

**ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ**

УДК 539.3

**А. М. Погосян, М. З. Саргсян, М. Л. Агаловян, Л. Г. Гулغازян**

**Способ мониторинга напряженно-деформированных состояний территории Армении на основе данных сейсмостанций и GPS систем**

(Представлено академиком Л. А. Агаловяном 22/VI 2015)

**Ключевые слова:** *литосферная плита, упругость, трехмерная не-классическая задача, слоистость, GPS системы.*

**1. Введение.** Известно, что практически вся территория Армении находится в зоне повышенной сейсмоактивности. Определение напряженно-деформированного состояния наблюдаемой территории и мониторинг его изменения во времени является актуальным. Используя изложенный ниже подход, можно определить напряженно-деформированное состояние земной коры на любом участке Земли при наличии данных, полученных из сейсмостанций и GPS систем.

В настоящей работе рассмотрена задача определения напряженно-деформированного состояния территории Армении (область между 39.00-42.00 северной широты и 42.00-47.00 восточной долготы) на основе существующих данных GPS систем [1-3]. Рассмотрен трехслойный пакет из осадочного, гранитного и базальтового слоев, в глобальном смысле описывающий структуру земной коры [4]. Используя программную среду Wolfram Mathematica и рекуррентные формулы для определения компонент тензора напряжений и вектора перемещения [1], проведены численные расчеты напряженно-деформированных состояний и обрисованы их графические изображения.

**2. Основные уравнения и постановка краевой задачи.** Рассматривается пакет из трех ортотропных слоев (трехслойная пластина бесконечных размеров) толщины  $h=h_1+h_2+h_3$  в прямоугольной системе координат Oxyz, занимающей область  $\Omega=\{x, y, z: 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq h = h_1 + h_2 + h_3, h \ll \min(a, b)\}$  (рис.1).

Требуется найти решение системы уравнений и соотношений трехмерной задачи теории упругости с учетом объемных сил и температурного поля по модели Дюамеля – Неймана, при граничных условиях на верхней плоскости  $z=0$  :

$$\begin{aligned}\sigma_{jz}(x, y, 0, t) &= 0, \quad j = x, y, z \\ u_j(x, y, 0, t) &= u_j^+(x, y, t),\end{aligned}\quad (1)$$

т.е. верхняя плоскость пакета свободна от напряжений, но известны перемещения ее точек как данные сейсмостанций и GPS систем, где время  $t$  входит как параметр, и условиях полного контакта между слоями при  $z = h_1$ ,  $z = h_1 + h_2$

$$z = h_1: \sigma_{jz}^{(1)} = \sigma_{jz}^{(2)}, \quad u_j^{(1)} = u_j^{(2)}, \quad j = x, y, z, \quad (2)$$

$$z = h_1 + h_2: \sigma_{jz}^{(2)} = \sigma_{jz}^{(3)}, \quad u_j^{(2)} = u_j^{(3)}, \quad j = x, y, z. \quad (3)$$

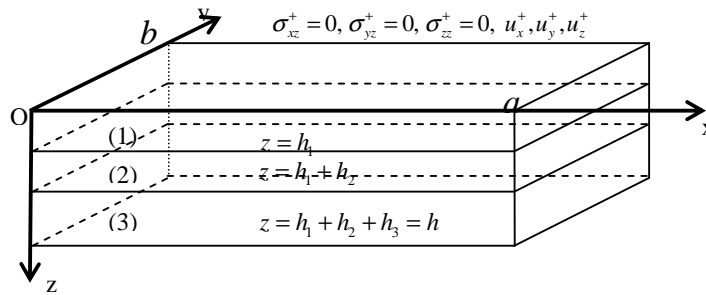


Рис.1.

Условия на боковых поверхностях  $x=0, a; y=0, b$  не конкретизируются, поскольку для данного класса неклассических краевых задач ими обусловлен пограничный слой [5, 6].

