ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր
Том 115 2015 № 4
Volume

**МЕХАНИКА**

УДК 539.3

**Р. М. Киракосян**

# Об одной неклассической задаче изгиба упруго защемленной круглой пластинки

(Представлено академиком С. А. Амбарцумяном 20/VI 2015)

**Ключевые слова:** *круглая пластинка, сосредоточенная сила, особенность, трансверсальная изотропия, ортотропия, упруго защемленная опора, поперечный сдвиг.*

Рассматривается задача изгиба трансверсально изотропной круглой пластинки постоянной толщины при учете влияния деформации поперечного сдвига, когда пластинка упруго защемлена по контуру и в ее центре действует сосредоточенная сила. В качестве частного случая получается решение задачи шарнирно опертой по контуру пластинки. Показано, что в данном случае учет поперечного сдвига приводит к уменьшению прогибов пластинки. Показано, что в отличие от случая трансверсально изотропной пластинки в общем решении разрешающего дифференциального уравнения задачи изгиба **ортотропной** пластинки участвует **сдвиговой член**, который в центре пластинки имеет логарифмическую особенность. В результате этого прогиб и его производная в центре пластинки независимо от характера краевых условий принимают бесконечно большие значения. Этот дефект исчезает в случае **неучета влияния** деформации поперечного сдвига.

1. В правой системе цилиндрических координат $r, \theta, z$ рассмотрим трансверсально изотропную круглую пластинку радиуса $R$ и постоянной толщины $h$. Плоскости изотропии материала параллельны координатной плоскости $r0\theta$. На пластинку действует сосредоточенная сила $P$, приложенная в ее центре $r = 0$.

Будем считать, что край пластинки $r = R$ некоторой малой длиной $2a$ вставлен в упругий массив, образуя упруго защемленную опору. Условия этой опоры имеют вид [1]:

$$\left.\frac{dw}{dr}\right|_{r=R} = D\left(aN_r + M_r\right), \ w = -\left(a\frac{dw}{dr} + BN_r\right). \tag{1.1}$$

Здесь $w$ – прогиб, $N_r$ – поперечная сила, $M_r$ –изгибающий момент пластинки, $D$ и $B$ –параметры упруго защемленной опоры, которые являются обратными величинами ее жесткостей на вращение и вертикальное смещение соответственно.

Попытаемся решить задачу изгиба рассматриваемой пластинки в рамках уточненной теории Амбарцумяна [2].

Разрешающее дифференциальное уравнение этой осесимметричной задачи имеет вид ([2], с.74)

$$D_r \frac{d}{dr}\left(r\frac{d^2w}{dr^2}\right) - D_r\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} - \frac{h^2}{10}a_r D_r\left[\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\varphi}{dr}\right) - \frac{\varphi}{r}\right] + \frac{h^3 r}{12}\varphi = 0. \qquad (1.2)$$

Здесь

$$D_r = \frac{B_r h^3}{12} = \frac{Gh^3}{6(1-v)},\ a_r = \frac{1}{G'}. \qquad (1.3)$$

Как обычно, $v$ – коэффициент Пуссона, $G$ – модуль сдвига материала в плоскостях изотропии, а через $G'$ обозначен модуль сдвига в поперечных сечениях пластинки.

Функция $\varphi$ связана с перерезывающей силой формулой [2]:

$$\varphi = \frac{12}{h^3}N_r. \qquad (1.4)$$

Из уравнения равновесия круга пластинки произвольного радиуса $r$ имеем

$$2\pi r N_r + P = 0 \Rightarrow N_r = -\frac{P}{2\pi r} \Rightarrow \varphi = -\frac{6P}{\pi h^3}\frac{1}{r}. \qquad (1.5)$$

С учетом (1.3) и (1.5) уравнение (1.2) примет вид

$$r\frac{d^3w}{dr^3} + \frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{dw}{dr} = \frac{P}{2\pi D_r}. \qquad (1.6)$$

Общее решение этого уравнения будет

$$w = c_1 + c_2 r^2 + \frac{P}{8\pi D_r}r^2\ln\frac{r}{R}. \qquad (1.7)$$

Здесь $c_1$ и $c_2$ – постоянные интегрирования, которые определятся из условий упруго защемленной опоры контура пластинки (1.1). Из (1.7) видно, что прогибы пластинки всюду ограничены и их производная в центре пластинки $r=0$ равна нулю.

