

МЕХАНИКА

УДК 539.3:538.913

**Иностраный член НАН РА, академик РАН А. А. Берлин¹,
 Л. И. Маневич¹, член-корреспондент НАН РА С. О. Саркисян²,
 С. А. Тиман¹**

**Континуальная моментная теория упругости стесненного
 вращения для кристалла полиэтилена**

(Представлено 4/V 2016)

Ключевые слова: *теория, моментная упругость, континуальный, стесненное вращение, кристалл, полиэтилен.*

1. Введение. Одной из основных задач микро- и наномеханики является изучение механического поведения материалов с учетом реальной внутренней структуры (атомарной или молекулярной) [1]. Понятно, что в структурную модель материала явным образом войдут геометрические параметры структуры – размеры и расположение частиц (атомов, молекул или макромолекул) и силовые параметры межатомных или межмолекулярных взаимодействий (параметры силовых потенциалов). От указанных параметров в конечном итоге зависят и эффективные модули упругости материала на континуальном уровне. Меняя эти параметры, можно управлять физико-механическими свойствами материала, что и является основной задачей нанотехнологии. В случае конкретного материала компоненты тензора упругости могут быть либо определены (как обычно) в результате макроскопического эксперимента, либо рассчитаны с использованием молекулярной модели данного материала и молекулярно-динамического моделирования. Обычно, для большинства материалов межатомные силовые взаимодействия считаются центральными [2, 3]. В работах [4-7] выдвигаются обоснованные утверждения об учете в межатомных или межмолекулярных взаимодействиях кроме центральных еще и моментных взаимодействий. В связи с этим следует учитывать, что полимерные кристаллы имеют особенную специфику, обусловленную их цепной структурой, а также, конечно, и то, что при зигзагообразной структуре (например, у полиэтилена) у таких кристаллов кроме продольной (вдоль оси цепной структуры) имеется и явно выраженная изгибная жесткость.

Известно, что для описания структурных свойств таких полимерных цепей кроме центрального взаимодействия необходимо учитывать моментное или так называемое торсионное взаимодействие. Это означает, что корректная теория упругости таких полимерных кристаллов, как полиэтилен, должна быть моментной, т. е. принадлежать классу теорий типа Коссера. В связи с этим в работах [8-10], по-видимому, впервые, высказывалось мнение о применимости к простейшему полимерному кристаллу – полиэтилену континуальной моментной теории, построение которой можно осуществлять непосредственно по молекулярной модели. Однако в этих работах полный анализ был проведен только для случая продольной динамики, в котором явно определенные моментные характеристики играли, как оказалось, подчиненную роль. В работе [11] эта проблема изучена в случае трансверсальной динамики. После построения молекулярной модели полиэтилена и перехода к континуальной модели (в длинноволновом приближении) показывается, что в дифференциальных уравнениях типа Ламе присутствуют четвертые производные от перемещений по продольной координате, а это означает, что в данном случае имеем дело с моментной теорией упругости. Весьма важно констатировать, что континуальные модули упругости в указанной работе могут быть вычислены через параметры (геометрические и силовые) молекулярной модели. Возникает весьма актуальный вопрос: с какой феноменологической моментной теорией упругости имеем дело в данном случае для кристалла полиэтилена.

2. Континуальная моментная теория упругости стесненного вращения для кристалла полиэтилена. То, что в континуальные уравнения типа Ламе [11] для полиэтилена входят четвертые производные от перемещений по продольной координате, приводит к предположению, что это – система уравнений моментной теории упругости именно со стесненным вращением. Определение этой системы и является основным вопросом данного исследования (отметим, что эта модель, так или иначе, будет частным случаем общей теории со стесненным вращением [12]). Далее, исходя из физического подхода к деформациям полимерных цепей типа зигзаг ясно, что изгиб цепи происходит в двух взаимно перпендикулярных плоскостях и что соответствующие моментные напряжения (в континуальном приближении) взаимно связаны. Это означает, что упругие свойства (в том числе и моментные) континуального полиэтилена имеют характер ортотропии.

