

где h_0 и h_1 – известные параметры. На поверхностях пластинки-полосы $z = +\frac{h}{2}$ и $z = -\frac{h}{2}$ действует температура соответственно θ^+ и θ^- , а изменение температуры θ внутри пластинки-полосы будем считать линейным относительно поперечной координаты z

$$\theta = \frac{\theta^+ + \theta^-}{2} + \frac{z}{h}(\theta^+ - \theta^-). \quad (1.2)$$

Введем следующие обозначение, которые приводят к безразмерным величинам:

$$\begin{aligned} a = nh_0, \quad B = \frac{\beta}{B_{11}}, \quad D = \frac{\alpha}{B_{11}h_0^2}, \quad \left(\frac{D}{B} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow B = \frac{\alpha n^2}{3B_{11}} \right), \quad w = h_0\bar{w}, \\ x = l\bar{x}, \quad s = \frac{h_0}{l}, \quad h = h_0H, \quad h_1 = \gamma s, \quad H = 1 + \gamma\bar{x}, \quad B_{12} = mB_{11}, \quad \varphi_1 = B_{11}\bar{\varphi}_1, \quad (1.3) \\ a_{55}B_{11} = \chi, \quad N_x = B_{11}h_0\bar{N}_x, \quad M_x = B_{11}h_0^2\bar{M}_x, \end{aligned}$$

Здесь w есть прогиб, B_{ij} – механические параметры, которые по известным формулам [1] выражаются через упругие постоянные материала, φ_1 – функция, характеризующая распределение поперечного касательного напряжения τ_{xz} , N_x – поперечная сила, M_x – изгибающий момент пластинки-полосы.

В рамках теории [2] с помощью обозначений (1.3) для безразмерной поперечной силы и изгибающего момента получим следующие формулы:

$$\bar{N}_x = \frac{2}{3}H\bar{\varphi}_1 - \frac{\gamma s H}{12} \left[sH \left(s \frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2} - \chi \frac{d\bar{\varphi}_1}{d\bar{x}} \right) + (\alpha_x + m\alpha_y)(\theta^+ - \theta^-) \right], \quad (1.4)$$

$$\bar{M}_x = -\frac{sH^3}{12} \left[\left(s \frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2} - \chi \frac{d\bar{\varphi}_1}{d\bar{x}} \right) + \frac{1}{sH} (\alpha_x + m\alpha_y)(\theta^+ - \theta^-) \right], \quad (1.5)$$

где α_x и α_y – коэффициенты теплового расширения материала по направлениям осей x и y соответственно.

2. Для решения задачи изгиба пластинки-полосы на основе [2] и обозначений (1.3) получим

$$\begin{cases} \frac{d}{d\bar{x}}(H^2\bar{\varphi}_1) = 0 \\ \frac{d}{d\bar{x}} \left(H^2 \frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2} \right) - \frac{\chi}{s} \frac{d}{d\bar{x}} \left(H^2 \frac{d\bar{\varphi}_1}{d\bar{x}} \right) + \frac{8\bar{\varphi}_1}{s^3} + \frac{\gamma}{s^2} (\alpha_x + m\alpha_y)(\theta^+ + \theta^-) = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Интегрируя первое уравнение системы (2.1), для $\bar{\varphi}_1$ получим

$$\bar{\varphi}_1 = \frac{c_1}{(1 + \gamma\bar{x})^2}. \quad (2.2)$$

Подставляя (2.2) во второе уравнение системы (2.1), для безразмерного прогиба имеем

$$\begin{aligned} \bar{w} = & c_4 + c_3 \bar{x} - \frac{c_2}{\gamma^2} \ln(1 + \gamma \bar{x}) + \frac{c_1}{s^3 \gamma^3 (1 + \gamma \bar{x})} (4 - \chi \gamma^2 s^2) - \\ & - \frac{1}{s^2 \gamma^2} (\alpha_x + m \alpha_y) (\theta^+ - \theta^-) [(1 + (1 + \gamma \bar{x})) \ln(1 + \gamma \bar{x}) - \gamma \bar{x}]. \end{aligned} \quad (2.3)$$