С учетом (1.7) для изгибающих моментов получим [2]

$$M_r = -D_r\left\{2(1+v)c_2 + \frac{P}{8\pi D_r}\left[3+v+2(1+v)\ln\frac{r}{R} - \frac{4}{5}\frac{h^2}{r^2}\frac{G}{G'}\right]\right\}, \qquad (1.8)$$

$$M_\theta = -D_r\left\{2(1+v)c_2 + \frac{P}{8\pi D_r}\left[1+3v+2(1+v)\ln\frac{r}{R} + \frac{4}{5}\frac{h^2}{r^2}\frac{G}{G'}\right]\right\}. \qquad (1.9)$$

Из этих выражений видно, что изгибающие моменты в центре пластинки принимают бесконечно большие значения. Несмотря на то, что поперечная сила и изгибающие моменты с приближением к центру стремятся к бесконечности, полученное решение на небольшом расстоянии от центра является достаточно точным и приемлемым ([4], с.86). Используя (1.5), (1.7) и (1.8), из краевых условий (1.1) находим

$$c_2=-\frac{P}{16\pi RD_r}\frac{R^2+DD_r\left[4a+R\left(3+\nu-\frac{4}{5}\frac{h^2}{R^2}\frac{G}{G'}\right)\right]}{R+(1+\nu)DD_r}, \tag{1.10}$$

$$c_1=-R(R+2a)c_2-\frac{P}{8\pi RD_r}\left(aR^2-4BD_r\right).$$

Подставляя (1.10) в (1.7), (1.8) и (1.9), получим окончательные выражения прогиба и изгибающих моментов, чего ради простоты делать не будем. В качестве частного случая рассмотрим, например, случай, когда пластинка шарнирно оперта по контуру $r=R$. Тогда

$$a=B=0,\ D=\infty. \tag{1.11}$$

С учетом (1.11) из (1.10) получим

$$c_2=-\frac{P}{16\pi D_r}\frac{3+\nu-\frac{4}{5}\frac{h^2}{R^2}\frac{G}{G'}}{1+\nu},\ c_1=-R^2c_2. \tag{1.12}$$

Из (1.7) и (1.12) для прогиба находим

$$w=\frac{P\left(3+\nu-\frac{4}{5}\frac{h^2}{R^2}\frac{G}{G'}\right)\left(R^2-r^2\right)}{16\pi(1+\nu)D_r}+\frac{P}{8\pi D_r}r^2\ln\frac{r}{R}. \tag{1.13}$$

Из (1.13) видно, что учет поперечного сдвига в данном случае приводит к уменьшению прогиба.

Если не учитывать влияния поперечного сдвига, то

$$c_2=-\frac{(3+\nu)P}{16(1+\nu)\pi D_r},\ c_1=\frac{(3+\nu)R^2P}{16\pi D_r(1+\nu)}. \tag{1.14}$$

Внеся (1.14) в (1.7), находим

$$w=\frac{pR^2}{16\pi D_r}\left[\frac{3+\nu}{1+\nu}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)+2\frac{r^2}{R^2}\ln\frac{r}{R}\right], \tag{1.15}$$

что, как и следовало ожидать, совпадает с соответствующим известным выражением прогиба пластинки [3, 4].

Аналогично можно в качестве частных случаев получить решения задачи и при других краевых условиях пластинки.

2. Рассмотрим случай цилиндрически **ортотропной** пластинки, главные направления анизотропии материала которой параллельны координатным линиям. Положив

$$D_\theta=n^2D_r,\ (0<n\neq 1), \tag{2.1}$$

разрешающее дифференциальное уравнение задачи (1.2) приводится к виду

$$r\frac{d^3w}{dr^3}+\frac{d^2w}{dr^2}-\frac{n^2}{r}\frac{dw}{dr}=\frac{P}{2\pi D_r}-\frac{3\left(1-n^2\right)P}{5\pi hG'}\frac{1}{r^2}. \tag{2.2}$$

Общее решение этого уравнения будет

$$w = c_1 + c_2 r^{1+n} + c_3 r^{1-n} + \frac{\mathrm{P} r^2}{4\pi\left(1-n^2\right) D_r} - \frac{3P}{5\pi h G'} \ln \frac{r}{R}\,. \qquad (2.3)$$

Нетрудно заметить, что независимо от того, будем принимать $c_3 = 0$ или нет, при любых значениях постоянных $c_1$ и $c_2$, т.е. при любых краевых условиях, прогиб и его производная в центре пластинки принимают бесконечно большие значения.

Таким образом, *задача изгиба цилиндрически ортотропной круглой пластинки, несущей в центре сосредоточенную силу, при учете влияния поперечного сдвига не имеет ограниченного решения*. Такая ситуация имеет место и в рамках уточненной теории [5], примененной к пластинкам постоянной толщины.