**3. Общее асимптотическое решение задачи.** Система уравнений и соотношений трехмерной задачи теории упругости с учетом объемных сил и температурного поля по модели Дюамеля – Неймана для ортотропного тела имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + P_x &= 0 \quad (x, y, z), \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} = e_1 + \alpha_{11} \theta \quad (x, y, z; 1, 2, 3), \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} &= a_{44} \sigma_{yz} \quad (y, z, x; 4, 5, 6), \\ e_m &= a_{1m} \sigma_{xx} + a_{2m} \sigma_{yy} + a_{3m} \sigma_{zz}, \quad m = 1, 2.\end{aligned}\quad (4)$$

Асимптотическое решение этой системы состоит из решения внутренней задачи и решения типа пограничного слоя [6]. Общее решение внутренней задачи для слоистого пакета получено в [1]:

$$\begin{aligned}\sigma_{jz}^{(k,s)} &= \sigma_{jz0}^{(k,s)}(\xi, \eta) + \sigma_{jz*}^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad j = x, y, z, \\ \sigma_{xx}^{(k,s)} &= -\frac{A_{23}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}} \sigma_{zz0}^{(k,s)} - \frac{\gamma_{11}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}} \theta^{(k,s)} + \sigma_{xx*}^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta), \\ \sigma_{yy}^{(k,s)} &= -\frac{A_{13}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}} \sigma_{zz0}^{(k,s)} - \frac{\gamma_{22}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}} \theta^{(k,s)} + \sigma_{yy*}^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta).\end{aligned}\quad (5)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{xy}^{(k,s)} &= \frac{1}{a_{66}^{(k)}} \left[ \frac{\partial v^{(k,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial u^{(k,s-1)}}{\partial \eta} \right], \\ u^{(k,s)} &= a_{55}^{(k)} \zeta \sigma_{xz0}^{(k,s)} + u_0^{(k,s)}(\xi, \eta) + u_*^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta), \\ v^{(k,s)} &= a_{44}^{(k)} \zeta \sigma_{yz0}^{(k,s)} + v_0^{(k,s)}(\xi, \eta) + v_*^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta), \\ w^{(k,s)} &= \frac{A_{33}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}} \zeta \sigma_{zz0}^{(k,s)} + w_0^{(k,s)}(\xi, \eta) + w_*^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\sigma_{jz_*}^{(k,s)} &= - \int_0^{\zeta} \left[ F_j^{(k,s)} + \frac{\partial \sigma_{jx}^{(k,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{jy}^{(k,s-1)}}{\partial \eta} \right] d\zeta, \quad j = x, y, z, \\ \sigma_{xx_*}^{(k,s)} &= \frac{1}{A_{11}^{(k)}} \left[ a_{22}^{(k)} \frac{\partial u^{(k,s-1)}}{\partial \xi} - a_{12}^{(k)} \frac{\partial v^{(k,s-1)}}{\partial \eta} - A_{23}^{(k)} \sigma_{zz_*}^{(k,s)} \right], \\ \sigma_{yy_*}^{(k,s)} &= \frac{1}{A_{11}^{(k)}} \left[ a_{11}^{(k)} \frac{\partial v^{(k,s-1)}}{\partial \eta} - a_{12}^{(k)} \frac{\partial u^{(k,s-1)}}{\partial \xi} - A_{13}^{(k)} \sigma_{zz_*}^{(k,s)} \right], \\ u_*^{(k,s)} &= \int_0^{\zeta} \left[ a_{55}^{(k)} \sigma_{xz_*}^{(k,s)} - \frac{\partial w^{(k,s-1)}}{\partial \xi} \right] d\zeta, \quad v_*^{(k,s)} = \int_0^{\zeta} \left[ a_{44}^{(k)} \sigma_{yz_*}^{(k,s)} - \frac{\partial w^{(k,s-1)}}{\partial \eta} \right] d\zeta, \\ w_*^{(k,s)} &= \int_0^{\zeta} \left[ a_{13}^{(k)} \sigma_{xx_*}^{(k,s)} + a_{23}^{(k)} \sigma_{yy_*}^{(k,s)} + a_{33}^{(k)} \sigma_{zz_*}^{(k,s)} \right] d\zeta, \\ A_{11}^{(k)} &= a_{11}^{(k)} a_{22}^{(k)} - (a_{12}^{(k)})^2, \quad A_{13}^{(k)} = a_{11}^{(k)} a_{23}^{(k)} - a_{12}^{(k)} a_{13}^{(k)}, \\ A_{23}^{(k)} &= a_{22}^{(k)} a_{13}^{(k)} - a_{12}^{(k)} a_{23}^{(k)}, \quad A_{33}^{(k)} = a_{33}^{(k)} A_{11}^{(k)} - a_{13}^{(k)} A_{23}^{(k)} - a_{23}^{(k)} A_{13}^{(k)}, \\ \gamma_{11}^{(k)} &= \alpha_{11}^{(k)} a_{22}^{(k)} - a_{12}^{(k)} \alpha_{22}^{(k)}, \quad \gamma_{22}^{(k)} = \alpha_{22}^{(k)} a_{11}^{(k)} - a_{12}^{(k)} \alpha_{11}^{(k)}, \\ k &= 1, 2, \quad Q^{(k,m)} \equiv 0 \text{ при } m < 0.\end{aligned} \tag{6}$$

