



Здесь  $N_r$  – поперечная сила,  $M_r$  – изгибающий момент,  $D$  и  $B$  – параметры, являющиеся обратными величинами жесткостей упругого защемления на вращение и поступательное вертикальное перемещение соответственно. В случае, когда торец вставленной части не контактирует с упругим массивом, эти параметры связаны соотношением [2]<sup>\*</sup>

$$D = \frac{3B}{a^2}. \quad (1.3)$$

Примем безразмеривающие обозначения:

$$\begin{aligned} r = R\rho, \quad s = \frac{h}{R}, \quad w = h\bar{w}, \quad k = \frac{B_r}{h}\bar{k}, \quad B_\theta = mB_r, \\ \varphi = \frac{B_r}{h^2}\bar{\varphi}, \quad N_r = \frac{h^3}{12}\varphi = \bar{N}_r B_r h \left( \bar{N}_r = \frac{\bar{\varphi}}{12} \right), \quad M_r = B_r h^2 \bar{M}_r, \\ M_\theta = B_r h^2 \bar{M}_\theta, \quad q = B_r \bar{q}, \quad B_r a_r = \chi, \quad a = \alpha h, \quad B = \frac{\beta}{B_r}, \quad D = \frac{3\beta}{\alpha^2 h^2 B_r}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

$B_r$ ,  $B_\theta$  и  $a_r$  выражаются упругими постоянными материала пластинки по известным формулам ([1], с.72).

Безразмерная поперечная сила и безразмерные изгибающие моменты в обозначениях (1.4) будут

$$\begin{aligned} \bar{N}_r &= \frac{\bar{\varphi}}{12}, \\ \bar{M}_r &= -\frac{s^2}{12\rho} \left[ \rho \frac{d^2 \bar{w}}{d\rho^2} + \nu_\theta \frac{d\bar{w}}{d\rho} - \frac{\chi}{10s} \left( \rho \frac{d\bar{\varphi}}{d\rho} + \nu_\theta \bar{\varphi} \right) + \frac{6A_1 \rho}{5s^2} (\bar{q} - \bar{k}\bar{w}) \right], \\ \bar{M}_\theta &= -\frac{ms^2}{12\rho} \left[ \frac{d\bar{w}}{d\rho} + \nu_r \rho \frac{d^2 \bar{w}}{d\rho^2} - \frac{\chi}{10s} \left( \bar{\varphi} + \nu_r \rho \frac{d\bar{\varphi}}{d\rho} \right) + \frac{6A_2 \rho}{5ms^2} (\bar{q} - \bar{k}\bar{w}) \right]. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Параметры  $A_1$  и  $A_2$  учитывают влияние обжатия, а  $\chi$  – влияние поперечного сдвига ([1], с.72).

С учетом (1.1) и (1.4) систему разрешающих дифференциальных уравнений задачи ([1], с.74) можно привести к виду

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\bar{\varphi}}{d\rho} + \bar{\varphi} - \frac{12}{s} \bar{k} \rho \bar{w} &= -\frac{12\bar{q}}{s} \rho, \\ \rho^2 \frac{d^3 \bar{w}}{d\rho^3} + \rho \frac{d^2 \bar{w}}{d\rho^2} - \left( m + \frac{6A_1 \bar{k}}{5s^2} \rho^2 \right) \frac{d\bar{w}}{d\rho} + \frac{6\bar{k}}{5s^2} (A_2 - A_1) \rho \bar{w} - \\ - \frac{\chi}{10s} \rho^2 \frac{d^2 \bar{\varphi}}{d\rho^2} - \frac{\chi \rho}{10s} \frac{d\bar{\varphi}}{d\rho} + \frac{1}{s^3} \left( \rho^2 + \frac{\chi ms^2}{10} \right) \bar{\varphi} &= \frac{6(A_2 - A_1)}{5s^2} \rho \bar{q}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Краевые условия (1.2) в безразмерном виде будут

$$\bar{w}|_{\rho=1} = -\left( \alpha s \frac{d\bar{w}}{d\rho} + \beta \bar{N}_r \right), \quad \left. \frac{d\bar{w}}{d\rho} \right|_{\rho=1} = \frac{3\beta}{\alpha^2 s} (\alpha \bar{N}_r + \bar{M}_r). \quad (1.7)$$

<sup>\*</sup> В этой работе в выражении (2.3) имеется опечатка: перед  $K_1 + K_2$  вместо  $R + a$  напечатано  $R + 2a$

