ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 116 2016 № 2

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 621.39.1:519.34

А. А. Чубарян, А. С. Читоян, А. А. Хамисян

О некоторых системах доказательств для многозначных логик и сложностях выводов в них

(Представлено чл.-кор. НАН РА И. Д. Заславским 12/ IV 2016)

Ключевые слова: *k-значная логика, определяющий конъюнкт, определяющая дизъюнктивная нормальная форма, элиминационные системы, сложности выводов.*

1. **Введение.** Исследования сложностных характеристик выводов в исчислении высказываний, возникшие в связи с разработками автоматизаций доказательств и носившие до конца 70-х гг. XX в. лишь фрагментарный характер, получили бурное развитие после известного результата Кука – Рехова [1], доказавших, что $NP \neq coNP$ в том и только в том случае, если не существует полиномиально ограниченной системы доказательств классических тавтологий. Исследования развивались в двух направлениях: поиска новых систем доказательств и поиска класса формул, трудно доказуемых в данной системе. Логические рассуждения при доказательстве тех или иных комбинаторных утверждений, претендующих на роль труднодоказуемых, зачастую носят конструктивный характер, а иногда привычная логика с двумя значениями утверждений оказывается не приспособленной для работы с неопределенными данными, в связи с чем было предложено использовать трехзначную (с третьим значением UNKNOWN). В частности, логическое программирование, обработка различных статистических данных и различные новейшие разработки компьютерных техологий требуют привлечения многозначных логик. В связи с упомянутыми обстоятельствами не менее актуальными (а, может быть, и более) оказываются разработки новых систем доказательств и исследования сложностей выводов в многозначных логиках. Ряд существенных отличий между двузначной и многозначной логиками делает нетривиальными эти разработки.

В настоящей работе описан метод построения некоей дедуктивно полной системы исчисления высказываний для k-значной логики $(k \geq 3)$. Обобщены понятия определяющего конъюнкта и определяющей дизъюнктивной нормальной формы, ранее введенные в [2] первым соавтором для двузначных булевых функций, и на их основе построены системы E_k, аналогичные системе резолюций. Для некоторой последовательности k-значных тавтологий получены одинаковые по порядку верхние и нижние оценки основных сложностных характеристик выводов в описанных системах.

2. Предварительные понятия. Для представления основных результатов напомним некоторые понятия и обозначения, введенные в [2] для двузначной логики. Мы пользовались общепринятыми понятиями единичного n-мерного булева куба B^n, пропозициональной формулы, тавтологии и системы доказательства классического исчисления высказываний.

Конкретный выбор языка для представления пропозициональной формулы, а значит, и системы доказательств, не имел значения для наших рассмотрений, однако из технических соображений мы предполагали, что он содержит пропозициональные переменные $p_i\left(i \ge 1\right)$ и (или) $p_i j\left(i \ge 1, j \ge 1\right)$, логические связки $\neg, \&, \vee, \supset$ и пару скобок (,). Длина формулы φ, определяемая как количество всех вхождений в нее пропозициональных переменных, обозначается через $|\varphi|$. Очевидно, что линейной функцией от $|\varphi|$ оцениваются и полная длина формулы, понимаемая как количество всех символов, и количество вхождений логических связок.

Следуя общепринятой терминологии, *литералом* считалась переменная или ее отрицание. Конъюнкт K может быть представлен как множество литералов, причем это множество не может содержать переменную и ее отрицание одновременно.

Для произвольной формулы ψ следующие тривиальные эквивалентности назывались *правилами замещения*:

$$
\begin{array}{llll}
0 \& \psi = 0, & \psi \& 0 = 0, & 1 \& \psi = \psi, & \psi \& 1 = \psi, \\
0 \vee \psi = 0, & \psi \vee 0 = 0, & 1 \vee \psi = 1, & \psi \vee 1 = 1 \\
0 \supset \psi = 1, & \psi \supset 0 = \overline{\psi}, & 1 \supset \psi = \psi, & \psi \supset 1 = 1. \\
\overline{0} = 1, & \overline{1} = 0, & \overline{\overline{\psi}} = \psi, &
\end{array}
$$

Применение правил замещения к некоторому слову заключается в замене какого-либо его подслова, имеющего вид левой части одной из указанных эквивалентностей, правой частью.

Отметим также, что функция $p^б$ определяется следующим образом: p^0 есть $\neg p$, а p^1 есть p.

Пусть φ – пропозициональная формула, $P = \left\{p_1, p_2, \ldots p_n\right\}$ – множество ее переменных, а $P' = \left\{p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots p_{i_m}\right\}$ $\left(1 \le m \le n\right)$ – некоторое подмножество P.