Известно, что когда функции  $u^+, v^+, w^+$  являются многочленами от координат  $x, y$ , итерационный процесс обрывается на определенном приближении и соответствующее решение трехмерной задачи становится математически точным [1, 5].

Поскольку накопление деформаций в литосферных плитах – процесс медленный (длится обычно десятилетия), он практически будет квазистационарным.

Пусть в некоторый момент времени  $t = t_k$  в “ $n$ ” точках лицевой поверхности известны компоненты вектора перемещения  $u_i^{(+)}(x_i, y_i, t_k)$ ,  $v_i^{(+)}(x_i, y_i, t_k)$ ,  $w_i^{(+)}(x_i, y_i, t_k)$  как данные сейсмостанций и GPS. Тогда перемещения лицевой поверхности можно аппроксимировать многочленами в программной среде Wolfram Mathematica. Отметим, что, имея GPS данные в разные периоды времени, можно исследовать критические напряжения и указать координаты приблизительной территории возможной потери сейсмоустойчивости.

Как исходные данные и материалы слоев выбраны [2, 7]:

$$b = 333.6 \text{ км}, \quad a = 432 \text{ км}, \quad h_1 = 5 \text{ км}, \quad h_2 = 10 \text{ км}, \quad h_3 = 20 \text{ км}, \quad h = 35 \text{ км}, \\ n = 11;$$

слой осадочных пород:  $G = 23.20$  ГПа,  $E = 54.99$  ГПа,  $\nu = 0.184$  ;  
 гранитный слой:  $G = 30.82$  ГПа,  $E = 74.83$  ГПа,  $\nu = 0.21$  ;  
 базальтовый слой:  $G = 29.22$  ГПа,  $E = 75.11$  ГПа,  $K = 55.70$  ГПа,  
 $\nu = 0.27$  .

Объемные силы и температурное поле для начала не учитываются, а для  $u^+, v^+, w^+$  рассмотрены данные станций, отмеченных на рис. 2 [2] (координаты GPS станций соответствуют нашей координатной системе с учетом перехода на км (табл. 1)).

Рассмотрена модель ITRF 2000 /JOURNAL OF GEOPHYSICAL RESEARCH, VOL. 107, NO. B10, 2214, doi:10.1029/2001JB000561, 2002/, проведена аппроксимация исходных данных, т.е. отклонения не учитываются и предполагается, что месячный сдвиг выбранных точек равномерен (рис. 2).