Так как система (1.6) имеет четвертый порядок, то кроме условий (1.7) нужны еще два условия. Эти условия относятся к центру пластинки. Имея в виду, что в центре осесимметрично изгибаемой пластинки производная прогиба равна нулю, а из-за отсутствия сосредоточенной центральной силы равна нулю еще и поперечная сила, можно записать

$$\left. \frac{d\bar{w}}{d\rho} \right|_{\rho=0} = \bar{\varphi}|_{\rho=0} = 0. \quad (1.8)$$

Таким образом, задача сводится к интегрированию системы (1.6) при условиях (1.7) и (1.8).

2. Задачу удобно решить методом коллокаций. С этой целью положим

$$\bar{w} = a_1 + \sum_{i=2}^n a_i \rho^i, \quad \bar{\varphi} = \sum_{i=1}^n b_i \rho^i. \quad (2.1)$$

Эти выражения удовлетворяют условиям (1.8). Число неизвестных постоянных  $a_1, a_i$  и  $b_i$  равно  $2n$ , для определения которых интервал  $0 < \rho < 1$  разделим на  $n$  частей. Удовлетворив уравнениям (1.6) в точках деления и условиям (1.7), получим систему  $2n$  линейных алгебраических уравнений с постоянными коэффициентами относительно отмеченных неизвестных. После решения этой системы можно определить значения всех расчетных величин пластинки в виде многочленов порядка  $n$ . Вычисления надо проводить с увеличением числа  $n$  до наступления практической сходимости. Так как в силу линейности задачи результаты решения прямо пропорциональны  $\bar{q}$ , то целесообразно считать  $\bar{q} = 1$ . В каждом конкретном случае, умножив результаты решения на действительное значение  $\bar{q}$ , получим их значения для этого случая. В заключение отметим, что решение можно значительно упростить, если путем исключения  $\bar{w}$  систему (1.6) привести к одному уравнению относительно функции  $\bar{\varphi}$ , в силу чего число неизвестных постоянных уменьшится вдвое. Однако этот подход возможен только при  $\bar{k} \neq 0$ , и решение задачи при  $\bar{k} = 0$ , т. е. при отсутствии упругого основания, невозможно получить в качестве частного случая. При отсутствии упругого основания также можно прийти к одному уравнению, но уже относительно функции  $\bar{w}$ . Для этого следует интегрировать первое уравнение системы (1.6) и полученное выражение функции  $\bar{\varphi}$  подставить во второе уравнение этой системы. Но чтобы возможно было одновременно получить решение задачи в общем случае, т. е. как при наличии, так и отсутствии упругого основания, надо иметь дело с системой двух уравнений. Конечно, решение задачи тогда будет заметно осложняться, поскольку число неизвестных постоянных будет вдвое больше.

3. Рассмотрим пример общего случая. Пусть:

$$s = 0.25; \quad \alpha = 0.5; \quad m = 2(E_\theta = 2E_r); \quad E_z = \frac{2}{3}E_r; \\ v_{\theta r} = v_r = 0.15; \quad v_{zr} = 0.4; \quad v_{\theta z} = 0.2. \quad (3.1)$$

Из условий симметрии упругих свойств ортотропного тела ([1], с. 23) с учетом (3.1) находим

$$\begin{aligned} E_{\theta} v_{\theta r} &= E_r v_{r\theta} \Rightarrow v_{r\theta} = v_{\theta} = 0.3, \\ E_z v_{zr} &= E_r v_{rz} \Rightarrow v_{rz} = 0.2667, \\ E_z v_{z\theta} &= E_{\theta} v_{\theta z} \Rightarrow v_{z\theta} = 0.6. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Следовательно, значения  $A_1$  и  $A_2$  будут ([1], с. 72)

$$A_1 = -\frac{E_r v_{rz} + v_{r\theta} v_{\theta z}}{E_z (1 - v_{\theta r} v_{r\theta})} = -0.5131, \quad A_2 = -\frac{E_{\theta} v_{\theta z} + v_{\theta r} v_{rz}}{E_z (1 - v_{\theta r} v_{r\theta})} = -0.7539. \quad (3.3)$$

Принятые механические параметры удовлетворяют условиям положительности энергии деформирования ортотропного тела ([1], с. 24).