На рис. 1 приведено напряжённое состояние в произвольной внутренней точке континуального приближения полиэтилена. Здесь $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{31}, \sigma_{13}, \sigma_{32}, \sigma_{23}$ – обычные напряжения, а μ_{31} и μ_{13} – моментные напряжения. Моментные напряжения удобно изображать также векторами с двумя стрелками (рис. 1).

Применяя к указанному элементарному параллелепипеду уравнения равновесия (или движения, если рассматриваемое тело находится в движении, придерживаясь принципа Даламбера), запишем

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum Z = 0, \quad \sum M_x = 0, \quad \sum M_y = 0, \quad \sum M_z = 0.$$

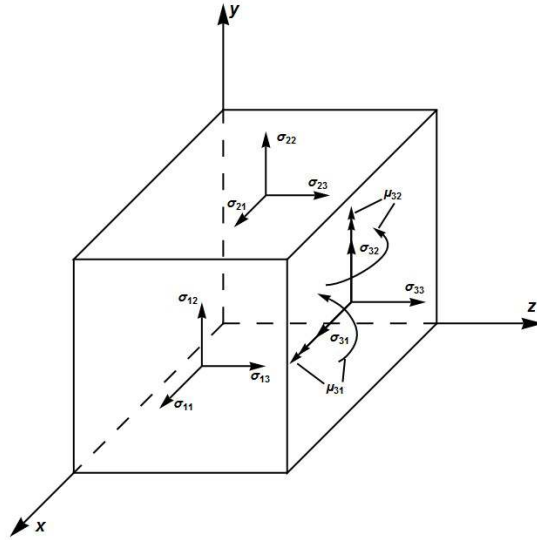


Рис. 1.

После раскрытия этих уравнений приходим к следующим дифференциальным уравнениям равновесия (или движения) моментной теории упругости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial z} &= 0 & \left(\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \right), & \quad \frac{\partial \mu_x}{\partial z} + (\sigma_{23} - \sigma_{32}) = 0 & \quad \left(I \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial t^2} \right), \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial z} &= 0 & \left(\rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \right), & \quad \frac{\partial \mu_y}{\partial z} + (\sigma_{31} - \sigma_{13}) = 0 & \quad \left(I \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial t^2} \right), \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} &= 0 & \left(\rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \right), & \quad \sigma_{12} = \sigma_{21}. & \end{aligned} \quad (1)$$

где ρ – плотность материала полиэтилена, а I – константа, характеризующая инерционные свойства континуального полиэтилена при вращательном движении элементарного параллелепипеда (в дальнейшем инерционными моментами вращательного движения $I \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial t^2}$, $I \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial t^2}$ будем пренебрегать).

Геометрические соотношения деформации выражаются формулами

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial y}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial z}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}, \quad (2)$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x}, \quad \varepsilon_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y}, \quad \chi_{31} = \frac{\partial \omega_1}{\partial z}, \quad \chi_{32} = \frac{\partial \omega_2}{\partial z}, \quad (3)$$

где ω_1 и ω_2 – угол вращения элементарного параллелепипеда относительно осей x и y .

Так как имеем дело со стесненным вращением, указанные компоненты вектора вращения частиц связаны с перемещениями по известной векторной формуле классической теории упругости: $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{u}$.

В данном случае имеем

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z} \right), \quad \omega_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x} \right). \quad (4)$$