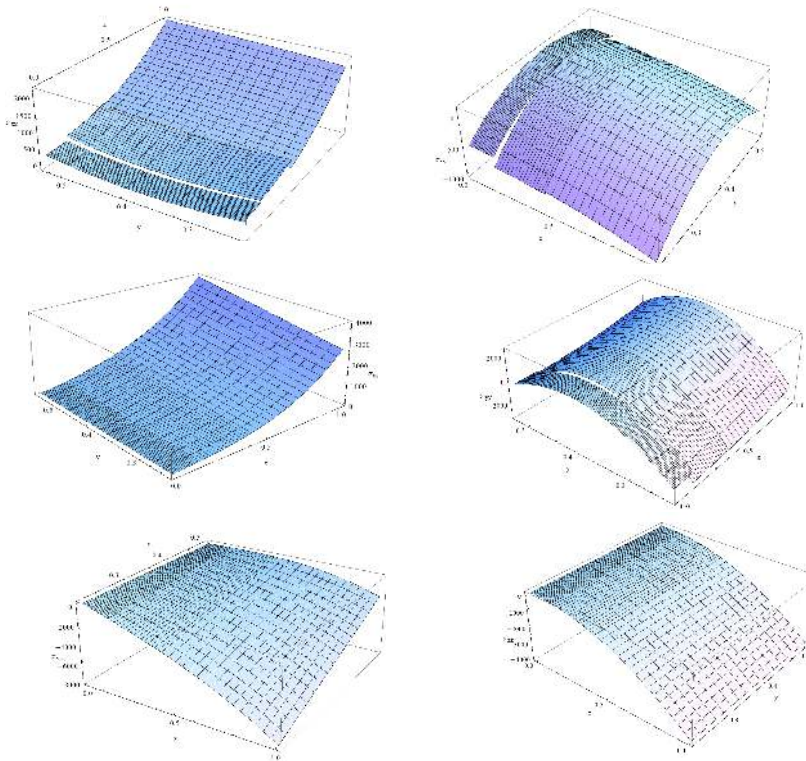
Рис. 2.

Таблица 1

	GPS станция	X, км	Y, км	Е- восток месячный средний сдвиг X, мм	Н-север месячный средний сдвиг Y, мм
1	Начальная точка (42.000, 39.000)	0	0		
2	AKH0	315	122.2	0.199167	0.669167
3	BAV0	154	235.8	0.095	0.485
4	CHO0	196.7	193.0	0.079167	0.766667
5	KAR0	229.6	122.4	0.130833	0.559167
6	KHO0	222.5	97.96	0.3375	0.815833
7	KIZO	189.2	243.0	0.1075	0.376667
8	NSSP	216.3	136.3	0.180833	0.026667

9	ODZ0	224.1	228.5	0.205	0.595
10	PAM0	220.4	204.6	0.135	0.618333
11	RAZ0	234.9	169.0	0.164167	0.425
12	SHA0	218.4	194.9	0.17	0.54

По вышеприведенным данным получены графики, характеризующие напряженно-деформированное состояние исследуемой области, в частности, графики компонентов вектора перемещения и тензора напряжений: на нижней грани третьего слоя ( $h=h_1+h_2+h_3$ ) (рис.3).



При наличии достоверных, долгосрочных и обновляемых данных измерений и соответствующих им решений можно провести сравнительный анализ изменения напряженно-деформированных состояний пакета во времени, выделить места и момент времени возможного возникновения критического состояния на наблюдаемой территории.

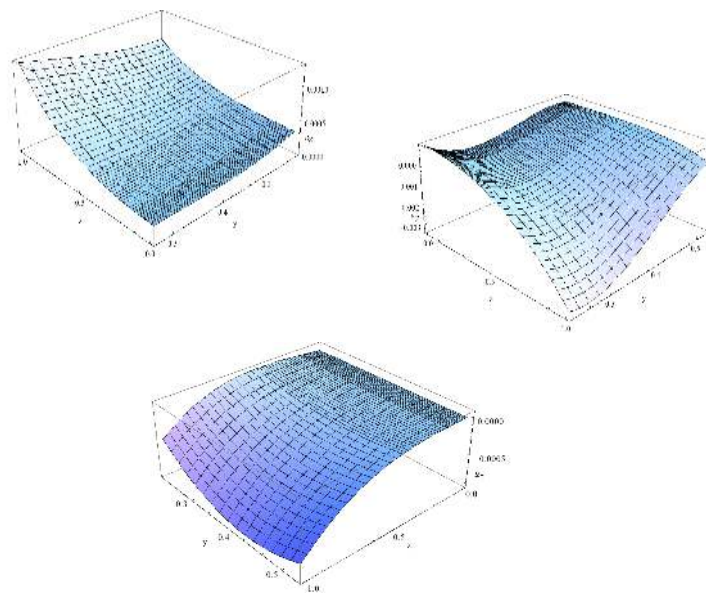


Рис. 3.