Данные табл. 1 показывают, что в случае  $\chi = 4$ ;  $\bar{k} = 0.1$  сходимость процесса вычислений достигается при  $n = 12$ . Такая ситуация имеет место и при других значениях параметров задачи.

**Таблица 1**

m=2, A1= -0.5131, β=0.1, A2= -0.7539		ρ											
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
χ=4, k=0.1	n=12	$\bar{w}$	9.61	9.57	9.37	8.96	8.31	7.39	6.21	4.80	3.28	1.84	0.85
		$\bar{N}_r$	0	-0.01	-0.02	-0.04	-0.08	-0.14	-0.23	-0.37	-0.54	-0.77	-1.02
		$\bar{M}_r$	0.00	0.09	0.12	0.13	0.12	0.10	0.05	-0.04	-0.19	-0.43	-0.74
		$\bar{M}_{\theta}$	0.00	0.12	0.17	0.19	0.20	0.20	0.18	0.13	0.04	-0.09	-0.30
	n=13	$\bar{w}$	9.61	9.57	9.37	8.96	8.31	7.39	6.21	4.80	3.28	1.84	0.86
		$\bar{N}_r$	0	-0.01	-0.02	-0.04	-0.08	-0.14	-0.23	-0.37	-0.54	-0.77	-1.02
		$\bar{M}_r$	0.00	0.09	0.12	0.13	0.12	0.10	0.05	-0.04	-0.19	-0.43	-0.75
		$\bar{M}_{\theta}$	0.00	0.12	0.17	0.19	0.20	0.20	0.18	0.13	0.04	-0.10	-0.30

Рассмотрим следующие случаи.

- 1)  $\chi = 4$ ,  $A_1 = -0.5131$ ,  $A_2 = -0.7539$  (учитываются влияния поперечного сдвига и обжатия);
- 2)  $\chi = 0$ ,  $A_1 = 0$ ,  $A_2 = 0$  (отмеченные влияния не учитываются, т. е. классический случай);
- 3)  $\chi = 4$ ,  $A_1 = 0$ ,  $A_2 = 0$  (учитывается только влияние поперечного сдвига);
- 4)  $\chi = 0$ ,  $A_1 = -0.5131$ ,  $A_2 = -0.7539$  (учитывается только влияние обжатия).

В табл. 2 приведены результаты решения задачи при некоторых значениях  $\bar{k}$ ,  $\beta$  и  $\rho$ .

Таблица 2

m=2		случай	$\bar{w}$		$\bar{N}_r$		$\bar{M}_r$		$\bar{M}_\theta$	
			$\rho$		$\rho$		$\rho$		$\rho$	
			0	1	0	1	0	1	0	1
K=0	$\beta=0.01$	1	39.7	0.20	0	-1.98	0.02	-2.05	0.02	-0.92
		2	34.5	0.15	0	-1.16	0.00	-1.80	0.00	-0.53
		3	40.0	0.20	0	-1.96	0.00	-2.10	0.00	-0.99
		4	34.1	0.15	0	-1.15	0.02	-1.74	0.02	-0.45
	$\beta=0.1$	1	46.5	1.94	0	-1.96	0.02	-1.92	0.02	-0.75
		2	39.8	1.48	0	-1.13	0.00	-1.71	0.00	-0.40
		3	47.1	1.98	0	-1.96	0.00	-1.98	0.00	-0.82
		4	39.2	1.44	0	-1.11	0.02	-1.65	0.02	-0.33
	$\beta=1$	1	96.1	14.8	0	-1.98	0.02	-1.14	0.02	0.35
		2	74.9	10.4	0	-0.88	0.00	-1.13	0.00	0.41
		3	97.6	15.0	0	-1.98	0.00	-1.18	0.00	0.30
		4	73.4	10.1	0	-0.87	0.02	-1.09	0.02	0.43
K=0.05	$\beta=0.01$	1	15.3	0.14	0	-1.38	0.00	-1.21	0.00	-0.55
		2	15.6	0.10	0	-1.07	0.00	-0.99	0.00	-0.29
		3	15.2	0.13	0	-1.38	0.00	-1.24	0.00	-0.62
		4	15.7	0.09	0	-1.05	0.00	-0.95	0.00	-0.21
	$\beta=0.1$	1	16.4	1.08	0	-1.23	0.00	-0.98	0.00	-0.39
		2	16.6	0.89	0	-0.97	0.00	-0.83	0.00	-0.18
		3	16.3	1.10	0	-1.23	0.00	-1.02	0.00	-0.46
		4	16.6	0.86	0	-0.96	0.00	-0.79	0.00	-0.12
	$\beta=1$	1	19.9	4.48	0	-0.73	0.00	-0.25	0.00	0.12
		2	20.1	3.86	0	-0.61	0.00	-0.24	0.00	0.18
		3	19.9	4.53	0	-0.72	0.00	-0.25	0.00	0.09
		4	20.1	3.78	0	-0.61	0.00	-0.22	0.00	0.23
K=0.1	$\beta=0.01$	1	9.25	0.11	0	-1.20	0.00	-0.96	0.00	-0.45
		2	9.84	0.08	0	-1.01	0.00	-0.74	0.00	-0.21
		3	9.16	0.11	0	-1.21	0.00	-1.01	0.00	-0.52
		4	9.95	0.08	0	-0.99	0.00	-0.69	0.00	-0.14
	$\beta=0.1$	1	9.59	0.85	0	-1.02	0.00	-0.73	0.00	-0.30
		2	10.1	0.69	0	-0.88	0.00	-0.57	0.00	-0.12
		3	9.54	0.87	0	-1.02	0.00	-0.77	0.00	-0.36
		4	10.2	0.67	0	-0.88	-0.00	-0.53	-0.00	-0.05
	$\beta=1$	1	10.5	2.94	0	-0.52	-0.00	-0.14	-0.00	0.09
		2	10.9	2.60	0	-0.50	0.00	-0.09	0.00	0.13
		3	10.5	2.98	0	-0.51	0.00	-0.15	0.00	0.05
		4	11.0	2.55	0	-0.51	-0.00	-0.08	-0.00	0.18