С учетом (2.2) и (2.3) из (1.4) и (1.5) для безразмерной \bar{N}_x – поперечной силы и \bar{M}_x – изгибающего момента получим

$$\bar{N}_x = -\frac{1}{12} s \gamma (s^2 c_2 - (\alpha_x + m \alpha_y) (\theta^- - \theta^+)) \quad (2.4)$$

$$\bar{M}_x = \frac{-8c_1 + s \gamma (1 + \gamma x) [(\alpha_x + m \alpha_y) (\theta^- - \theta^+) - s^2 c_2]}{12 s \gamma}. \quad (2.5)$$

Краевые условия упруго защемленного вида при $x=0$ описываются уравнениями:

$$w = a \frac{dw}{dx} + B N_x, \quad \frac{dw}{dx} = D (a N_x - M_x). \quad (2.6)$$

Шарнирное опирание при $x=l$

$$w = 0, \quad M_x = 0. \quad (2.7)$$

Эти условия с помощью обозначений (1.3) принимают вид:
при $\bar{x} = 0$

$$\bar{w} = ns \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} + \frac{\alpha n^2}{3} \bar{N}_x, \quad \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} = \frac{\alpha}{s} (n \bar{N}_x - \bar{M}_x); \quad (2.8)$$

при $\bar{x} = 1$

$$\bar{w} = 0, \quad \bar{M}_x = 0. \quad (2.9)$$

Удовлетворив краевым условиям (2.8) и (2.9), с учетом (2.3) для определения постоянных интегрирования $c_1 + c_4$ получим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot c_1 + a_{12} \cdot c_2 + a_{13} \cdot c_3 + a_{14} \cdot c_4 = b_1, \\ a_{21} \cdot c_1 + a_{22} \cdot c_2 + a_{23} \cdot c_3 + a_{24} \cdot c_4 = b_2, \\ a_{31} \cdot c_1 + a_{32} \cdot c_2 + a_{33} \cdot c_3 + a_{34} \cdot c_4 = b_3, \\ a_{41} \cdot c_1 + a_{42} \cdot c_2 + a_{43} \cdot c_3 + a_{44} \cdot c_4 = b_4, \end{cases} \quad (2.10)$$

Здесь $b_1 + b_4$, и коэффициенты a_{ij} определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} a_{11} = & \frac{-(1 + ns \gamma) (-4 + s^2 \gamma^2 \chi)}{s^3 \gamma^3}, \quad a_{12} = \frac{ns}{\gamma} + \frac{1}{36} n^2 s^3 \alpha \gamma, \quad a_{13} = -ns, \quad a_{14} = 1, \\ b_1 = & -\left(\frac{n \theta t}{s \gamma} + \frac{1}{36} n^2 s \alpha \gamma \theta t \right), \quad a_{21} = -\frac{12 + 2s \alpha \gamma - 3s^2 \gamma^2 \chi}{3s^3 \gamma^2}, \quad a_{22} = \frac{1}{12} \left(-s \alpha - \frac{12}{\gamma} + ns^2 \alpha \gamma \right), \\ a_{23} = & 1, \quad a_{24} = 0, \quad b_2 = \frac{(ns^2 \alpha \gamma^2 - s \alpha \gamma - 12) \theta t}{-12s^2 \gamma}, \quad a_{31} = \frac{4 - s^2 \gamma^2 \chi}{s^3 \gamma^3 (1 + \gamma)}, \quad a_{32} = \frac{\ln(1 + \gamma)}{\gamma^2}, \\ a_{33} = & 1, \quad a_{34} = 1, \quad b_3 = \frac{\theta t (-\gamma + (2 + \gamma) \ln(1 + \gamma))}{s^2 \gamma^2}, \quad a_{41} = \frac{-2}{3s \gamma}, \quad a_{42} = -\frac{1}{12} s^2 (1 + \gamma), \end{aligned}$$

$$a_{43} = 0, \quad a_{44} = 0, \quad b_4 = \frac{(12 + s\alpha\gamma - ns^2\alpha\gamma^2)\theta t}{12s^2\gamma}.$$

После решения системы (2.10) получим выражение для неизвестных переменных $c_1 \div c_4$. Подставив найденные выражения в формулы (2.3), (2.4) и (2.5), получим формулы для определения значения безразмерного прогиба, поперечной силы и изгибающего момента.

На рис. 1 - 3 приведены графики соответственно для безразмерного прогиба \bar{w} , поперечного усилия \bar{N}_x и изгибающего момента \bar{M}_x при $\alpha = 1$. При вычислении приняты следующие значения параметров: $m = 0.3$, $s = 0.15$, $\gamma = 1$, $\theta t = (\alpha_x + m\alpha_y)(\theta^+ - \theta^-) = 1$, $\alpha = 0.5, 1, 10$, $\chi = 0, 10, 20, 30$.