Физические соотношения упругости представляют соотношения упругости для ортотропного упругого тела, когда в напряженном состоянии участвуют также и моментные напряжения μ_{31}, μ_{32} :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = c_{11}^{11} \varepsilon_{11} + c_{22}^{11} \varepsilon_{22} + c_{33}^{11} \varepsilon_{33}, & \sigma_{31} + \sigma_{13} = 2c_{13}^{13} \varepsilon_{13}, \\ \sigma_{22} = c_{22}^{11} \varepsilon_{11} + c_{22}^{22} \varepsilon_{22} + c_{33}^{22} \varepsilon_{33}, & \sigma_{23} + \sigma_{32} = 2c_{23}^{23} \varepsilon_{23}, \\ \sigma_{33} = c_{33}^{11} \varepsilon_{11} + c_{33}^{22} \varepsilon_{22} + c_{33}^{33} \varepsilon_{33}, & \mu_{31} = k_1 \chi_{31} - k_2 \chi_{32}, \\ \sigma_{21} = \sigma_{12} = c_{12}^{12} \varepsilon_{12}, & \mu_{32} = k_1 \chi_{32} - k_2 \chi_{31}. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь C_{ij}^{pq}, k_1 и k_2 – упругие константы континуального полиэтилена, которые в работе [11] выражаются через параметры молекулярной модели полиэтилена.

Подставляя (2), (3) (с учетом (4)) в формулы обобщенного закона Гука (5) и в полученные уравнения равновесия (1), приходим к уравнениям типа Ламе построенной феноменологической моментной теории упругости со стесненным вращением:

$$\begin{aligned} & \left(c_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{12}^{12} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c_{13}^{13} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u_1 + (c_{22}^{11} + c_{12}^{12}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} + (c_{33}^{11} + c_{13}^{13}) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial z} - \\ & - \frac{1}{4} k_1 \frac{\partial^4 u_1}{\partial z^4} + \frac{1}{4} k_1 \frac{\partial^4 u_3}{\partial x \partial z^3} + \frac{1}{4} k_2 \frac{\partial^4 u_3}{\partial y \partial z^3} - \frac{1}{4} k_2 \frac{\partial^4 u_2}{\partial z^4} = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & (c_{12}^{12} + c_{22}^{11}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + \left(c_{12}^{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{22}^{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c_{23}^{23} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u_2 + (c_{33}^{22} + c_{23}^{23}) \frac{\partial^2 u_3}{\partial y \partial z} + \\ & + \frac{1}{4} k_1 \frac{\partial^4 u_3}{\partial y \partial z^3} - \frac{1}{4} k_1 \frac{\partial^4 u_2}{\partial z^4} - \frac{1}{4} k_2 \frac{\partial^4 u_1}{\partial z^4} + \frac{1}{4} k_2 \frac{\partial^4 u_3}{\partial x \partial z^3} = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & (c_{13}^{13} + c_{33}^{11}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial z} + (c_{23}^{23} + c_{33}^{22}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial y \partial z} + \left(c_{13}^{13} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{23}^{23} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c_{33}^{33} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u_3 + \\ & + \frac{1}{4} k_1 \frac{\partial^4 u_1}{\partial x \partial z^3} + \frac{1}{4} k_2 \frac{\partial^4 u_1}{\partial y \partial z^3} + \frac{1}{4} k_2 \frac{\partial^4 u_2}{\partial x \partial z^3} + \frac{1}{4} k_1 \frac{\partial^4 u_2}{\partial y \partial z^3} - \frac{1}{4} k_1 \frac{\partial^4 u_3}{\partial x^2 \partial z^2} - \\ & - \frac{1}{4} k_1 \frac{\partial^4 u_3}{\partial y^2 \partial z^2} - \frac{1}{2} k_2 \frac{\partial^4 u_3}{\partial x \partial y \partial z^2} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

3. Закон сохранения энергии. Чтобы получить уравнение баланса энергии (закон сохранения энергии), поступим следующим образом: умножим первые три уравнения равновесия из системы (1) соответственно на u_1, u_2, u_3 и сложим все эти равенства. Полученное равенство интегрируем по объёму тела и после некоторых преобразований придем к следующему равенству (с учетом формул (2), а также того, что $\sigma_{12} = \sigma_{21}$):

$$\begin{aligned} & \iiint_{(V)} \left(\sigma_{11} \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \varepsilon_{22} + \sigma_{33} \varepsilon_{33} + \sigma_{12} \varepsilon_{12} + \sigma_{13} \frac{\partial u_3}{\partial x} + \sigma_{31} \frac{\partial u_1}{\partial z} + \sigma_{23} \frac{\partial u_3}{\partial y} + \sigma_{32} \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) dx dy dz = \\ & = \iiint_{(V)} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{11} u_1 + \sigma_{12} u_2 + \sigma_{13} u_3) + \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_{21} u_1 + \sigma_{22} u_2 + \sigma_{23} u_3) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{31} u_1 + \sigma_{32} u_2 + \sigma_{33} u_3) + \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{31} u_1 + \sigma_{32} u_2 + \sigma_{33} u_3) \right] dx dy dz. \end{aligned} \quad (9)$$