Приведены также графики скачков напряжений в зоне контакта  $h=h_1$  (рис. 4) и в зоне контакта  $h=h_1+h_2$  (рис. 5).

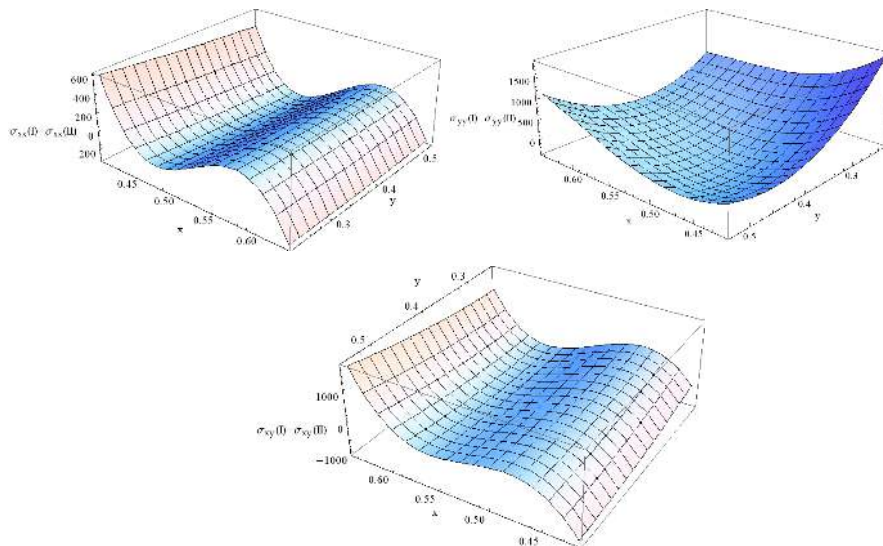


Рис. 4.

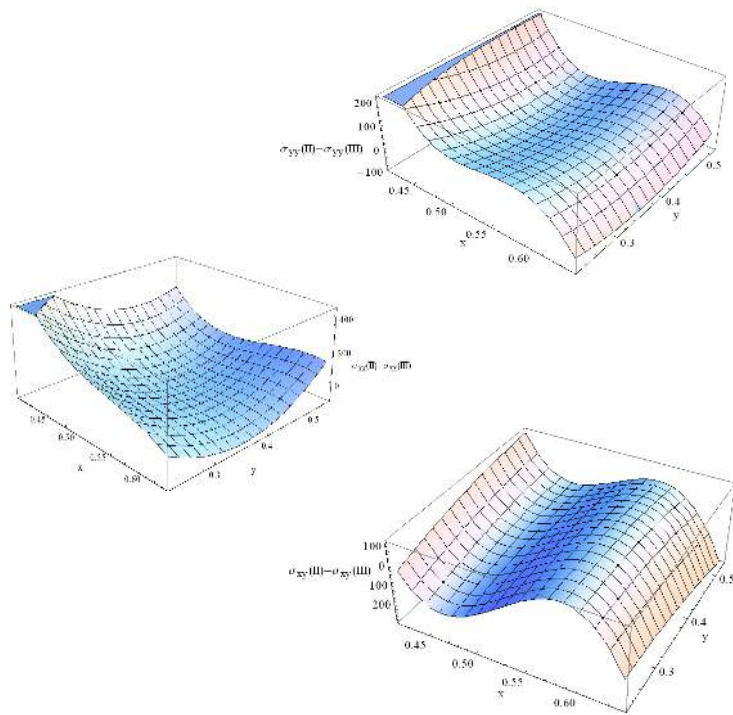


Рис. 5.

Безусловно, для более точного прогноза необходимо иметь более точную структуру исследуемой территории и более плотные данные сейсмостанций и GPS систем. Изложенный подход позволяет рассматривать пакеты из произвольного числа слоев, т.е. при более детальной толщинной структуре местности.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА, грант N13-2C009 SCS.