Для наглядности на рис. 1÷4 приведены графики  $\bar{w}$ ,  $\bar{N}_r$ ,  $\bar{M}_r$  и  $\bar{M}_\theta$  в случае «1» при  $\beta=0.1$ .

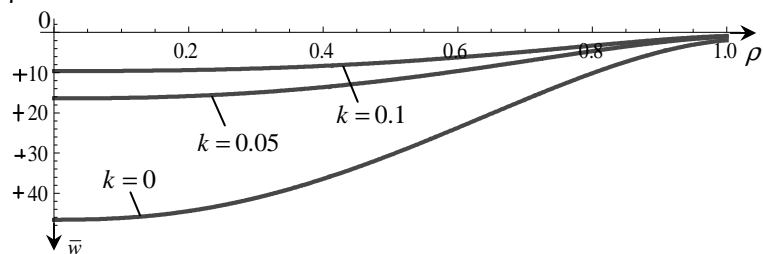


Рис. 1.

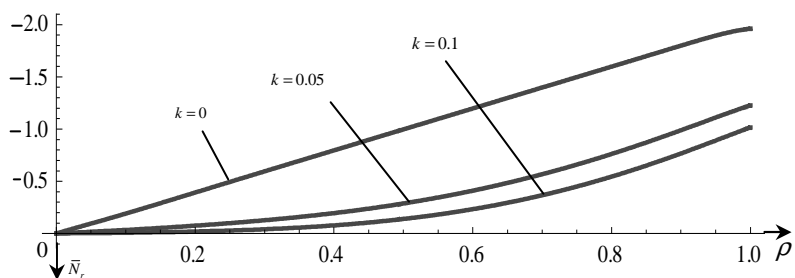


Рис. 2.

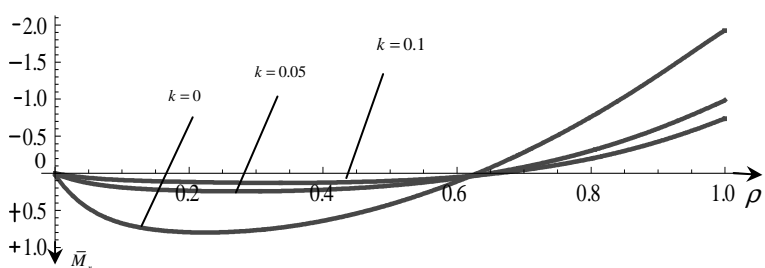


Рис. 3.