В этом равенстве (в левой части) вместо $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12} = \sigma_{21}$ подставим их выражения по обобщенному закону Гука (5), а вместо $\sigma_{13}, \sigma_{31}, \sigma_{23}, \sigma_{32}$ – по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= c_{13}^{13} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \mu_y}{\partial z}, \quad \sigma_{32} = c_{23}^{23} \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \mu_x}{\partial z}, \\ \sigma_{31} &= c_{13}^{13} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial \mu_y}{\partial z}, \quad \sigma_{23} = c_{23}^{23} \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial \mu_x}{\partial z}, \end{aligned} \quad (10)$$

которые получаются при решении следующих систем уравнений:

$$\begin{cases} \sigma_{13} + \sigma_{31} = 2c_{13}^{13} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \right), & \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{23} + \sigma_{32} = 2c_{23}^{23} \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} \right), \\ \sigma_{32} - \sigma_{23} = \frac{\partial \mu_x}{\partial z}. \end{array} \right. \end{cases} \quad (11)$$

В результате (с учетом формул (4) и (3)) получим закон сохранения энергии в построенной моментной теории упругости со стесненным вращением

$$W = A, \quad (12)$$

где W – потенциальная энергия деформации в теле,

$$W = \iiint_{(V)} W_0 dx dy dz, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} W_0 &= \frac{1}{2} \left(c_{11}^{11} \varepsilon_{11}^2 + c_{22}^{22} \varepsilon_{22}^2 + c_{33}^{33} \varepsilon_{33}^2 + c_{12}^{12} \varepsilon_{12}^2 + c_{13}^{13} \varepsilon_{13}^2 + c_{23}^{23} \varepsilon_{23}^2 + 2c_{22}^{11} \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + 2c_{33}^{11} \varepsilon_{11} \varepsilon_{33} + \right. \\ & \left. + 2c_{33}^{22} \varepsilon_{22} \varepsilon_{33} + k_1 \chi_{31}^2 + k_1 \chi_{32}^2 - 2k_2 \chi_{31} \chi_{32} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

представляет собой плотность потенциальной энергии деформации; A – работа внешних поверхностных силовых и моментных напряжений:

$$R' = \frac{1}{2} \iint_{(S)} [(\sigma_{11}u_1 + \sigma_{12}u_2 + \sigma_{13}u_3) \cos \lambda + (\sigma_{21}u_1 + \sigma_{22}u_2 + \sigma_{23}u_3) \cos \mu + (\sigma_{31}u_1 + \sigma_{32}u_2 + \sigma_{33}u_3 + \mu_{31}\omega_1 + \mu_{32}\omega_2) \cos v] dS \quad (15)$$

Здесь λ, μ, ν – углы внешней нормали поверхности тела (S) с координатными осями x, y, z (далее будем считать, что тело имеет призматическую форму).

4. Вариационное уравнение. Функционал принципа типа Лагранжа (т. е. функционал принципа возможных перемещений) для данного случая можем записать так:

$$I = \iiint_{(V)} W_0 dx dy dz - \iint_{(S)} [(\sigma'_{11}u_1 + \sigma'_{12}u_2 + \sigma'_{13}u_3) \cos \lambda + (\sigma'_{21}u_1 + \sigma'_{22}u_2 + \sigma'_{23}u_3) \cdot \cos \mu + (\sigma'_{31}u_1 + \sigma'_{32}u_2 + \sigma'_{33}u_3 + \mu'_{31}\omega_1 + \mu'_{32}\omega_2) \cos v] dS. \quad (16)$$