В таблице приведены значения для безразмерного прогиба \bar{w} , поперечного усилия \bar{N}_x и изгибающего момента \bar{M}_x при $\gamma = 1$.

		$\bar{\chi}$					
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\chi = 0$ $\alpha = 1$	\bar{w}	0.085	0.345	0.767	1.206	1.569	1.797
	\bar{N}	0.023	0.023	0.023	0.023	0.023	0.023
	\bar{M}	-0.15	-0.14	-0.12	-0.11	-0.09	-0.08
$\chi = 10$ $\alpha = 1$	\bar{w}	0.098	0.384	0.839	1.308	1.694	1.935
	\bar{N}	0.027	0.027	0.027	0.027	0.027	0.027
	\bar{M}	-0.18	-0.16	-0.14	-0.12	-0.11	-0.09
$\chi = 20$ $\alpha = 1$	\bar{w}	0.117	0.437	0.937	1.449	1.867	2.125
	\bar{N}	0.032	0.032	0.032	0.032	0.032	0.032
	\bar{M}	-0.21	-0.19	-0.17	-0.15	-0.13	-0.11
$\chi = 30$ $\alpha = 1$	\bar{w}	0.144	0.515	1.080	1.654	2.118	2.401
	\bar{N}	0.039	0.039	0.039	0.039	0.039	0.039
	\bar{M}	-0.26	-0.23	-0.21	-0.18	-0.16	-0.13
$\chi = 0$ $\alpha = 10$	\bar{w}	0.524	1.215	1.850	2.353	2.677	2.795
	\bar{N}	0.014	0.014	0.014	0.014	0.014	0.014
	\bar{M}	-0.09	-0.086	-0.076	-0.067	-0.057	-0.048
$\chi = 10$ $\alpha = 10$	\bar{w}	0.572	1.317	1.990	2.516	2.850	2.966
	\bar{N}	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016
	\bar{M}	-0.10	-0.09	-0.08	-0.07	-0.06	-0.05
$\chi = 20$ $\alpha = 10$	\bar{w}	0.629	1.439	2.158	2.713	3.058	3.171
	\bar{N}	0.017	0.017	0.017	0.017	0.017	0.017
	\bar{M}	-0.11	-0.10	-0.09	-0.08	-0.07	-0.06
$\chi = 30$ $\alpha = 10$	\bar{w}	0.698	1.588	2.363	2.952	3.313	3.422
	\bar{N}	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
	\bar{M}	-0.13	-0.11	-0.10	-0.09	-0.08	-0.06

		\bar{x}				
		0.6	0.7	0.8	0.9	1
$\chi = 0$ $\alpha = 1$	\bar{w}	1.852	1.712	1.360	0.791	0
	\bar{N}	0.023	0.023	0.023	0.023	0.023
	\bar{M}	-0.06	-0.05	-0.03	-0.02	0
$\chi = 10$ $\alpha = 1$	\bar{w}	1.991	1.836	1.457	0.846	0
	\bar{N}	0.027	0.027	0.027	0.027	0.027
	\bar{M}	-0.07	-0.05	-0.04	-0.02	0
$\chi = 20$ $\alpha = 1$	\bar{w}	2.180	2.007	1.590	0.922	0
	\bar{N}	0.032	0.032	0.032	0.032	0.032
	\bar{M}	-0.08	-0.06	-0.04	-0.02	0
$\chi = 30$ $\alpha = 1$	\bar{w}	2.456	2.256	1.784	1.033	0
	\bar{N}	0.039	0.039	0.039	0.039	0.039
	\bar{M}	-0.10	-0.08	-0.05	-0.03	0
$\chi = 0$ $\alpha = 10$	\bar{w}	2.694	2.364	1.804	1.015	0
	\bar{N}	0.014	0.014	0.014	0.014	0.014
	\bar{M}	-0.038	-0.028	-0.019	-0.009	0
$\chi = 10$ $\alpha = 10$	\bar{w}	2.850	2.495	1.901	1.068	0
	\bar{N}	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016
	\bar{M}	-0.04	-0.03	-0.02	-0.01	0
$\chi = 20$ $\alpha = 10$	\bar{w}	3.038	2.653	2.017	1.131	0
	\bar{N}	0.017	0.017	0.017	0.017	0.017
	\bar{M}	-0.04	-0.03	-0.02	-0.01	0
$\chi = 30$ $\alpha = 10$	\bar{w}	3.267	2.846	2.158	1.208	0
	\bar{N}	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
	\bar{M}	-0.05	-0.04	-0.02	-0.01	0

На рис. 4 - 6 приведены графики соответственно для безразмерного прогиба \bar{w} , поперечного усилия \bar{N}_x и изгибающего момента \bar{M}_x при $\chi = 10$.