Институт механики НАН РА

**А. М. Погосян, М. З. Саргсян, М. Л. Агаловян, Л. Г. Гулгазарян**

**Способ мониторинга напряженно-деформированных состояний территории Армении на основе данных сейсмостанций и GPS систем**

Рассмотрена задача определения напряженно-деформированного состояния территории Армении (область между 39.00-42.00 северной широты и 42.00-47.00 восточной долготы) на основе существующих данных GPS систем. Рассмотрен трехслойный пакет из осадочного, гранитного и базальтового слоев, в глобальном смысле описывающий структуру земной коры. С использованием программной среды Wolfram Mathematica и рекуррентных формул для определения компонент

тензора напряжений и вектора перемещения проведены численные расчеты напряженно-деформированных состояний и приведены их графические изображения.

**Հ. Մ. Պողոսյան, Մ. Ջ. Մարգարյան, Մ. Լ. Աղալովյան,  
Լ. Գ. Դուլղազարյան**

**GPS համակարգերի և սեյսմակայանների տվյալների հիման վրա  
Հայաստանի տարածքի լարվածային-դեֆորմացիոն վիճակների  
մոնիթորինգի եղանակը**

Հիմք ընդունելով գոյություն ունեցող GPS համակարգերի տվյալները՝ դիտարկված է Հայաստանի տարածքի (հյուսիսային լայնության 39.00-42.00 և արևելյան երկայնության 42.00-47.00 միջև գտնվող տարածքը) լարվածադեֆորմացիոն վիճակի որոշման խնդիրը: Դիտարկված է եռաշերտ փաթեթ, որը կազմված է նստվածքային, գրանիտե և բազալտե շերտերից, որոնք նկարագրում են երկրակեղևի ընդհանուր կառուցվածքը: Կիրառելով Wolfram Mathematica ծրագրային միջավայրը և լարումների թեկնագրի և տեղափոխության վեկտորի բաղադրիչների որոշման ռեկուրենտ բանաձևերը՝ կատարված են լարվածադեֆորմացիոն վիճակների թվային հաշվարկները, և բերված են նրանց գրաֆիկական պատկերները:

**H. M. Poghosyan, M. Z. Sargsyan, M. L. Aghalovyan,  
L. G. Ghulghazaryan**

**About the Method of Monitoring of Stress-Strain States of the Territory of  
Armenia Based on the Seismic Stations and GPS Systems Data**

The problem of determining of the stress-strain state of the territory of Armenia (the area between the northern latitude and eastern longitude 39.00-42.00 42.00-47.00) on the basis of the existing data of GPS systems is considered. It is considered a three-layer package of sedimentary, granite and basalt layers, in a global sense describing the structure of the Earth's crust. Using Wolfram Mathematica software and recurrence formulas for determining the components of the stress tensor and displacement vector, numerical calculations of the stress-strain states and their graphics are carried out.

**Литература**

1. *Աղալովյան Լ. Ա., Գեորգյան Ք. Շ., Գուլգազարյան Լ. Գ.* – ДНАН РА. 2012. Т.112. N 3. С. 264-272.
2. *Davtyan V., Doerflinger E., Karakhanyan A., Philip H., Avagyan A., Champollion C., Aslanyan R.* – Izvestia NAS of RA. Nauki o Zemle. 2006. V. 59. N 2. P. 3-18.
3. *Պոգոսյան Ա. Մ., Տարգսյան Մ. Յ., Աղալովյան Մ. Լ., Գուլգազարյան Լ. Գ.* В кн.: Труды VIII междунар. конф. «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред». Ереван. 2014. С. 349-353.
4. *Խաչիյան Յ.* Прикладная сейсмология. Ереван. Изд-во «Гитутюн» НАН РА. 2008. 491 с.
5. *Aghalovyan L. A.* – Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute of Georgia. 2011. V.155. P. 3-10.
6. *Aghalovyan L.A.* Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells. 2015. Singapore. World Scientific Publishing. 376 p. (русск. изд.: М. Наука-Физматлит. 1997).
7. *Farmer I. W.* Engineering Properties of Rock. E. and F. N. Spon Ltd., London (Barnes and Noble, New York). 1968. 180 p.