Сам принцип Лагранжа имеет вид

$$\delta I = \delta W - \delta A = 0, \quad (17)$$

где

$$\delta A = \iint_{(S)} [(\sigma'_{11}\delta u_1 + \sigma'_{12}\delta u_2 + \sigma'_{13}\delta u_3) \cos \lambda + (\sigma'_{21}\delta u_1 + \sigma'_{22}\delta u_2 + \sigma'_{23}\delta u_3) \cos \mu + (\sigma'_{31}\delta u_1 + \sigma'_{32}\delta u_2 + \sigma'_{33}\delta u_3 + \mu'_{31}\delta \omega_1 + \mu'_{32}\delta \omega_2) \cos v] dS \quad (18)$$

(на поверхности (S) будем считать, что заданы значения силовых и моментных напряжений).

Составляя δW , после некоторых преобразований получим:

$$\begin{aligned} \delta W = & \iint_{(S)} [(\sigma_{11}\delta u_1 + \sigma_{12}\delta u_2 + \sigma_{13}\delta u_3) \cos \lambda + (\sigma_{21}\delta u_1 + \sigma_{22}\delta u_2 + \sigma_{23}\delta u_3) \cos \mu + \\ & + (\sigma_{31}\delta u_1 + \sigma_{32}\delta u_2 + \sigma_{33}\delta u_3 + \mu_{31}\delta \omega_1 + \mu_{32}\delta \omega_2) \cos v] dS - \\ & - \iiint_{(V)} \left[\left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial z} \right) \delta u_1 + \right. \\ & + \left(\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial z} \right) \delta u_2 + \left(\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} \right) \delta u_3 + \\ & \left. + \left[\frac{\partial \mu_{31}}{\partial z} + (\sigma_{23} - \sigma_{32}) \right] \delta \omega_1 + \left[\frac{\partial \mu_{32}}{\partial z} + (\sigma_{31} - \sigma_{13}) \right] \delta \omega_2 \right] dx dy dz. \end{aligned} \quad (19)$$

При выводе этой формулы были использованы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} c_{13}^{13} \varepsilon_{13} \delta \varepsilon_{13} = c_{13}^{13} \varepsilon_{13} \left(\frac{\partial \delta u_1}{\partial z} + \frac{\partial \delta u_3}{\partial x} \right) &= \frac{1}{2} (\sigma_{13} + \sigma_{31}) \left(\frac{\partial \delta u_1}{\partial z} + \frac{\partial \delta u_3}{\partial x} \right) = \\ = (\sigma_{13} - \sigma_{31}) \delta \omega_2 + \frac{\partial (\sigma_{13} \delta u_3)}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x} \delta u_3 + \frac{\partial (\sigma_{31} \delta u_1)}{\partial z} - \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial z} \delta u_1 \end{aligned} \quad (20)$$

и, аналогично,

$$c_{23}^{23} \varepsilon_{23} \delta \varepsilon_{23} = (\sigma_{32} - \sigma'_{23}) \delta \omega_1 + \frac{\partial(\sigma_{23} \delta u_3)}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial y} \delta u_3 + \frac{\partial(\sigma_{32} \delta u_2)}{\partial z} - \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial z} \delta u_2.$$

Таким образом, принцип Лагранжа примет вид

$$\begin{aligned} \delta I = & \iint_S \left\{ [(\sigma_{11} - \sigma'_{11}) \delta u_1 + (\sigma_{12} - \sigma'_{12}) \delta u_2 + (\sigma_{13} - \sigma'_{13}) \delta u_3] \cos \lambda + [(\sigma_{21} - \sigma'_{21}) \delta u_1 + \right. \\ & \left. + (\sigma_{22} - \sigma'_{22}) \delta u_2 + (\sigma_{23} - \sigma'_{23}) \delta u_3 + (\mu_{31} - \mu'_{31}) \delta \omega_1 + (\mu_{32} - \mu'_{32}) \delta \omega_2 \right\} \cos \nu \, dS - \\ & - \iiint_{(V)} \left\{ \left[\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial z} \right] \delta u_1 + \left[\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial z} \right] \delta u_2 + \right. \\ & \left. + \left[\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} \right] \delta u_3 + \left[\frac{\partial \mu_{31}}{\partial z} + (\sigma_{23} - \sigma_{32}) \right] \delta \omega_1 + \right. \\ & \left. + \left[\frac{\partial \mu_{32}}{\partial z} + (\sigma_{31} - \sigma_{13}) \right] \delta \omega_2 \right\} dx dy dz = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Из этого вариационного уравнения следуют все шесть уравнений равновесия (1), а также естественные граничные условия (если тело имеет призматическую форму):