Определение 2.1. *Для некоторого* $\sigma = \left\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_m\right\} \in B^m$ *конъюнкт* $K^\sigma = \left\{p_{i_1}^{\sigma_1}, p_{i_2}^{\sigma_2}, \ldots p_{i_m}^{\sigma_m}\right\}$ *называется* φ*-определяющим, если, подставляя в* φ *вместо каждой переменной* p_{ij} *значение* σ_j $\left(1 \le j \le m\right)$ *и* *последовательно применяя правила замещения, получаем значение формулы φ (0 или 1) вне зависимости от значений остальных переменных.*

Определение 2.2. *Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) D= $\{K_1, K_2,...,K_r\}$ называется φ-определяющей для тавтологии φ, если каждый конъюнкт из D является $\varphi-1$-определяющим и $\varphi = D$.*

Определяющую ДНФ будем обозначать через оДНФ.

В [2] была описана также следующая система доказательств *E*. Аксиомы системы *E* не фиксируются. Для каждой формулы φ в качестве аксиом берутся конъюнкты из некоторой оДНФ. **Элиминационное правило** вывода (э-правило) выводит конъюнкт $K' \cup K''$ из конъюнктов $K' \cup \{p\}$ и $K' \cup \{\overline{p}\}$ для произвольной пропозициональной переменной p.

E-выводом называется такая конечная последовательность конъюнктов, каждый из которых или является одной из зафиксированных аксиом, или получается из предыдущих по э-правилу.

Очевидно, что ДНФ $D = \{K_1, K_2, \dots, K_l\}$ является тавтологией, если применяя э-правило можно вывести пустой конъюнкт $(\varnothing)$ из аксиом $\{K_1, K_2, \dots, K_l\}$.

3. Элиминационная система для многозначных логик. Следуя [3], введем основные понятия для одного из вариантов трехзначной логики. Все они с легкостью могут быть обобщены для того же варианта *k*-значных логик при $k \ge 4$.

3.1. Обозначим через B_3 множество $\{0, 1/2, 1\}$ и через $(B_3)^n$ трехзначный n-мерный куб. Будем рассматривать всюду определенные функции $f(p_1, p_2, \dots, p_n)$, отображающие $(B_3)^n$ в B_3. В частности, для дальнейших рассмотрений зафиксируем следующие функции:

min(*x*, *y*) – обобщение конъюнкции, для которого мы сохраним обозначение &,

max(*x*, *y*) – обобщение дизъюнкции, для которого мы сохраним обозначение $\vee$,

$x \to y$ – обобщение импликации, значение которого равно 1 при $x \le y$ и *y*, в противном случае; для этой импликации также сохраним обозначение $\supset$,

$\sim x$ – обобщение отрицания, определяемое «циклическим» сдвигом значений, т.е. ~0=½, ~½=1, ~1=0,

x^y – «расстояние» до 1, определяемое как x при $y = 1$, как $\sim\sim x$ при $y = 0$ и как $\sim x$ при $y = 1/2$.

3.2. Вышеуказанные *правила замещения* сохраняются для & и $\vee$, для $\supset$ сохраняются лишь $0 \supset \psi = 1$, $1 \supset \psi = \psi$, $\psi \supset 1 = 1$. Для $\sim x$ *правилами замещения* будут: ~0=½, ~½=1, ~1=0 и $\sim\sim\sim \psi = \psi$.

В силу неоднозначной определенности ряда равенств для значения $1/2$, а также $\psi \supset 0$ введем ***вспомогательные отношения замещения:***

$$1/2\psi = \psi \,\&\, 1/2 \le 1/2, 1/2 \vee \psi = \psi \vee 1/2 \ge 1/2,$$
$$\psi \supset 0 = \neg sg\psi,\ 1/2 \supset \psi = sg\psi, \psi \supset 1/2 \ge 1/2,$$
где через $\neg sg\psi$ обозначена функция, которая равна 0, если значение ψ больше 0, и равна 1 в противном случае, а через $sg\psi$ обозначена функция, которая равна 1, если значение ψ больше 0, и равна 0 в противном случае.

В трехзначной логике для каждой пропозициональной переменной *p* *литералами* будут *p*, *~p* и *~~p*.

Пусть φ – пропозициональная формула трехзначной логики, $P = \{p_1, p_2, \dots p_n\}$ – множество ее переменных, а $P' = \{p_{i_1}, p_{i_2}, \dots p_{i_m}\}$ $(1 \le m \le n)$ – некоторое подмножество P.