Если же не учитывать влияния поперечного сдвига, то логарифмический член выражения прогиба (2.3) будет отсутствовать и при $c_3 = 0$ этот дефект исчезнет полностью. Решение (2.3) тогда примет вид

$$w = c_1 + c_2 r^{1+n} + \frac{P r^2}{4\pi\left(1-n^2\right) D_r}\,. \qquad (2.4)$$

Изгибающие моменты определятся формулами

$$\begin{aligned} M_r &= -D_r \left[ (1+n)(n+\nu_\theta) r^{n-1} c_2 + \frac{(1+\nu_0) P}{2\pi\left(1-n^2\right) D_r} \right], \\ M_\theta &= -n^2 D_r \left[ (1+n)(1+n\nu_r) r^{n-1} c_2 + \frac{(1+\nu_r) P}{2\pi\left(1-n^2\right) D_r} \right]. \end{aligned} \qquad (2.5)$$

Здесь $\nu_\theta$ и $\nu_r$, как обычно, – коэффициенты Пуассона материала.

Из (2.4) и (2.5) видно, что в рассмотренном случае прогиб при любом значении $n$ (2.1) принимает конечные значения и его производная в центре пластинки равна нулю. Изгибающие моменты, как и следовало ожидать, при $n < 1$ в центре пластинки принимают бесконечно большие значения, а при $n > 1$ они ограничены.

Пользуясь (1.5), (2.4) и (2.5), из краевых условий (1.1) находим

$$\begin{aligned} c_2 &= -\frac{P\left\{R^2 + D D_r \left[ (1+\nu_\theta) R + a\left(1-n^2\right) \right]\right\}}{2\pi(1+n)\left(1-n^2\right) R^n D_r \left[ R + (n+\nu_\theta) D D_r \right]}, \\ c_1 &= -R^n \left[ R + (1+n) a \right] c_2 - \frac{P\left[ (R+2a) R^2 - 2B\left(1-n^2\right) D_r \right]}{4\pi\left(1-n^2\right) R D_r}. \end{aligned} \qquad (2.6)$$

В качестве частного случая рассмотрим случай, когда пластинка жестко защемлена по контуру. Тогда $B = D = 0$ и

$$c_2 = -\frac{P R^{1-n}}{2\pi(1+n)\left(1-n^2\right) D_r}\,, \quad c_1 = \frac{P R^2}{4\pi(1+n)^2 D_r}\,, \qquad (2.7)$$

$$
w=\frac{PR^2\left[1-n+(1+n)\dfrac{r^2}{R^2}-2\left(\dfrac{r}{R}\right)^{1+n}\right]}{4\pi\left(1-n^2\right)(1+n)D_r}. \qquad (2.8)
$$

(2.8) совпадет с соответствующим выражением прогиба пластинки [3, 4].

Институт механики НАН РА

**Р. М. Киракосян**

**Об одной неклассической задаче изгиба упруго защемленной круглой пластинки**

Рассматривается задача изгиба упруго защемленной по контуру трансверсально изотропной круглой пластинки с учетом влияния поперечного сдвига, когда в центре пластинки действует сосредоточенная сила. Показано, что в данном случае учет поперечного сдвига приводит к уменьшению прогибов пластинки. Рассматривается также случай цилиндрически *ортотропной* пластинки. Показано, что при учете поперечного сдвига эта задача *не имеет ограниченного решения*.

**Ռ. Մ. Կիրակոսյան**

**Առաձգական ամրակցված կլոր սալի ծռման ոչ դասական մի խնդրի մասին**

Դիտարկվում է եզրագծով առաձգական ամրակցված տրանսվերսալ իզոտրոպ կլոր սալի ծռման խնդիրը ընդլայնական սահքի հաշվառմամբ, երբ սալի կենտրոնում ազդում է կենտրոնացված ուժ: Ցույց է տրվում, որ ընդլայնական սահքի հաշվի առնելը բերում է ճկվածքների փոքրացման: Դիտարկվում է նաև գլանային *օրթոտրոպ* սալի դեպքը և ցույց է տրվում, որ *ընդլայնական սահքը հաշվի առնելիս խնդիրը չունի վերջավոր լուծում:*

**R. M. Kirakosyan**

**On One Nonclasical Problem of a Bend of an Elastically Fastened Round Plate**

The problem of a bend of an elastically fastened by the contour transversal isotropic round plate is considered taking into account the influence of the cross section shear, when in the centre of the plate the concentrated force acts. It is shown, that in the given case the account of the crosssection shear is brought to the decrease of the plate deflections. The case of a cylindrically *orthotropic* plate is also considered; and it is shown that *this problem does not have a limited solution* taking into account the shear.

## Литература


1. *Киракосян Р. М.* В кн.: Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Труды VIII международной конференции. Сентябрь 22-26. 2014. Горис – Степанакерт. С. 261-265.
2. *Амбарцумян С. А*. Теория анизотропных пластин. М. Наука. 1987. 360 с.
3. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. М. Физматгиз. 1957. 463 с.
4. *Тимошенко С. П., С. Войновский-Кригер.* Пластинки и оболочки. М. Наука. 1966. 636с.
5. *Киракосян Р. М*. Прикладная теория ортотропных пластин переменной толщины, учитывающая влияние поперечных сдвигов. Ереван. Гитутюн. 2000. 122 с.