$$1) \lambda = 0^0, \quad \mu = 90^0, \quad \nu = 90^0$$

$$\iint_{(S)} [(\sigma_{11} - \sigma'_{11}) \delta u_1 + (\sigma_{12} - \sigma'_{12}) \delta u_2 + (\sigma_{13} - \sigma'_{13}) \delta u_3] dS = 0$$

$$1) \sigma_{11} = \sigma'_{11}, \quad \sigma_{12} = \sigma'_{12}, \quad \sigma_{13} = \sigma'_{13}.$$

$$2) \lambda = 90^0, \quad \mu = 0^0, \quad \nu = 90^0$$

$$\iint_{(S)} [(\sigma_{21} - \sigma'_{21}) \delta u_1 + (\sigma_{22} - \sigma'_{22}) \delta u_2 + (\sigma_{23} - \sigma'_{23}) \delta u_3] dS = 0$$

$$2) \sigma_{21} = \sigma'_{21}, \quad \sigma_{22} = \sigma'_{22}, \quad \sigma_{23} = \sigma'_{23}.$$

$$3) \lambda = 90^0, \quad \mu = 90^0, \quad \nu = 0^0$$

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} [(\sigma_{31} - \sigma'_{31}) \delta u_1 + (\sigma_{32} - \sigma'_{32}) \delta u_2 + (\sigma_{33} - \sigma'_{33}) \delta u_3 + \\ + (\mu_{31} - \mu'_{31}) \delta \omega_1 + (\mu_{32} - \mu'_{32}) \delta \omega_2] dS = 0 \end{aligned}$$

$$3) \sigma_{31} = \sigma'_{31}, \quad \sigma_{32} = \sigma'_{32}, \quad \sigma_{33} = \sigma'_{33}, \quad \mu_{31} = \mu'_{31}, \quad \mu_{32} = \mu'_{32}.$$

Таким образом, построена моментная теория ортотропного тела со стесненным вращением (как дифференциальная, так и вариационная формы) как адекватная континуальная теория полимера полиэтилена.

В дальнейшем к этой теории будем применять асимптотический метод (на основе физического малого параметра) работы [13] для построения наиболее простой трехмерной моментной теории со стесненным вращением и дальнейшего ее использования для решения конкретных задач в указанной моментной теории упругости, а также строить моментные теории со стесненным вращением (прикладные теории) для тонких стержней и пластин (на основе подхода, разработанного в работах [14-16]) и изуче-

ния на их основе различных задач статики, устойчивости и динамики для указанных тонких тел.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА и РФФИ (РФ) в рамках совместных научных программ 15RS-063 и 15-53-05093 соответственно.

¹Институт химической физики им. Н.Н.Семенова РАН

²Гюмрийский государственный педагогический институт им. М.Налбандяна

**Иностраный член НАН РА, академик РАН А. А. Берлин,
Л. И. Маневич, член-корреспондент НАН РА С. О. Саркисян,
С. А. Тиман**

**Континуальная моментная теория упругости стесненного
вращения для кристалла полиэтилена**

Построена континуальная моментная теория упругости со стесненным вращением, которая адекватна молекулярной теории кристаллического полиэтилена. Выведно уравнение баланса энергии и построен вариационный функционал указанной теории.