Определение 3.1. *Для некоторого* $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_m\} \in (B_3)^m$ *конъюнкт* $K^\sigma = \{p_{i_1}^{\sigma_1}, p_{i_2}^{\sigma_2}, \dots p_{i_m}^{\sigma_m}\}$ *называется* φ*-определяющим, если, подставляя в* φ *вместо каждой переменной* p_{ij} *значение* $\sigma_j (1 \le j \le m)$, *последовательно применяя правила замещения и, при необходимости, учитывая* ***вспомогательные отношения замещения,*** *получаем значение формулы* φ *(*$0, 1/2$ *или 1) вне зависимости от значений остальных переменных.*

Например, для формулы $p_1 \supset (p_2 \supset (p_3 \supset p_1))$ *1*-определяющими являются конъюнкты p_1, $\sim\sim p_1$ и $\sim p_1$, причем если для первых двух достаточно применение правил замещения, то для последнего учитывается одно из вспомогательных отношений замещения.

Тавтологией в трехзначной логике считается формула, которая принимает значение 1 при любых наборах значений переменных.

В трехзначной логике понятие оДНФ дается в силу **определения 2.2.**

3.3. Система E_3 определяется по аналогии с определением системы E, только э**лиминационное правило** вывода выводит конъюнкт $K' \cup K'' \cup K'''$ из конъюнктов $K' \cup \{p\}$, $K'' \cup \{\sim p\}$ и $K''' \cup \{\sim\sim p\}$ для произвольной пропозициональной переменной p.

Далее определение E_3-вывода и тавтологичной ДНФ аналогично вышеприведенным для двузначной логики. Нетрудно убедиться, что система E_3 полна и непротиворечива.

4. Сложностные характеристики выводов. Пусть для тавтологии φ задан некоторый E_3-вывод, $M(\varphi)$ – множество всех конъюнктов этого вывода. Для определения сложностных характеристик выводов дадим следующие определения из [4].

Определение 4.1. *Произвольное подмножество множества* $M(\varphi)$ *называется конфигурацией.*

Определение 4.2. *Последовательность конфигураций* $\{D_0, D_1, \dots, D_r\}$ *называется процессом вывода, если* $D_0 = \varnothing$ *и для каждого* $t (1 \le t \le r)$ D_t *получается из* D_{t-1} *применением следующих шагов:*

1) *добавление аксиомы* $D_t = D_{t-1} \cup \{L\}$ *, где* L_A *– аксиома,*

2) *применение правила вывода* $D_t = D_{t-1} \cup \{L\}$ *, где* L *получается по правилу вывода из формул, принадлежащих* D_{t-1} *,*

3) *удаление* $D_t \subset D_{t-1}$ *.*

Определение 4.3. *Форматированным E_3-выводом (ф. E_3-выводом) тавтологии* φ *называется такой процесс вывода* $\{D_0, D_1, \dots, D_r\}$*, где* $D_0 = \varnothing$ *и* $D_r = (\varnothing)$.

Определение 4.4.

- l *-сложность E_3-вывода равна сумме длин всех его различных формул.*
- t *-сложность E_3-вывода равна количеству различных формул в нем.*
- s *-сложность E_3-вывода равна максимальной длине входящих в* ϕ *. E_3-вывод конфигураций, где длина конфигурации равна сумме длин всех ее формул.*
- w *-сложность E_3-вывода равна максимуму длин входящих в нее формул.*

Минимальное значение t *-сложности* (l -сложности, s -сложности, w -сложности) по всевозможным E_3-выводам формулы φ обозначим через $t(\varphi)\big(l(\varphi), s(\varphi), w(\varphi)\big)$.

Далее будут получены верхние и нижние оценки указаных сложностных характеристик выводов и для их записи будут использованы следующие общепринятые обозначения:

если $\exists c_1 \exists k_1 \forall x > k_1 \left| f(x) \right| \ge c_1 \left| g(x) \right|$, то мы будем писать $f(x) = \Omega\big(g(x)\big)$,

если $\exists c_2 \exists k_2 \forall x > k_2 \left| f(x) \right| \ge c_2 \left| g(x) \right|$, то мы будем писать $f(x) = O\big(g(x)\big)$

При выполнении этих обоих условий будем писать $f(x) = \theta\big(g(x)\big)$.

5. Основные оценки сложностных характеристик. Для описания последовательности «трудновыводимых» тавтологий введем несколько понятий.

Для произвольного набора $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_m\} \in (B_3)^m$ 0-переворотом назовем набор $\sim\sigma = \{\sim\sigma_1, \sim\sigma_2, \dots \sim\sigma_m\} \in (B_3)^m$, ½-переворотом – набор $\sim\sim\sigma = \{\sim\sim\sigma_1, \sim\sim\sigma_2, \dots \sim\sim\sigma_m\} \in (B_3)^m$, 1-переворотом – сам набор $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_m\} \in (B_3)^m$. Каждое из указанных преобразований будем называть переворотом.

Утверждение. В каждой $(0,1/2,1)$-матрице размера $n \times m$ $\left(n \ge 1,\ m \le 3^{[n/3]}\right)$ можно так «перевернуть» строки, чтобы в каждом столбце была по крайней мере одна единица.

