, k'_f],\ f = f_0 + k_f + \check{T}^{-*}k'_f \in \mathcal{D}(T^*);$$
$$J[k_1,k_2] = [k_2, -k_1]. \tag{11}$$

Теперь формула (10) представится в форме (7), так что удовлетворены все условия, определяющие оператор приведения для T^*.

Пусть P_U – ортогоналный проектор в $\mathcal{H}$. Нетрудно видеть, что P_U проектирует $\mathcal{H}$ на гипермаксимальнное нейтральное подпространство тогда и только тогда, когда

$$JP_U + P_UJ = J.$$

Несложно проверить, что это условие равносильно следующему.

Предложение 3. *Подпространство* $\mathcal{H}_U \subset \mathcal{H}$ *является гипермаксимальным нейтральным тогда и только тогда, когда*

$$\mathcal{H}_U = \{[k_1,k_2];\ (U + iI_0)k_1 = i(U - iI_0)k_2,\ k_1,k_2 \in \mathcal{H}_0\}, \tag{12}$$

где I_0 *– единичный оператор в* $\mathcal{H}_0$, *а оператор* $U \in [\mathcal{H}_0]$ *является унитарным*.

Таким образом, формулой (12) дается описание множества гипермаксимальных нейтральных подпространств в терминах унитарных операторов в $\mathcal{H}_0$.

Ограничимся рассмотрениями тех случаев, когда или $i \in \rho(U)$, или $-i \in \rho(U)$. Тогда соответствующие преобразования Кэли

$$A = -i(U + iI_0)(U - iI_0)^{-1},\ \text{или}\quad B = i(U - iI_0)(U + iI_0)^{-1}$$

являются самосопряженными операторами в $[\mathcal{H}_0]$ и подпространства

$$\mathcal{H}_{IA} = \{[k_1, Ak_1];\ k_1 \in \mathcal{H}_0\},\ \text{или}\ \mathcal{H}_{BI} = \{[Bk_2, k_2];\ k_2 \in \mathcal{H}_0\} \tag{13}$$

являются гипермаксимальными нейтральными.

Отметим, что обратные преобразования

$$U = -i(A - iI_0)(A + iI_0)^{-1} \text{ или } U = i(B + iI_0)(B - iI_0)^{-1}$$
определены для любых самосопряженных операторов $A, B \in [\mathscr{H}_0]$, следовательно, подпространства, задаваемые формулой (13), являются гипермаксимальнными нейтральными для любых таких операторов.

Если и $i \in \rho(U)$, и $-i \in \rho(U)$, то оператор B имеет ограниченный обратный, $B^{-1} = A$ и подпространства в (13) совпадают.

Итогом изложенного выше является следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть симметрический оператор* T *имеет ограниченный обратный. Тогда он обладает самосопряженними расширениями следующх типов:*

$$T_{IA}f = Tf_0 + k,\ f = f_0 + \check{T}^{-*}k + Ak \in \mathscr{D}(T_{IA});$$

$$T_{BI}f = Tf_0 + Bk,\ f = f_0 + \check{T}^{-*}Bk + k \in \mathscr{D}(T_{BI})$$

таких, что $0 \in \rho(T_{IA})$ *для любого* A, и $0 \notin \rho(T_{BI})$, *если* $0 \notin \rho(B)$.

Доказательство следует из верхних формул, являющихся другой формой записи формулы (8), поскольку в силу (1) очевидно, что $\mathscr{R}(T_{IA}) = \mathfrak{H}$.

Среди указанных расширений можно выделить "крайние" – те, которые отвечают случаям $U = -iI_0$ и $U = iI_0$, или, соответственно $A = 0$ и $B = 0$. Тогда

$$T_{I0}f = Tf_0 + k,\ f = f_0 + \check{T}^{-*}k \text{ и } T_{0I}f = Tf_0,\ f = f_0 + k.$$

Сравнение с работой [1] показывает, что $T_{I0} = S$, где S – построенное там самосопряженное расширение оператора T.

Очевидно, что для расширения T_{0I} имеем $\mathscr{K}(T_{0I}) = \mathscr{K}(T^*)$.

В заключение заметим следующее.

Доказательство теоремы Калкина приведено и в ([3], с .629), где расширение T_{I0} получено отличным от [1] путем.

В работе [1], с теми же $\mathscr{H}$ и $J \in [\mathscr{H}]$, оператор $\Gamma: \mathscr{D}(T^*) \to \mathscr{H}$ определен формулой

$$\Gamma f = [f - S^{-1}T^*f,\ P_{\mathscr{K}}T^*f],\ f \in \mathscr{D}(T^*). \tag{14}$$

Очевидно, $T^*S^{-1}h = h$, $h \in \mathfrak{H}$, откуда следует, что $f - S^{-1}T^*f = k$ и, если $T^*f = Tf_0 + k'$, $k' = P_{\mathscr{K}}T^*f$, то $S^{-1}T^*f = S^{-1}(Tf_0 + k') = f_0 + S^{-1}k'$,
значит

$$f = f_0 + S^{-1}k' + k,\ f \in \mathscr{D}(T^*). \tag{15}$$

Эта формула известна как разложение Вишика, а операторы, отображающие $\mathscr{D}(T^*)$ на $\mathscr{K}(T^*)$ формулами $\Gamma_1 f = k'$, $\Gamma_2 f = k$, – как граничные операторы Вишика (см. [4, 5]).

Из соотношений (9) и (6) следует, что в (15) имеем

$$k = k_f,\ k' = k'_f.$$

Таким образом, определение оператора приведения для T^* формулой (11) совпадает с определением (14) из работы [1].

Институт механики НАН РА
maperch@gmail.com

П. Э. Мелик-Адамян

Об операторе приведения Калкина для обратимых симметрических операторов

Получено некоторое разложение в прямую сумму для области определения оператора, сопряженного к обратимому симметрическому, позволившее опредеделить оператор приведения Калкина. С его помощью представлено множество ограниченно обратимых самосопряженых расширений рассматриваемого оператора.

Պ. Է. Մելիք-Ադամյան

Հակադարձելի սիմետրիկ օպերատորների համար Կալկինի վերածող օպերատորի մասին

Հակադարձելի սիմետրիկ օպերատորների համալուծի որոշման տիրույթի համար ստացված է նրա որոշակի վերլուծությունը ուղիղ գումարի, ինչը հնարավորություն է տվել սահմանելու Կալկինի վերածող օպերատորը: Նրա միջոցով ներկայացված է դիտարկվող օպերատորի հակադարձելի ինքնահամալուծ ընդլայնումների բազմությունը:

P. E. Melik-Adamyan

On the Calkin Reduction Operator for Invertible Symmetric Operators

For an invertible symmetric operator a certain direct sum decomposition of its adjoint's domain is obtained. This allowed to define the Calkin reduction operator, and, with its help, to present the set of invertible self-adjoint extensions of a given symmetric operator.

Литература

1. *Calkin J.W.,* Duke Math.J., 7, 1940, 504-508.
2. *Calkin J.W.,* Trans.Amer.Math.Soc., 45, 1939, 365-442.
3. *Смирнов В.И.,* Курс высшей математики, т. V, Физматгиз, Москва. 1959.
4. *Белишев М.И,, Демченко М.Н.,* Зап. науч. сем. ЛОМИ, 409. 2012, 17-39.
5. *Вишик М.И.,* Труды ММО, 1, 1952, 187-246.