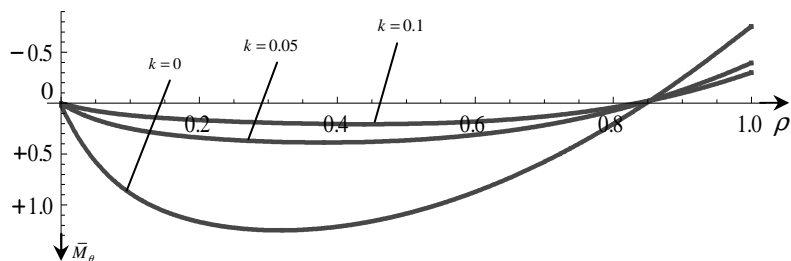


Рис. 4.

Данные табл. 2 приводят к следующим заключениям.

1. С возрастанием параметра  $k$  реакция упругого основания возрастает и при одинаковых значениях остальных параметров задачи прогибы пластинки уменьшаются. При этом большие прогибы уменьшаются больше, а малые – меньше.
2. Если при отсутствии упругого основания (при  $k = 0$ ) наименьшие значения прогиба пластинки получаются при учете только обжатия, то при наличии достаточно жесткого упругого основания (например при  $k = 0.05$ ) эта закономерность нарушается.

3. При возрастании параметра  $\beta$  жесткость упруго защемленной опоры уменьшается, что приводит к увеличению прогибов пластинки
4. Начиная с некоторых больших значений  $k$  и  $\beta$  изгибающие моменты на краю пластинки (при  $\rho = 1$ ) становятся положительными.
5. Как и следовало ожидать, учет поперечного сдвига (при  $\chi > 0$ ) приводит к заметному увеличению прогибов пластинки, когда упругое основание отсутствует. Эта закономерность нарушается при наличии достаточно жесткого упругого основания.

<sup>1</sup>Институт механики НАН РА

<sup>2</sup>Ереванский государственный университет

**Р. М. Киракосян, С. П. Степанян**

**Задача изгиба упруго защемленной ортотропной круглой пластинки, опирающейся на упругое основание**

Рассматривается задача в рамках уточненной теории С. Амбарцумяна, учитывающей влияние поперечных сдвигов и обжатия. С использованием гипотезы Фусса – Винклера получены дифференциальные уравнения задачи. Применены известные условия упруго защемленной опоры. На основе безразмерных результатов решения задачи сделаны качественные заключения.

**Ռ. Մ. Կիրակոսյան, Ս. Պ. Ստեփանյան**

**Առաձգական հիմքի վրա հենվող առաձգական ամրակցված օրթոտրոպ կլոր սալի ծռման խնդիրը**

Դիտարկվում է Համբարձումյանի ճշգրտված տեսության շրջանակներում, որը հաշվի է առնում ընդլայնական սահքերի և սեղմման ազդեցությունները: Օգտվելով ֆուսս-Վինկլերի վարկածից ստացվում են խնդրի դիֆերենցիալ հավասարումները: Կիրառվում են առաձգական ամրակցման հենարանի հայտնի պայմանները: Խնդրի լուծման չափում չունեցող արդյունքների հիման վրա արվում են որակական եզրակացություններ:

**R. M. Kirakosyan, S. P. Stepanyan**

**The Problem of Bending Resiliently Clamped Orthotropic Circular Plate Resting on the Elastic Foundation**

The problem is considered in the framework of the revised Ambartsumian theory that takes into account the effect of transverse shear and compression. The differential equations of the problem are obtained by using the Fuss Winkler hypothesis. The known conditions of resiliently clamped support are applied. The qualitative conclusions are made on the basis of dimensionless results of the problem solution.

## Литература

1. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. М. Наука. 1987. 360 с.
2. *Киракосян Р. М.* В кн.: Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Труды VIII междунар. конф., сентябрь 22-26, 2014. Горис –Степанакерт. С. 261-265.
3. *Киракосян Р. М.* – ДНАН РА. 2014. Т. 114. № 2. С. 101-107.
4. *Киракосян Р. М., Степанян С. П.* – ДНАН РА. 2014. Т. 114. № 3. С. 205-212.
5. *Киракосян Р. М., Степанян С. П.* – ДНАН РА. 2014. Т. 114. № 4. С. 309-315.
6. *Kirakosyan R. M., Stepanyan S. P.* – International Scientific Journal. Modeling of Artificial Intelligence. 2015. V. 6. Is. 2. P. 67-74.
7. *Киракосян Р. М.* – ДНАН РА. 2015. Т. 115. С. 284-289.