Заключение. Полученные результаты приводят к следующим заключениям.

При нагревании нижней поверхности пластинки $z = \frac{h}{2}$

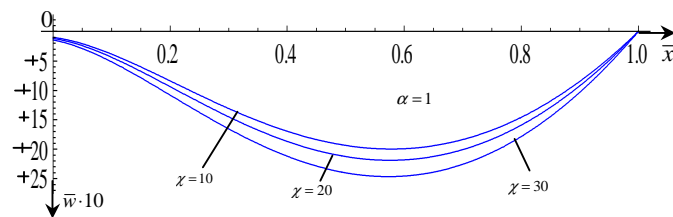


Рис. 1

1) с ростом параметра χ , характеризующего влияние поперечного сдвига, прогибы, поперечная сила и изгибающий момент по величине возрастают;

2) с ростом параметра α , т.е. с уменьшением жесткости упруго защемленной опоры, прогибы пластинки увеличиваются, а поперечная сила и изгибающий момент по величине уменьшаются. Максимум прогибов перемещается к упруго защемленной опоре;

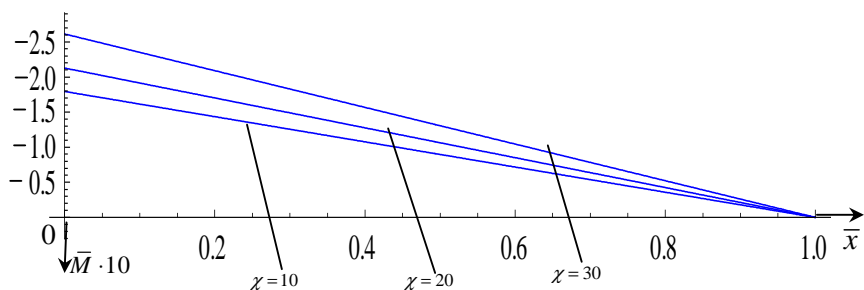


Рис. 2

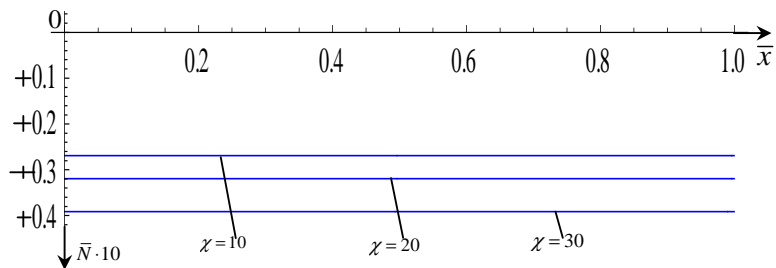


Рис. 3

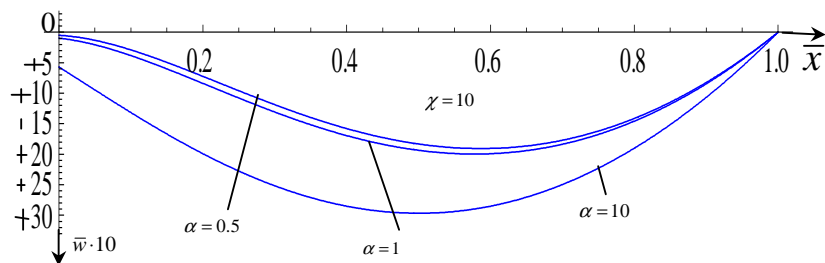


Рис. 4

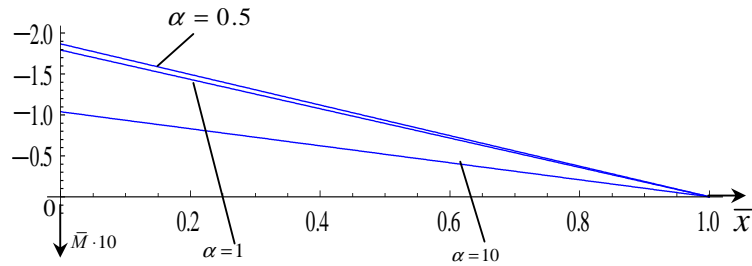


Рис. 5

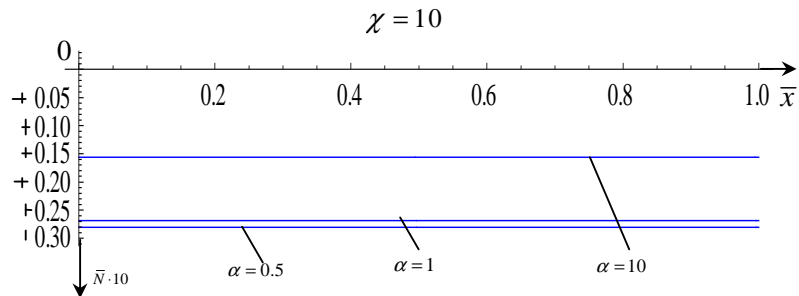


Рис. 6

3) во всех случаях поперечная сила по координате \bar{x} , т. е. по ширине пластинки-полосы, не меняется, а изгибающий момент изменяется по линейному закону.

Ереванский государственный университет

С. П. Степанян

Задача термоупругости ортотропной пластинки-полосы переменной толщины при наличии упруго защемленной опоры

Решается задача изгиба термоупругости ортотропной пластинки-полосы переменной толщины с учетом поперечного сдвига. Пластинка-полоса находится только под воздействием температуры. Приводится численный пример исходя из того, что один торец пластинки-полосы упруго защемлен, а другой шарнирно оперт. По результатам выполненных расчетов исследована зависимость основных величин (перемещений, усилий, изгибающих моментов) от параметров, характеризующих поперечный сдвиг, изменяемость пластинки по толщине, а также от параметра, характеризующего свойства упругого основания.

Ս. Պ. Ստեփանյան
Փոփոխական հաստության օրթոտրոպ սալ-շերտի
ջերմաառաձգականության խնդիրը առաձգական ամրակցման