В истинности этого утверждения можно убедиться индукцией по n, в силу чего следующая формула является тавтологией в трехзначной логике:

$$TTM_{n,m} = \bigvee_{(\sigma_1,\dots,\sigma_n)} \mathop{\&}_{j=1} \bigvee_{i=1}^{n} p_{ij}^{\sigma_i} \quad (\text{для } \sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_m\} \in (B_3)^n, n \geq 1, m \leq 3^{[n/3]}).$$

В силу структуры $TTM_{n,m}$ очевидно, что каждый $TTM_{n,m}$-определяющий конъюнкт содержит по крайней мере m литералов. Отметим, что

$$\left|TTM_{n,m}\right| = n3^n m .$$

Теорема. *Для произвольного достаточно большого* n *существуют формулы* φ_n, *для которых*

1) $\log_3(|\varphi_n|) = \theta(n)$;
2) $\log_3 \log_3(t(\varphi_n)) = \theta(n)$;
3) $\log_3 \log_3(l(\varphi_n)) = \theta(n)$;
4) $\log_3(s(\varphi_n)) = \theta(n)$;
5) $\log_3(w(\varphi_n)) = \theta(n)$.

Доказательство проводится по аналогии с доказательством основной теоремы из [5] для формул φ_n, в качестве которых берутся $TTM_{n,m}$ при $m = 3^{[n/3]}$. Верхние оценки получаются на основе совершенной ДНФ, построенной с использованием трех типов вышеуказанных литералов, а нижние – с учетом минимального количества литералов в определяющих конъюнктах тавтологий φ_n.

Как уже указывалось выше, все полученные результаты с легкостью могут быть обобщены для того же варианта k-значных логик при $k \geq 4$.

Ереванский государственный университет
e-mails: achubaryan@ysu.am, tsh_arman@yahoo.com,
Artur.Khamisyan@gmail.com

А. А. Чубарян, А. С. Читоян, А. А. Хамисян

О некоторых системах доказательств для многозначных логик и сложностях выводов в них

Описан метод построения некоей дедуктивно полной системы исчисления высказываний для k-значной логики $(k \geq 3)$. Обобщены понятия определяющего конъюнкта и определяющей дизъюнктивной нормальной формы, ранее введенные первым соавтором для двузначных булевых функций, и на их основе построены системы E_k, аналогичные системе резолюций. Для некоторой последовательности k-значных тавтологий получены одинаковые по порядку верхние и нижние оценки основных сложностных характеристик выводов в описанных системах.

Ա. Ա. Չուբարյան, Ա. Ս. Ճիտոյան, Ա. Ա. Խամիսյան

Բազմարժեք տրամաբանություններում արտածման որոշ համակարգերի և նրանցում արտածման բարդությունների վերաբերյալ

Նկարագրված է արտածման որոշ համակարգերի կառուցման եղանակը k-արժեք $(k \geq 3)$ տրամաբանությունների համար: Ընդհանրացված են նախկինում առաջին հա-

մահեղինակի կողմից երկարժեք բուլյան ֆունկցիաների համար ներմուծված որոշիչ կոնյունկտի և որոշիչ դիզյունկտիվ նորմալ ձևի գաղափարները և դրանց հիման վրա կառուցված են E_k համակարգերը, որոնք նման են ռեզոլյուցիոն համակարգերին: *k*-արժեք նույնաբանությունների որոշակի հաջորդականությունների համար ստացված են նույն կարգի վերին և ստորին գնահատականներ նկարագրված համակարգերում արտածման բարդությունների հիմնական բնութագրիչների համար:

A. A. Chubaryan, A. S. Tchitoyan, A. A. Khamisyan

On Some Proof Systems for Many-Valued Logics and on Proof Complexities in It

Some method for construction a deductive full system of propositional calculi for *k*-valued $(k \geq 3)$ logic is described. Earlier introduced by the first coauthor the notions of determinative conjunct and determinative disjunctive normal form for two-valued Boolean functions are generalized and on the base of it the systems E_k, analogous to resolution systems, are constructed. The same by order upper and lower bounds for the main proof complexity characteristics in described systems are obtained for some sequence of *k*-valued tautologies.

Литература

1. *Cook S. A., Reckhow A. R.* - The Journal of Symbolic Logic. 1979. V. 44. P. 36-50.
2. *Aleksanyan S.R,Chubaryan A.A.* - Siberian Mathematical Journal. 2009. V. 50. N 2. P. 243-249.
3. *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. М. Наука. 1979. 272 с.
4. *Nordstrom J.* - SIAM Journal on Computing. May 2009. V. 39. N. 1. P. 59–121.
5. *Chubaryan A., Mnatsakanyan A.* - Scholars Journal of Physics, Mathematics and Statistics. 2014. V. 1. N. 2. P. 111-117.