**ՀՀ ԳԱԱ արտասահմանյան անդամ, ՌԳԱ ակադեմիկոս Ա. Ա. Բերլին,
Լ. Ի. Մանևիչ, ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ս. Ն. Սարգսյան, Ս. Ա. Տիման**

**Պոլիէթիլենային բյուրեղի համար կաշկանդված պտույտներով
մոմենտային կոնտինուալ առաձգականության տեսությունը**

Կառուցված է կաշկանդված պտույտներով մոմենտային կոնտինուալ առաձգականության տեսություն, որը համարժեք է պոլիէթիլենային բյուրեղի մոլեկուլյար տեսությանը: Կաշկանդված պտույտներով մոմենտային կոնտինուալ նշված առաձգականության տեսության համար դուրս է բերված էներգիայի հաշվեկշռի հավասարումը և կառուցված է այդ տեսության վարիացիոն ֆունկցիոնալը:

**Foreign member of NAS RA, academician of AS of Russian Federation
A. A. Berlin, L. I. Manevich, corresponding member of NAS RA
S. H. Sargsyan, S. A. Timan**

**Continual Moment Theory of Elasticity with Constrained Rotation
for Polyethylene Crystal**

In the present paper continual moment theory of elasticity with constrained rotation is constructed, which is adequate to the molecular theory of crystalline polyethylene. Energy balance equation is obtained and variation functional of the above mentioned moment theory with constrained rotation is constructed.

Continual moment theory of elasticity with constrained rotation is constructed, which is adequate to the molecular theory of crystalline polyethylene. Energy balance equation is obtained and variation functional of the above mentioned moment theory with constrained rotation is constructed.

Литература

1. Введение в микро- и наномеханику. Математические модели и методы. Нижний Новгород. Изд-во Нижегородск. гос. технич. ун-та им Р. Е. Алексеева. 2010. 303 с.
2. Борн М., Кунь Х. Динамическая теория кристаллических решеток. М. Изд-во иностр. лит. 1958. 488 с.
3. Гольдштейн Р.В., Ченцов А.В. – Изв. РАН. Механика твердого тела. 2005. N 4. С. 57-74.
4. Иванова Е. А., Кривцов А. М., Морозов Н. Ф. – Прикл. матем. и механика. 2007. Т.71. N4. С. 595-615.
5. Беринский И. Е., Иванова Е. А., Кривцов А. М., Морозов Н. Ф. – Изв. РАН. Механика твердого тела. 2007. N5. С. 6-16.
6. Павлов И. С., Потанов А. И. – Доклады РАН. 2008. Т. 421. N 3. С. 348-352.
7. Suiker A. S. I., Metrikine A. V., De Borst R. – Inter. J. Solids and Structures. 2001. V. 38. P. 1563-1583.
8. Gendelman O. V., Manevitch L. I. – Macromol. Theory Simul. 1998. V. 7. P. 579-589.
9. Gendelman O. V., Manevitch L. I. – Macromol. Theory Simul. 1998. V. 7. P. 591-598.
10. Gendelman O. V., Manevitch L. I. – Inter. J. Solids and Structures. 1996. V. 33. P. 1781-1798.
11. Маневич Л. И., Саркисян С. О., Тиман С. А. В кн.: Сборник трудов XVII ежегодной научной конференции отдела полимеров и композиционных материалов Института химической физики им. Н. Н. Семенова РАН. Москва. 15-17 февраля 2016 г. М. Изд-во ИХФ РАН. 2016. С. 128-131.
12. Койтер В. Т. – Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1965. N 3. С. 89-112.
13. Маневич Л. И., Павленко А. В. Асимптотический метод в микромеханике композиционных материалов. Киев. Вища школа. 1991. 132 с.
14. Sargsyan S. H. – Journal of Materials Science and Engineering. 2012. V. 2. N1. P.98-108.
15. Саркисян С.О. – Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т. 53. Вып. 2. С. 148-155.
16. Саркисян С. О., Айрапетян Г. С. – Учен. зап. Гюмрийского гос. пед. ин-та им. М. Налбандяна. 2015. Вып. А. N 1. С. 7-41.