հենարանի առկայությամբ

Լուծվում է փոփոխական հաստությամբ օրթոտրոպ սալ-շերտի ջերմաառաձգականության խնդիրը, ընդլայնական սահքի հաշվառմամբ: Սալ-շերտը գտնվում է միայն ջերմային ազդեցության տակ: Բերվում է թվային օրինակ՝ ենթադրելով, որ սալ-շերտի մի եզրը առաձգական ամրակցված է, իսկ մյուսը՝ հողակապոքեն հենված: Կատարված հաշվումների հիման վրա հետազոտվում է հիմնական մեծությունների (տեղափոխություն, ուժեր, ծռող մոմենտ) կախվածությունը այն պարամետրերից, որոնք բնութագրում են ընդլայնական սահքը, սալ-շերտի հաստության փոփոխությունը և առաձգական հենարանի հատկությունները:

S. P. Stepanyan

Thermo-Elasticity Problem of an Orthotropic Plate-Strip of Variable Thickness at the Presence of an Elastically Fastened Support

Problem of thermal elasticity of an orthotropic plate-strip of variable thickness is solved taking into account transverse shear. The plate-strip is only under the thermal influence. A numerical example is given, assuming that one end of the plate-strip is elastically fastened and the other one is simply supported. Based on the calculations, the dependence of the main variables (displacements, forces, and bending moments) upon the parameters characterizing the transverse shear, changes in the plate thickness, and the properties of the elastic support is investigated.

Литература

1. *Киракосян Р. М.* В сб.: Проблемы механики деформируемого твердого тела, посвященном 90-летию акад. НАН Армении С. А. Амбарцумяна. Ереван. 2012. С. 177-183.
2. *Лейбензон Л. С.* Курс теории упругости. М.-Л. Гостехиздат. 1947. 464 с.
3. *Киракосян Р. М.* Прикладная теория ортотропных пластин переменной толщины, учитывающая влияние деформаций поперечных сдвигов. Ереван, Гитутюн. 2000. 122 с.
4. *Киракосян Р. М., Степанян С. П.* Математические методы и физико-механические поля. 2013. Т. 56. №4. С. 125-130.